A2.2.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_{n+1}:=\sqrt{a_n}+\dfrac{1}{n}$, $n_1:=2$ Zu zeigen: $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$ und a?

Lös: Monotoniekriterium: Monoton & beschränkt

Beschränkt: Behauptung $a_n \geq 1$ $\forall$ n. Bew durch Induktion

IA: $a_1=1$, $a_2=2\geq 1$

IH: n, $a_n\geq 1$ gelte für ein n

IS: Zeige $a_{n+1}\geq 1$. $A_{n+1}=\sqrt{\underbrace{a_n}_{a_n\geq 1}}+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{n}$

Monotonie: $a_{n+1}\leq\sqrt{\sqrt{2}+1}\ a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, Induktion

IA: n=2: $a_3 \leq a_n$ da $\sqrt{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2}\leq\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{2}+1}\leq\sqrt{2}+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}+1\leq 2+\dfrac{2\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$

$$0\leq 1+\frac{1}{4}$$

IH: $a_{n+1}\leq a_n$ gelte für $n\geq 2$

IS:Zeigen $a_{n+2}\leq a_{n+1}$

$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}}+\dfrac{1}{n+1}\underbrace{\leqslant}_{IH}\sqrt{a_n}+\dfrac{1}{n+1}\leq\sqrt{a_n}+\dfrac{1}{n}=a_{n+1}\Rightarrow a_{n+1}\leq a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

Monotonieprinzip: $a_n\underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a$, $a\geq 1$, es gilt $a=\sqrt{a}\Leftrightarrow a^2-a=0\Leftrightarrow a(a-1)=0\Rightarrow$

$a=1$ & $a\neq 0$

A2.2.2 a) Zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ die Funktion $f(x)=x^n$ auf dem Intervall $[0,\infty]$ streng monoton wächst.

Lös:Es gilt $y^n-x^n=(y-x)\sum_{k=0}^{n-1}x^{n-1-k}y^k$, und für $0<x<y$ ist die rechtsstehende Summe positiv. Daher folgt die Beh.

b) Untersuche das Konvergenzverhalten (konvergent, divergent oder bestimmt divergent) und bestimme ggf den Grenzwert

c) $x_n=n^n/n!$

Lös:$=\dfrac{n*n*n\ldots*n}{(n)(n-1)\ldots*1}=1*\underbrace{\dfrac{n}{n-1}}_{>1}\ldots*\underbrace{\dfrac{n}{2}}_{>1;\,n\geq 3}*n$. Sei $N=K\in\mathbb{R}_+$, dann $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$

$\Rightarrow$ $x_n=n^n/n!>n\geq N=K$ $\Rightarrow$ bestimmt divergent $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} x_n=\infty$

d) $x_n=P(n)/Q(n)$, P,Q reelle Polynome mit $\gamma(P)>\gamma(Q)$ und $Q(n)\neq 0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

Lös:$x_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}=\dfrac{\sum_{k=0}^{\infty}a_k n^k}{\sum_{k=0}^{\infty}b_k n^k}$ $(\gamma(P)<\gamma(Q)$, $x_n\rightarrow 0$; $\gamma(P)=\gamma(Q)=m$, $x_n\rightarrow a_m/b_m)$

$P=Q_1Q+R$ $\Rightarrow$ $P(n)/Q(n)=Q_1(n)+\underbrace{\dfrac{R(n)}{Q(n)}}_{\rightarrow 0(n\rightarrow\infty)}$, $P:Q=\dfrac{a_\ell x^n+\ldots}{b_\ell x^\ell+\ldots}$, sign $c_M=\dfrac{sign\ \cancel{\rightarrow}a_m}{sign\ \cancel{\rightarrow b_\ell}}$

$Q_1(n)=\sum_{k=0}^{M}c_k n^k=n^M(\underbrace{\sum_{k=0}^{M-1}\dfrac{c_k}{n^{M-k}}}_{\rightarrow 0(n\rightarrow\infty)}+c_M)=\begin{cases}+\infty\ falls\ c_M>0\\-\infty\ falls\ c_M<0\end{cases}$

e) $x_n=\sum_{k=0}^{n}q^k$, $|q|<1$

Lös: $x_n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$ da $|q|<1$ ($q^n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$ d.h. konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$)

A2.2.3 $n\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}$, $x_0\in\mathbb{R}$ mit $x_0^k > a > 0$.

a) Zeige: $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

*//**S1.5.6** (715) $x\in R$, $x\geq -1$, $n\in N$; $(1+x)^n \geq 1+nx$, „=" $\Leftrightarrow$ $x=0^\wedge n=0^\wedge n=1$//*

