A2.1.1

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_n=(1+(-1)^n)\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Betrachtung: $a_1=(1-1)\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=0$,

$a_2=(1+(-1)^2)\,(-1)^{\frac{2(2+1)}{2}}=-2$

$a_3=(1+(-1)^3)\,(-1)^{\frac{3(3+1)}{2}}=0$

$a_4=(1+(-1)^4\,(-1)^{\frac{4(4+1)}{2}}=2*1=2$

$a_n=0$ für $n=1,3,5,\ldots$ $2k-1$, $k\in\mathbb{N}$.

$a_n=-2$ für $n=2,6,10\ldots$ $4k-2$ $k\in\mathbb{N}$.

$a_n=2$ für $n=4,8,12..$ $4k$, $k\in\mathbb{N}$.

(.) Zu zeigen a_n beschränkt

Lös:

//**S1.2.1**(406) 8.) $||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$//

$|a_n|=|1+(-1)^n|\,|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}|=|1+(-1)^n|\underset{S1.2.1}{\leqslant}1+1\le2$

(..) inf, sup $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Lös: $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}=0$, $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}=2\,((-1))^{\frac{(4k(4k+1))}{2}}=2$,

$(a_{2(2k-1)})_{k\in\mathbb{N}}=2\,((-1))^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}}=2\,(-1)^{(2k-1)(4k-1)}=-2$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\underset{D1.3.1}{\Rightarrow}$ $\exists$ inf & sup von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}+(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}+(a_{2(2k-1)})_{k\in\mathbb{N}}\Rightarrow$ inf $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=-2=a_2$, $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=2=a_4$.

b) Zeige die Konvergenz und berechne den Grenzwert der Folge (x_n) mit $x_n=(n-1)/(n+1)$

Lös: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1-\overbrace{1/n}^{Nullf}}{1+\underbrace{1/n}_{Nullf}}=1$

A2.1.2

Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz mit Hilfe der Konvergenzdefinition:

(.) $a_n=\frac{n^2}{n^2+3}$

Lös:Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. Sei $\varepsilon>0$ baf.

Dann gilt für $n\geq n_0(\varepsilon)=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$

$$|a_n-1|=\left|\frac{n^2}{n^2+3}-\frac{n^2+3}{n^2+3}\right|=\frac{3}{n^2+3}\leq\frac{3}{n^2}\leq\frac{3}{n}<\varepsilon.\quad \frac{3}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$$

(..) $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu-\frac{n^2}{2n+1}$

Lös: $a_n=\frac{n(n+1)}{2n}-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{(n+1)(2n+1)-2n^2}{2(2n+1)}=\frac{2n^2+3n+1-2n^2}{2(2n+1)}=$

$\frac{3n+1}{4n+2}$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty}=3/4$. Sei $\varepsilon>0$ baf.

Definiere $n_0(\varepsilon):=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Dann gilt $\forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{3n+1}{4n+2}-3/4\right|=\frac{|2(3n+1)-3(2n+1)|}{4(2n+1)}=\frac{|6n+2-6n-3|}{4(2n+1)}=$$

$$\frac{1}{4(2n+1)}\leq\frac{1}{2n+1}\leq\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

A2.1.3

a) Es sei $|z|<1$ und $(z_n)_{n=1}^{¥}$ definiert durch $z_n=\sum\limits_{k=0}^{n}kz^k$.

Untersuche $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme ggf den Grenzwert.

Lös: $$z_n=\sum_{k=0}^{n}kz^k=\sum_{k=1}^{n}kz^k=\sum_{k=1}^{n}z^k\underbrace{\sum_{j=1}^{k}1}_{k}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}z^{k-j}z^j=\sum_{j=1}^{n}z^j\sum_{k=j}^{n}z^{k-j}\underbrace{=}_{\nu=k-j}\sum_{j=1}^{n}z^j\sum_{\nu=0}^{n-j}z^\nu=\sum_{j=1}^{n}$$

$$z^j\,\frac{1-z^{n-j+1}}{1-z}=$$

$$\frac{z}{1-z}\sum_{j=1}^{n}z^{j-1}-\sum_{j=1}^{n}\frac{z^{n+1}}{1-z}=\frac{z}{1-z}\sum_{\nu=0}^{n-1}z^\nu-\frac{nz^{n+1}}{1-z}=\frac{z}{1-z}\,\frac{1-\overbrace{z^n}^{\to 0}}{1-z}-\frac{\overbrace{nz^n}^{\to 0}z}{1-z}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{z}{(1-z)^2}$$

b) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

Lös: Ansatz $\forall\ k\in\mathbb{N}\ \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{A}{(3k-2)}+\frac{B}{(3k+1)} \Leftrightarrow 1=A(3k+1)+B(3k-2)\ \forall\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$1=k(3A+3B)+A-2B\ \forall\ k\in\mathbb{N} \underbrace{\Leftrightarrow}_{unabhängig\,von\,k} 3A+3B=0, 1=A-2B \Leftrightarrow A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(3k-2)}-\frac{1}{(3k+1)}\right)$$