Bew: $x_0^k > a > 0$, # $x_0 > \sqrt[k]{a}$, $x_0^{k-1} > \sqrt[k]{a^{k-1}}$ #

(.) $x_n^k > a$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$, Bew durch Induktion nach n

n=0: $x_1 = \frac{1}{k}\left((k-1)x_0 + \frac{a}{x_0^{k-1}}\right) \#> \frac{1}{k}\left((k-1)\sqrt[k]{a} + \frac{a}{\sqrt[k]{a^{k-1}}}\right) = \frac{1}{k}\left((k-1)\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{\frac{a^k}{a^{k-1}}}\right) =$

$\frac{1}{k}\left((k-1)\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{a}\right) = \sqrt[k]{a}$ $\Rightarrow$ $x_1^k > a$#, richtig

n n+1: Für ein $n\in\mathbb{N}_0$ gelte $x_n^k > a$ $\Rightarrow$ $x_{n+1}^k = \left(x_n + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^{k-1}} - x_n\right)\right)^k =$

$\left(x_n\left(1+\frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k}-1\right)\right)\right)^k = x_n^k\left(1+\underbrace{\frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k}-1\right)}_{>-1\neq 0}\right)^k \underbrace{\geq}_{S1.5.6} x_n^k\left(1+\frac{a}{x_n^k}-1\right) = a$

(..) $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend

Bew: $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = x_n\frac{1}{k}\left(k-1+\underbrace{\frac{a}{x_n^k}}_{\leq 1}\right) \leq x_n\frac{1}{k}(k-1+1) = x_n$.

Aus (.) und (..) folgt $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. Obere Schranke >0 da $x_n\searrow$

#$x_n^k > a > 0$

b) Zeige mit Hilfe der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ aus Teil a), dass zu jedem a>0 genau ein b>0 mit $b^k=a$ existiert.

Bew: Es gelte $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$ $\Rightarrow$ $x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \underbrace{=}_{GWregeln} \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right)$ $\Rightarrow$

$kx = (k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{a}{x^{k-1}}$ $\Rightarrow$ $x^k = a$

Eindeutigkeit:

Es sei $\tilde{x} > 0$ mit $\tilde{x}^k = a$: wenn $x < \tilde{x}$ $\Rightarrow$ $x^k < \tilde{x}^k$ $\Rightarrow$ $a < \tilde{x}^k$ Widerspruch

wenn $\tilde{x} > x$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}^k < x^k$ $\Rightarrow$ $\tilde{x}^k < a$ Widerspruch $\Rightarrow$

$\tilde{x} = x$

A2.2.4 (Umordnung einer Folge). Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge und $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine bijektive Funktion.

Beweise: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_{\varphi(n)})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Bew: (.) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon$. Z.z.: $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Sei $\varepsilon_0>0$ baf. Definiere $n_1(\varepsilon)=\max\{\varphi^{-1}(k)\,|\,1\leq k\leq n_0(\varepsilon)\}+1$.

Dann gilt $\forall\ n>n_1: \varphi(n)\geq n_0$, (denn sonst wäre $\varphi(n)=k$ für ein k zwischen 1 und $n_0(\varepsilon)$) $\Rightarrow |a_{\varphi(n)}-a|<\varepsilon$

#Beispiel:

1 2 3 4 5 ….. $n_0(\varepsilon)$ ... $n_1(\varepsilon)$ $n>n_1$….

Nicht möglich, da alle Plätze

1 2 3 4 5 ….. $n_0(\varepsilon)$ 1... $n_0(\varepsilon)$ besetzt

(..) Es gelte $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a$. Setze $b_n=a_{\varphi(n)} \Rightarrow a_n=b_{\phi^{-1}(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a$ nach (.)

A2.2.5 Zeige: Ist (z_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{K}$, so sind (z_{2n}) und (z_{2n+1}) Teilfolgen

A2.2.6 Zeige: Ist (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{K}$, so ist (y_n)

mit $y_n=\begin{cases} x_{n-1} \text{ für } n \text{ gerade} \\ x_{n+1} \text{ für } n \text{ ungerade}\end{cases}$ eine Umordnung von (x_n).

A2.2.7 Sei $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ beliebig. Finde eine genaue Bedingung, unter welcher der Schluß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{\phi(n)}=x$ für alle Folgen in $\mathbb{K}$ richtig ist

(Hinweis: Analysiere den Beweis S2.2.1, um diese Bedingung zu finden).

*//**S2.2.1** (1301) Vor: z_n konvergent mit $z_n\to z\,(n\to\infty)$//*

//Beh: Jede Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n), Umordnung und triviale Abänderung//

// ist konvergent mit $z_{v_n}\to z\,(n\to\infty)$//

A2.2.8

a) $x_n=(-1)^n\dfrac{n-8n+1}{n+16}$

//**S2.2.2** (1301) Vor: Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Beh: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//

Lös: $x_{2k}=1^{(2k)^2}\dfrac{(2k)^2-16k+1}{(2k)^2+16} \underset{k\to\infty}{\to} 1$. $x_{2k+1} \underset{k\to\infty}{\to} =-1$.

$\exists$ 2 konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten. Nach **S2.2.2** x_n nicht konvergent.

$\left.\begin{array}{l} x_{2n}\, konv \Rightarrow beschränkt \\ x_{2n-1}\, konv \Rightarrow beschränkt \end{array}\right\}$ x_n beschränkt, nicht bestimmt divergent

A2.2.9 Von der Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ sei bekannt, dass die Teilfolgen (x_{2n}), (x_{2n-1}) und (x_{3n}) konvergieren. Konvergiert dann (x_n) selbst (Beweis oder Gegenbeispiel)?

Lös: $x_n\to ?$, $(x_{2n})\to\alpha$, $(x_{2n-1})\to\beta$, $(x_{3n})\to\gamma$,

x_{6n} ist Teilfolge von x_{2n}, also $x_{6n}\to\alpha$,

x_{6n} ist Teilfolge von x_{3n}, also $x_{6n}\to\gamma$,

Eindeutigkeit der Grenzwerte $\Rightarrow \alpha=\gamma$

x_{6n-3} ist Teilfolge von x_{2n-1}, also $x_{6n-3}\to\beta$,

x_{6n-3} ist Teilfolge von x_{3n}, also $x_{6n-3}\to\gamma$,

Eindeutigkeit der Grenzwerte $\Rightarrow \beta=\gamma$, $\alpha=\beta=\gamma$

Mit $2n$ und $2n-1$ ganz $\mathbb{N}$. $x_n\to\alpha=\beta=\gamma$, d.h. x_n konvergent.

A2.2.10 Die Folgen (a_n) und (b_n) seien gegeben durch

$0<a_1<b_1$, $a_{n+1}=\frac{2a_n b_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1}=1/2(a_n+b_n)$. Zeige, dass die Folgen (a_n) und (b_n) gegen denselben Grenzwert streben und bestimme diesen.
Hinweise: Man zeige, dass (a_n) eine wachsende, (b_n) eine fallende Folge und $a_n b_n$ konstant ist.

A2.3.11

Sei $x_n=\sum_{j=1}^{n} 1/j$, $n\in\mathbb{N}$. Benutze die Monotonie von $(1/j)$, um zu zeigen,daß $x_{2n}-x_n>n/(2n)\geq 1/2$ ist. Zeige daß (x_n) keine Cauchyfolge ist. Schließe daraus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

Lös:x_n streng monoton wachsend **S2.1.2** Bsp 3.

$x_{\underbrace{2n}_{m}}-x_n=\sum_{j=n+1}^{2n} 1/j\geq n\frac{1}{2n}=1/2$. Keine Cauchyfolge ⇒ nicht konvergent

⇒ bestimmt divergent

A2.2.11 Zeige

a) Die Folge $(x_n=n)$ ist bestimmt divergent gegen ∞

b) Folge $S_n:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist bestimmt divergent gegen +∞

Lös: Sei $m=2n+1>n+1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$ ⇒

$S_m-S_n=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}=a_{n+1}>\frac{1}{2}\geq\varepsilon$... Cauchykriterium nicht erfüllt.

$S_n\uparrow$ also nicht beschränkt ⇒ $\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}=+\infty$

A2.2.12 Finde ein Beispiel einer Folge, welche divergent aber nicht bestimmt divergent ist.

A2.2.13 Es sei $0\leq q<1$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit der Eigenschaft:
$|a_{n+1}-a_n|\leq q|a_n-a_{n-1}|\ \forall\ n\geq n_0\in\mathbb{N}$.

a) Zeige, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge ist.

*// **S2.2.5** (1307) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$ ⇔//*
// Re(z_n) und Im(z_n) sind Cauchyfolgen.//

Lös: Motiviert durch $|a_{n+1}-a_n|\leq q|a_n-a_{n-1}|\leq q^2|a_{n-1}-a_{n-2}|\ldots\leq q^n|a_1-a_0|$

vermutet man: (*) $|a_{n+1}-a_n|\leq q^n|a_1-a_0|\quad\forall\ n\in\mathbb{N}_0$

Z.z. $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |a_n-a_m|<\varepsilon\quad\forall\ n,m\leq n_0$,

$|a_{n+1}-a_n|\leq q\underbrace{|a_n-a_{n-1}|}_{\leq q|a_{n-1}-a_{n-2}|}\ldots\leq q^n|a_1-a_0|\quad\forall\ n\in\mathbb{N}_0$, Induktion:

n=0: $\quad|a_1-a_0|\leq|a_1-a_0|=q^0|a_1-a_0|$

#n=1: $\quad|a_2-a_1|\leq q|a_1-a_0|=q^1|a_1-a_0|$

n n+1, n≥0: $|a_{n+2}-a_{n+1}|\leq q\underbrace{|a_{n+1}-a_n|}_{\leq q^n|a_1-a_0|}\leq qq^n|a_1-a_0|=q^{n+1}|a_1-a_0|$