Teleskopsumme...$S_n=\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(3k-2)}-\frac{1}{(3k+1)}\right)=$

$$\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}\right)+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3}$$

c) $S:=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\frac{1}{3})^k$.

Lös: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(\frac{1}{3})^k=-\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{3})^k=\sum_{k=0}^{n}(-\frac{1}{3})^k+1=-1-\frac{(-\frac{1}{3})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{3})}\underbrace{\to}_{n\to\infty}\frac{1}{4}$

A2.1.4 Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n\geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.

Beweise, dass dann $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ gilt.

Bew: Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}|a_n|=a$, d.h. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon$.

Wenn $a_n>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, dann ist auch $a\geq 0$. $\sqrt{a_n}-\sqrt{a}=\frac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}$

Sei $\varepsilon>0$ baf, dann gilt

$\forall\ n\geq n_1(\varepsilon):=n_0(\varepsilon^2)$:

Fall 1: $\sqrt{a_n}+\sqrt{a}<\varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\leq\sqrt{a_n}+\sqrt{a}<\varepsilon$

Fall 2: $\sqrt{a_n}+\sqrt{a}\geq\varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}{\underbrace{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}_{>0}}=|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|\frac{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leq$

$\frac{|a_n-a|}{\varepsilon}<\varepsilon$

Andere Formulierung:

$a=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|\Rightarrow a\geq 0$

Fall 1: $a>0$. Sei $\varepsilon>0$ baf, Wähle $n_0\in\mathbb{N}$: $|a_n-a|\underbrace{<}_{\lim_{n\to\infty}a_n=a}\underbrace{\sqrt{a}*\varepsilon}_{\bar{\varepsilon}}\ \forall\ n\geq n_0$.

$\Rightarrow |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\underbrace{\leq}_{\sqrt{a_n}\geq 0}\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$.

Fall 2: $a=0$. Sei $\varepsilon>0$ baf. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$: $|a_n-0|<\underbrace{\varepsilon^2}_{\bar{\varepsilon}}\ \forall\ n\geq n_0$.

$\Rightarrow |\sqrt{a_n}-\sqrt{0}|=\sqrt{a_n}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$.

$\underbrace{\Rightarrow}_{Fall\ 1\ und\ 2}\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$

A2.1.5 Seien P und Q Polynome, und sei $Q(n)\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Untersuche die Konvergenz der Folge $(x_n=P(n)/Q(n))$ und berechne ggf ihren Grenzwert.

Lös: $P(n)=\sum_{k=0}^{\nu}a_k n^k$, $a_\nu\neq 0$, $Q(n)=\sum_{j=0}^{m}b_j n^j$, $b_\nu\neq 0$,

$$\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{n^\nu}{n^\mu}\frac{\sum_{k=0}^{\nu}a_k n^{k-\nu}}{\sum_{j=0}^{\mu}b_j n^{j-\mu}}\underbrace{=}_{\mu=\nu}\frac{n^\mu}{n^\mu}\frac{\sum_{k=0}^{\mu}a_k n^{k-\mu}}{\sum_{k=0}^{\mu}b_k n^{k-\mu}}\underbrace{\to}_{k-\mu<0,\mu\to\infty}\frac{a_\mu}{b_\mu}$$

$\mu<>\nu\to?$??????????????

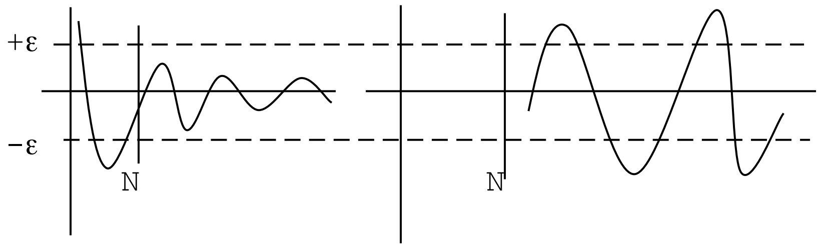
A2.1.6

a) Ergänze: Eine Folge (x_n) in K heißt konvergent, wenn $\exists\ x \in K$, so dass $\forall\ \varepsilon>0$...