Für $n\geq m$: $|a_n-a_m|=|\underbrace{\sum_{\nu=m}^{n-1}\left(a_{\nu+1}-a_\nu\right)}_{Teleskop:\ a_m-a_n})|\leq\sum_{\nu=m}^{n-1}|a_{\nu+1}-a_\nu|\underset{*}{\leq}\sum_{\nu=m}^{n-1}q^\nu|a_1-a_0|=$

$q^m|a_1-a_0|$ ¿ $\underbrace{\sum_{\nu=0}^{n-m-1}q^\nu}_{\frac{1-q^{n-m}}{1-q}\leq\frac{1}{1-q}}\leq\frac{q^m}{1-q}|a_1-a_0|$

1.Fall: $a_1=a_0$: $|a_{n+1}-a_n|=0, a_n=a_0\ \forall\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow(a_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge

(Zu $\varepsilon>0$ wähle $n_0\in\mathbb{N}$ bel, dann $|a_n-a_m|=0<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$

2.Fall: $a_1\neq a_0$ Sei $\varepsilon>0$ beliebig, fest, $q^m\underbrace{\rightarrow}_{m\rightarrow\infty}0$ (Wg $|q|<1$)

$\Rightarrow\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |q^m|<\frac{1-q}{|a_1-a_0|}\varepsilon=\tilde{e}\quad\forall\ m\geq n_0$ (beachte $|a_1-a_0|\neq0$)

$\Rightarrow\ |a_n-a_m|\leq|a_1-a_0|\underbrace{q^m}_{|q^m|}\frac{1}{1-q}<\varepsilon\quad\forall\ n,m\geq n_0$ mit $n\geq m\Rightarrow$

$\underbrace{|a_n-a_m|}_{|a_m-a_n|}\leq q^m\frac{a_1-a_0}{|1-q|}\varepsilon<\varepsilon\quad\forall\ n\geq m\geq n_0\Rightarrow(a_n)$ ist Cauchy Folge $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.5}$

(a_n) konvergiert

Sei $a:=\lim_{n\rightarrow\infty}a_n\Rightarrow$ Fehlerabschätzung: $|a-a_m|\leq\frac{q^m}{1-q}|a_1-a_0|\quad\forall\ m\in\mathbb{N}_0$,

denn $|a-a_m|=|\lim_{n\rightarrow\infty}a_n-a_m|=\lim_{n\rightarrow\infty}|a_n-a_m|\leq\frac{q^m}{1-q}|a_1-a_0|$

b) Genügt es, zu fordern, dass $|a_{n+1}-a_n|<|a_n-a_{n-1}|\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Lös: Es genügt nicht $|a_{n+1}-a_n|<|a_n-a_{n-1}|\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$ zu fordern, denn z.B.

$a_n:=\sum_{\nu=1}^{n}1/\nu\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}_0$, also

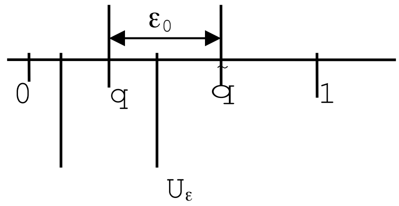
$|a_{n+1}-a_n|=\frac{1}{n+1}<1/n=|a_n-a_{n-1}|\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert, d.h.

(a_n) ist keine Cauchy Folge, (Harmonische Reihe und $\sum_{\nu=1}^{n}1/\nu=\infty$)

A2.2.14 Es sei q>0 und $x_n>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q$

a) Zeige, daß für q<1 die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert

1.Bew: Z.z $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$



Sei $\varepsilon_0>0$ fest mit $\tilde q:=q+\varepsilon_0<1$

(z.B. $\varepsilon_0=\frac{1-q}{2}$ d.h. $q+\frac{1-q}{2}=\frac{\overbrace{1+q}^{<2}}{2}<1$)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbb{N}: \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-q\right|<\varepsilon_0\ \forall\ n\ge n_0$

d.h. $-\varepsilon_0<\frac{x_{n+1}}{x_n}-q<\varepsilon_0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}<q+\varepsilon_0=\tilde q\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow$

$x_{n+1}<\tilde q\, x_n\ \forall\ n\ge n_0 \underset{0<\tilde q<1}{\Rightarrow} 0\le x_n<\underbrace{\tilde q^{\,n-n_0}x_{n_0}}_{=\underbrace{\tilde q^n}_{\to 0} x^{-n_0}x_{n_0}\underset{n\to\infty}{\to}0} \underset{S2.1.3\ 3.)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ldots\ 0<\tilde q<1$

Bew Induktion ab n_0, $\underbrace{\tilde q^n}_{\to 0\,(n\to\infty)}\, q^{-n_0}\, x_{n_0}\ \forall\ n\ge n_0$

*//**S2.1.3** (1255) (a_n), (b_n), (c_n) Folgen aus R: $a_n\to a$, $b_n\to b$, $(n\to\infty)$ und $\alpha\in R$//*
// 3.) $a_n\le c_n\le b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b \Rightarrow c_n\to a$ $(n\to\infty)$ $a_n\to a$, $b_n\to b=a$//

2.Bew: $x_{n+1}<\tilde q\, x_n \underset{\tilde q<1}{<} x_n\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ ist streng monoton fallend und

$\underset{(x_n)_{n=n_0}^{\infty}\text{ nach unten beschr}, x_n>0}{\Rightarrow}$ $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ konvergent. $\underbrace{(1-q)}_{\neq 0}$

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow a=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ Teilfolge konvergiert gegen

Grenzwert $\Rightarrow a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=qa \Rightarrow \underbrace{(1-q)}_{\neq 0}a=0 \underset{q\neq 1}{\Rightarrow} a=0$

b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, falls $q>1$

*//**D2.2.5** (1309) $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw $-\infty$):$\Leftrightarrow$ //*
// $\forall$ $K\in R$ $\exists$ $n_K\in N$ mit $a_n \underset{(\leq)}{\geq} K$ $\forall$ $n\geq n_K$, und man schreibt://
// $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty(-\infty)$ bzw $a_n\to\infty(-\infty)$ $(n\to\infty)$//

//Bem: 3.) Sei $(a_n)\subset R$ und $a_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$. Dann gilt: $a_n\to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|}\to\infty(n\to\infty)$//

1.Bew:Sei $\tilde{x}_n=1/x_n$, $n\in\mathbf{N}$, $\tilde{q}:=1/\underbrace{q}_{¿1}<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n}}_{\frac{x_n}{x_{n+1}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}}=1/q=\tilde{q}<1 \underbrace{\Rightarrow}_{a)}$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{x}_n=0 \underbrace{\Rightarrow}_{D\,2.2.5\ Bem 3} \frac{1}{\underbrace{|\tilde{x}_n|}_{=x_n}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty, \text{ d.h. } \lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton $\wedge$ beschränkt Beh: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//*
*//**D2.2.5** (1309) $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw $-\infty$):$\Leftrightarrow$ //*
// $\forall$ $K\in R$ $\exists$ $n_K\in N$ mit $a_n \underset{(\leq)}{\geq} K$ $\forall$ $n\geq n_K$, und man schreibt://
// $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty(-\infty)$ bzw $a_n\to\infty(-\infty)$ $(n\to\infty)$//
//Bem:2.) Eine monotone Folge ist entweder konvergent oder uneigentlich//
// konvergent//

2.Bew:Wähle $\varepsilon_0>0$ mit $\tilde{q}:=q-\varepsilon_0>1$ (z.B. $\varepsilon_0=\frac{q-1}{2}$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbf{N}: \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-q\right|<\varepsilon_0\ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow -\varepsilon_0<\frac{x_{n+1}}{x_n}-q<\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}>q-\varepsilon_0\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow x_{n+1}>\underbrace{(q-e_0)}_{>1}x_n>x_n\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow (x_n)_{n=n_0}^{\infty}\ \nearrow$$

Ann (x_n) ist nach oben beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ (x_n) konvergiert.

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vgl } a)} a=qa \underbrace{\Rightarrow}_{q\neq 1} a=0$ Widerspruch, da $x_n\geq x_{n_0}>0$ $\forall$ $n\geq n_0 \Rightarrow$

(x_n) ist unbeschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{(x_n)\text{ monot } wachsend}$ $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$ nach Bem 2 **D2.2.5**

c) Belege jeweils durch ein Bsp, dass für $q=1$ die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren bzw. divergieren kann

(.) Sei $x_n:=1$, $n\in\mathbf{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty} 1/1=1=q$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{x_n}_{=1}=1$ d.h.

d.h. x_n konvergiert

(..) Sei $x_n:=n$, $n\in\mathbf{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)=1+0=1$ und x_n divergiert,

da x_n nicht beschränkt.

A2.2.15 $c>0$, $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, $a_0>0$, $a_0^p>c$, $a_{n+1}:=a_n-\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}}=\frac{(p-1)a_n^p+c}{pa_n^{p-1}}>0$.

Zeige, dass $a_n\searrow\sqrt[p]{c}$ $(n\to\infty)$.
Hinweis: Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung erkennt man, dass $a_n^p\geq c$ ist.