Lös: (x_n) in K heißt konvergent, wenn
$\exists\ x\in K$, so dass gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$.

b) Negiere die Aussage aus a)

Lös: (x_n) divergiert (d.h. nicht konvergent oder bestimmt divergent),
wenn $\forall\ x\in K\ \exists\ \varepsilon>0\ \forall\ n\in R_+\ \exists\ n\in N$ mit $n\geq N \Rightarrow |z_n-z|<\varepsilon$.
(x_n) divergiert (nicht konvergent):



c) Bestimme zu $\varepsilon>0$ ein $N\in R_+$ so, dass $\forall\ n\in N: n\geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

*//**A1.8.1** b) (1002) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für $n,p\in N$ mit//*
// $n\geq 2p$, dass $\sqrt[n]{n^p}<1+2p/\sqrt{n}$. Anl: Setze $x_j=\sqrt{n}$ für $1<j\leq 2p$ //

Lös: Ziel $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon \underbrace{\Leftrightarrow}_{\sqrt[n]{n}>1} \sqrt[n]{n}-1<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$.

Es gilt $1\leq\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^1} \underbrace{\geq}_{A1.8.1} 1+\frac{2*1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0\leq\sqrt[n]{n}-1\leq\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Es reicht (hinreichend) $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{4}{\varepsilon^2}$. Wähle $N=\left|\frac{4}{\varepsilon^2}\right|+1$.

$n=1$: $\sqrt[n]{n}=1+\frac{2}{1}\ \ \forall\ n\in N, n\geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

d) Bestimme zu $K\in R_+$ ein $N\in R_+$ so dass $\forall\ n\in N: n\geq N \Rightarrow \sqrt[n]{n!}>K$

Lös: Ziel $\sqrt[n]{n!}>K \Leftrightarrow n!>K^n \Leftrightarrow n(n-1)\ldots 1>\underbrace{K*K*\ldots*K}_{n\ mal}$.

Es gilt $n!\geq\underbrace{n(n-1)\ldots[n/2]}_{mehr\ als\ [n/2]\ Faktoren}>\underbrace{(\frac{n}{2}-1)}_{<[n/2]}{}^{n/2}$.

Es reicht $(\frac{n}{2}-1)^{n/2}>K^n \Leftrightarrow (\frac{n}{2}-1)^{1/2}>K \Leftrightarrow n\geq 2K^2+2$. Wähle $N=2K^2+3$,

dann $\forall\ n>N\ \ n!>K^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!}>K$

A2.1.7 Es sei $a_n=(1+1/n)^2+1\ \ \forall\ n\in N$. Zeige direkt mit D2.1.1, dass die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Bew: Beh $a_n\to 2\ (n\to\infty)$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0\in N: |a_n-2|<\varepsilon\ \ \forall\ n\leq n_0$. Sei $\varepsilon>0$ baf, wähle $n_0=[3/\varepsilon]+1 \Rightarrow$
$n_0>3/\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$.

$|a_n-2|=\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+1-2\right|=\left|\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}\right|=\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\underbrace{\geq}_{n^2>n}\frac{2}{n}+\frac{1}{n}$

$=3/n\leq 3/n_0<\varepsilon$ für $n_0>3/\varepsilon$

A2.1.8

a) Beh: $\forall$ p∈**N** gilt $0 \le x_n = \sqrt[n]{n^p} - 1 \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

*//**A1.8.1** b) (1002) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für n,p∈N mit//*
// n≥2p, daß $\sqrt[n]{n^p} < 1+2p/\sqrt{n}$. //
Bew: Nach **A1.8.1** b) ist $0 < x_n < \underbrace{2p/\sqrt{n}}_{Nullf}$,woraus die Beh folgt.

b) Schließe aus a), daß $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt
Bew: p=1

A2.1.9 Beh: $\forall$ x∈**K** mit $|x|<1$ und jedes p∈**N** ist $(n^p x^n)$ eine Nullfolge.