Bem:Wegen $a_0>0$ und $a_{n+1}=\frac{(p-1)a_n^p+c}{pa_n^{p-1}}$ sieht man induktiv: $a_n>0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$, insbesondere $a_n\neq 0$.

Bew:Wir zeigen

(.) $a_n\geq\sqrt[p]{c}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$, d.h. (a_n) ist nach unten durch $\sqrt[p]{c}$ beschränkt.

(..) $a_n\searrow$ d.h. $a_{n+1}\leq a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$

(...) (a_n) konv $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt[p]{c}$

Zu(.)Induktion nach n

$n=0$: $a_0^p>\underbrace{c}_{(\sqrt[p]{c})^p}\Rightarrow a_0>\sqrt[p]{c}$

$n\mapsto n+1$: $a_{n+1}^p=(a_n-\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}})^p=a_n^p(1+\underbrace{\frac{c-a_n^p}{pa_n^p}}_{=x})^p\underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli Ungl siehe auch **}}$

$$a_n^p(1+px)=a_n^p(1+p\frac{c-a_n^p}{a_n^p p})=a_n^p+c-a_n^p=c\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Bem unten}}a_{n+1}\geq\sqrt[p]{c}$$

$$* \quad x=\frac{c-a_n^p}{a_n^p p}=\frac{c}{\underbrace{a_n^p p}_{>0}}-1/p>-1/p\underset{p\geq 2}{\geq}-1/2>-1..\text{Vor für Bernoulli ok}$$

Zu (..) $a_{n+1}=a_n-\underbrace{\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}}}_{\geq 0\text{ nach}(.)a_n^p\geq c,\,p\geq 2,\,a_n>0}\leq a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$

Zu(...) $a_n\searrow$ und nach unten beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.1}$ a_n konvergiert

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\underbrace{\Rightarrow}_{a_n\geq\sqrt[p]{c}}a\geq\sqrt[p]{c}>0$, insbesondere $a\neq 0\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$

$$a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(a_n-\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}})\underbrace{=}_{S2.1.2,\,a\neq 0}\lim_{n\to\infty}a_n-\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^p-c}{p\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{p-1}}=$$

$$a-\frac{a^p-c}{pa^{p-1}}\Rightarrow\frac{a^p-c}{pa^{p-1}}=0\Rightarrow a^p=c\Rightarrow a=\sqrt[p]{c}$$

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton $\wedge$ beschränkt Beh: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n$//*

Bem:Wendet man eine andere Version der Bernoulli-Ungl
$((1+x)^n>1+nx$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $n>2, x>-1)$ an, so ergibt sich sogar:
$a_n>\sqrt[p]{c}$ $\forall$ n. und $a_n\downarrow$

A2.2.16 Sei $x_n=\sqrt[n]{x}$ für ein $x\in\mathbb{R}_+$. Zeige : Für $x>1$ ist die Folge (x_n) streng monoton fallend und es gilt immer $x_n>1$, für $x<1$ ist sie streng monoton wachsend und erfüllt $x_n<1$ und für $x=1$ ist die Folge konstant. Insbesondere ist die Folge in jedem Fall monoton und beschränkt, also konvergent.

A2.2.17 Sei $x_n=\sqrt[n]{x}$ für ein $x\in\mathbb{R}_+$. Benutze aus **A2.1.8** b) (1207) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ und um zu zeigen , dass immer $\lim_{n\to\infty} x_n=1$ ist.

A2.2.18 Beweise folgendes Intervallschachtelungsprinzip: Seien $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ mit $a_n\le b_n$ so, daß (a_n) monoton wächst, (b_n) monoton fällt und (b_n-a_n) eine Nullfolge ist. Dann gibt es genau eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ mit $a=\cap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

Lös: [..............[]......] a_n,b_n beschränkt

$a_1\le..\le a_n\le b_n\le...\le b_1$ Grenzwert $\cap$ der Intervalle

A2.2.19 Es sei $\alpha>0$, $a_1:=\sqrt{\alpha}$, $a_{n+1}:=\sqrt{\alpha+a_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Hinweis: Zeige induktiv, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ streng monoton wächst und durch $1+\sqrt{\alpha}$ nach oben beschränkt ist.

Lös:Beh(.) $(a_n)\uparrow$ streng monoton wachsend, d.h. $a_{n+1}>a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

(..) $a_n\le 1+\sqrt{\alpha}\quad\forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n>0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$

(...) a_n konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n=1/2+\sqrt{\alpha+1/4}=\dfrac{1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$

Bew zu(.) Induktion nach n

$n=1: a_1=\sqrt{\alpha}<\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\alpha+a_1}=a_2$

$n\mapsto n+1: a_{n+2}=\sqrt{\alpha+\underbrace{a_{n+1}}_{>a_n:IndHyp}}>\sqrt{\alpha+a_n}=a_{n+1}$

Bew zu(..) Induktion nach n

$n=1: a_1=\sqrt{\alpha}\le 1+\sqrt{\alpha}$

$n\quad n+1: a_{n+1}=\sqrt{\alpha+a_n}$

$\underbrace{\le}_{IH: a_n<1+\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha+1+\sqrt{\alpha}}\le\sqrt{\underbrace{\alpha+1+2\sqrt{\alpha}}_{(\sqrt{\alpha}+1)^2}}=1+\sqrt{\alpha}$

Bem: Man hätte sogar $a_n<1+\sqrt{\alpha}\quad\forall\ n$ zeigen können

Bew zu(...) Da (.) $a_n\nearrow$ und (..) nach oben beschränkt $\overset{S2.2.2}{\underset{S2.2.3}{\Rightarrow}}$ konvergiert (a_n)

Sei $a:=\lim_{n\to\infty} a_n\Rightarrow a=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\alpha+a_n}\underbrace{=}_{A2.1.4}\sqrt{\lim_{n\to\infty}(\alpha+a_n)}$

$=\sqrt{\alpha+a}\Rightarrow a^2=\alpha+a\Rightarrow\underbrace{a^2-a+(1/2)^2}_{(a-1/2)^2}=\alpha+(1/2)^2\Rightarrow$

$|a-1/2|=\sqrt{\alpha+1/4}\Rightarrow a=1/2+\sqrt{\alpha+1/4}$ <u>oder</u> $\underbrace{\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}}}_{\underbrace{<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}}=0}_{Widerspruch\ zu\ \alpha>0}}\ \underbrace{\Rightarrow}_{a\ge a_1=\sqrt{\alpha}>0}$

$a=1/2+\sqrt{\alpha+1/4}=\dfrac{1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$

A2.2.20 Berechne mit dem Taschenrechner jeweils a_4, b_4 beim AGM Verfahren für die Startwerte a=1, b=3 bzw a=2, b=10

Lös:Startwerte $a_0=a$, $b_0=b$ mit $0<a\neq b$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$,

$n\in\mathbb{N}_0$.

(.)a=1, b=3:

n	0	1	2	3	4
a_n	1	$\sqrt{3}\approx$1,732050808	1,861209718	1,863616006	1,863616784
b_n	3	2	1,866025404	1,863617561	1,863616784

(..)a=2, b=10

n	0	1	2	3	4
a_n	2	$\sqrt{20}\approx$4,472135955	5,180040129	5,207978710	5,208016382
b_n	10	6	5,236067978	5,208054054	5,208016382

A2.2.21 Zeige für ein beliebiges $c\in\mathbb{R}_+$ ist

$1\leq(1+\frac{c}{n})^n=\sqrt[n]{(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}}\leq\sqrt[n]{\exp(c)}$. Folgere, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n=1$.

//S1.5.6 (715) $x\in R$, $x\geq-1$, $n\in N$, $(1+x)^n\geq 1+nx$, $=$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//
//S2.1.3 (1255) (a_n), (b_n), (c_n) Folgen aus R: $a_n\to a$, $b_n\to b$, $(n\to\infty)$//
// 3.) $a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b$ $\Rightarrow$ $c_n\underbrace{\to}_{n\to\infty}a$ $a_n\underbrace{\to}_{n\to\infty}a$, $b_n\underbrace{\to}_{n\to\infty}b=a$//

Lös: $c\geq0$, $\frac{c}{n}\geq0$ $\Rightarrow$ $1+\frac{c}{n}>1$ $\Rightarrow$ $(1+\frac{c}{n})^n\geq1\underbrace{>}_{!!!}0$, insbesondere $(1+\frac{c}{n})^n>0$

$\alpha>0$ $\Rightarrow$ $\alpha=\sqrt[n]{\alpha^n}$ $\Rightarrow$ $(1+\frac{c}{n})^n=\sqrt[n]{(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}}$,

$x_{n^2}=(1+\frac{c}{n})^{n^2}$ Teilfolge von $x_n=(1+\frac{c}{n^2})^n$.

\# $\frac{c}{(n+1)^2}>-1$ $\Rightarrow$ $c>-(n+1)^2$ $\Rightarrow$ $\overbrace{\underbrace{-c}_{>0}}^{<0}<(n+1)^2$ richtig $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

\# $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(1+\frac{c}{(n+1)^2})^{n+1}}{(1+\frac{c}{n^2})^n}\underbrace{\geq}_{S1.5.6}\frac{1+\frac{c}{(n+1)}}{\frac{(n^2+c)^n}{n^{2n}}}=\frac{n^{2n}+\frac{n^{2n}c}{(n+1)}}{(n^2+c)^n}\geq\frac{n^{2n}+\frac{n^{2n}c}{(n+1)}}{n^{2n}}=1+\frac{c}{n+1}>1$

$x_n\underbrace{\uparrow}_{S2.3.1}$ für $c\neq0$ und $n>-c$ (d.h. $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, da $c\in\mathbb{R}_+$ $\Rightarrow$ $-c\leq0$),

für $c=0$, $x_n\equiv1$ konstant, daher $x_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\exp(c)$.