Bew: x^n ist Nullfolge. Wir setzen $1/|x| = 1+\varepsilon$ (da $|x|<1$).
Aus **A1.8.1** folgt $\sqrt[n]{n^p} < 1+\varepsilon/2$ $\forall$ $n \ge n_0$ ⇒ $n^p |x|^n < \underbrace{(1+\varepsilon/2)^n}_{>n^p} / (1+\varepsilon)^n = \underbrace{y}_{<1}{}^n$
mit $y = (1+\varepsilon/2)/(1+\varepsilon) < 1$. (Aus $1/|x| = 1+\varepsilon$, $|x|^n = 1/(1+\varepsilon)^n$)
Daraus folgt die Beh.

A2.1.10

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ $\forall$ x∈**R**.

*//**A2.1.6** d) (1206) Bestimme zu $K \in R_+$ ein $N \in R_+$ so daß $\forall$ n∈N: n ≥N ⇒ $\sqrt[n]{n!} > K$//*
Lös: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x^n|}{n!} = \left(\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n \le q^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ falls $|q|<1$. Es reicht
$\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \le q \in (0,1)$ $\forall$ $n \ge n_0$ ⇔ $\sqrt[n]{n!} \ge |x|/q$ wie in A2.1.6 d,
wähle $n_0 = 2\left(\frac{|x|}{q}\right)^2 + 3$ mit $q \in (0,1)$ beliebig $\forall$ n∈**N**, $n \ge n_0$ ⇒
$\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \le q$ ⇒ $0 \le \frac{|x|}{n!} \le q^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ ⇒ Beh

Andere Formulierung:
$x_n = x^n/n!$. $|x_n| = |x|^n/n! = \frac{|x|}{1} \frac{|x|}{2} \ldots \frac{|x|}{n}$. Sei $m > |x|$ oder $m > 2|x|$, so ist $\frac{|x|}{m} < 1/2$, also ist für $n \ge m$
$|x_n| < \underbrace{\prod_{k=1}^{m-1} \frac{|x|}{k}}_{C} \prod_{k=m}^{n} 1/2 = C \underbrace{(\underbrace{1/2}_{<1})^{n-m+1}}_{\to 0 (n\to\infty)}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 5n\mu + 1}{2*3^n + n^5 + 2} = 1/2$

*//**A2.1.9** Beh: $\forall$ $x\in K$ mit $|x|<1$ und jedes $p\in N$ ist $(n^p x^n)$ eine //*
//Nullfolge. $x^n n^p \to 0$ für $|x|<1$ $\forall$ $p\in\mathbb{N}$, $x^n\to 0, |x|<1$.*//*

Lös: $=\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-(1/3)^n 5n\mu+(1/3)^n}{2+(1/3)^n n^5+2(1/3)^n} = 1/2$, da $(1/3)^n n^3\to 0$, $(1/3)^n\to 0$,
$(1/3)^n n^5 \to 0$,

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha x^n+\beta y^n} = y$, $(0<x<y,\ \alpha,\beta>0)$

*//**A2.1.8** a) Beh: $\forall$ $p\in N$ gilt $0\le x_n=\sqrt[n]{n^p}-1\to 0\ (n\to\infty)$ //*

Lös: $\beta y^n < \underbrace{\alpha x^n}_{>0} + \beta y^n < (\alpha+\beta) y^n$ $(x<y, x^n<y^n \Rightarrow \alpha x^n<\beta y^n) \Rightarrow$

$\sqrt[n]{\beta}\, y < \sqrt[n]{\alpha x^n+\beta y^n} < y\sqrt[n]{(\alpha+\beta)}$. Da $\sqrt[n]{\beta}\to 1$ und $\sqrt[n]{(\alpha+\beta}\to 1 \Rightarrow$
Beh mit Sandwichsatz

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n´+3n}-n=3/2$

Lös: $= \dfrac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \dfrac{3n}{\sqrt{n´+3n}+n} = \dfrac{3}{\sqrt{1+3/n}+1} \to 3/2$

A2.1.11 Zeige: $\forall$ $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist $(x_n=1/(a+nb))$ eine Nullfolge,
außer wenn $-a/b\in\mathbb{N}$ ist
(dann ist x_n nicht für alle $n\in\mathbb{N}$ definiert: $a+nb=0 \Leftrightarrow nb=-a \Leftrightarrow n=-a/b$)

Lös: $|1/(a+nb)|=|x_n|<\varepsilon \Leftrightarrow |a+nb|>1/\varepsilon$

$|a+nb|\ge||a|-|nb|| \underbrace{=}_{n\text{ groß}} |nb|-|a|=n|b|-|a|>1/\varepsilon \Leftrightarrow n> \dfrac{1/e+|a|}{|b|}$,

$N= \left|\dfrac{1/\varepsilon+|a|}{|b|}\right| +1$