$\nearrow$von $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}}\leq\sqrt[n]{\exp(c)}\underbrace{\to}_{n\to\infty}1\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n=1$

A2.2.22 Vor: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n nicht negativ: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

Aussage: $(a_n)_{n=1}^{\infty}, \searrow \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n*a_n=0$

*//**S2.2.5**(1307)Konvergenzkriterium von Cauchy*
// (ist notwendig und hinreichend).
//Eine komplexe Folge $(z_n)\subset \mathbb{C}$ ist <u>genau dann</u> konvergent, wenn sie das
//Cauchy Kriterium erfüllt:
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)\ \Leftrightarrow$
//Re(z_n) und Im(z_n) sind Cauchyfolgen.

Lös: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon): n*|a_n-0|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$. ε baf: $\sum_{v=1}^{\infty} a_v<\infty \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.5}$

$\exists\ n_1\in\mathbb{N}: \sum_{v=n_0+1}^{n} a_v<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\geq n_1$.

$\sum_{v=1}^{\infty} a_v<\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow \exists\ n_2\in\mathbb{N}: |a_n-0|<\frac{1}{n_1}\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\geq n_1$.

Wähle $n_0:=\max\{n_1,n_2\} \Rightarrow$

$|n*a_n-0|=(n-n_1)a_n+n_1a_n=(\sum_{v=n_0+1}^{n} \underbrace{a_n}_{\leq a_v})+n_1a_n\leq(\underbrace{\sum_{v=n_0+1}^{n} a_v}_{\underset{n\geq n_1}{<}\frac{\varepsilon}{2}})+\underbrace{n_1a_n}_{\underset{n\geq n_2}{<}}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$.

A2.2.23 Vor: $x_n,x\in\mathbb{R}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent,

$\lim_{n\to\infty} x_n=x$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}: y_n=x_{\phi(n)}$, $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ beliebig

Eigenschaft von φ damit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent? Andernfalls
eine Abb φ damit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ divergent?

a) φ surjektiv

Lös: Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}=1,0,0,\ldots \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$ konvergent,

Bsp: $\varphi(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}n, \text{falls } n \text{ gerade}\\ 1, \text{falss } n \text{ ungerade}\end{cases}$ surjektiv, da $\forall\ m\in\mathbb{N}$ 2m Urbild ist $\Rightarrow$

$(y_n)_{n=1}^{\infty}=x_1,x_1,x_1,x_2,x_1,x_3,x_1,x_4,\ldots=1,1,1,0,1,0,1,0,\ldots$ ist divergent

b) φ injektiv

Lös: $\lim_{n\to\infty}(x_n)_{n=1}^{\infty}=x \Rightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n\geq n_0: x_n\in U_\varepsilon(x)$.

$N=\{n|\varphi(n)\leq n_0\} \underbrace{\Rightarrow}_{\phi \text{ injektiv}} N=\varphi^{-1}(1,..\ n_0)$ endlich $\Rightarrow \exists\ m_0: \varphi(n)\geq n_0\ \forall\ n>m_0 \Rightarrow$

$y_n=x_{\phi(n)}\in U_\varepsilon(x)\ \ \forall\ n>m_0 \Rightarrow y_n$ konvergent gegen x, $\lim_{n\to\infty} y_n=x$.

c) φ konstant

Lös: $\varphi(n)=m \Rightarrow y_n=x_m$ konstant $\Rightarrow y_n$=konvergent, $\lim_{n\to\infty} y_n=x_m$!!!

d) $\varphi\ \uparrow$

Lös: $\varphi\ \uparrow\ \Rightarrow \varphi$ injektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{b)} (y_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent

A2.2.24 $a_n:=1-\sqrt{1-a_n}$; Beweise $a_n=\frac{1}{2}$

Bew: Wohldefiniertheit

$0\leq a_n\leq 1$, denn $0\leq a_1=\frac{1}{2}\leq 1, 0\leq a_n\leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-0}$

$0=1-\sqrt{1-0}\leq 1-\sqrt{1-a_n}=a_{n+1}\leq 1-\sqrt{1-1}=1 \Rightarrow a_n$ wohldefiniert und beschränkt

a_n monoton fallend, denn $a_n\geq a_{n+1}$:

A2.2.25 $a_n = \dfrac{1}{((-1)^{n+1} - 2)^n}$

a) a_n=beschränkt?

Lösung: (a_n) enthält Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k \in N}$, $(a_{2k})_{k \in N}$.