A2.3.1 Zeige: $\frac{1}{2(n+1)} \le (e-(1+1/n)^n) \le \frac{e}{n} \quad \forall\ n\in N$

*//**S1.5.6** (715) $x\in R,\ x\ge -1,\ n\in N,\ (1+x)^n \ge 1+nx$, $=\ \Leftrightarrow\ x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//*

//S2.3.8 (1402) $x\in R \wedge x\ne 0 \wedge n>-x \wedge x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in N$: $(x_n)\ \uparrow$ //

//S2.3.9 (1403) $b_n:=(1+1/n)^{n+1} \searrow$ //

Bew: $0\le e-(1+1/n)^n \le \underbrace{(1+1/n)^{n+1}}_{>e\ldots S2.3.9} - (1+1/n)^n = \underbrace{(1+1/n)^n}_{\le e\ldots S2.3.8}(1+\frac{1}{n}-1) \le e/n$ und

$$e-(1+1/n)^n \ge \underbrace{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}_{<e\ldots S2.3.8} - (1+1/n)^n = (1+1/n)^n\left(\frac{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}{(1+1/n)^n}-1\right) =$$

$$\underbrace{(1+1/n)^n}_{\underset{S2.3.8}{\ge}(1+1/1)^1}\left(\left(\frac{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2}{\frac{n+1}{n}}\right)^n-1\right) \ge 2\left(\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2}\frac{n}{n+1}\right)^n-1\right) =$$

$$2\left(\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}\right)^n-1\right) = 2\left(\left(1+\underbrace{\frac{1}{4n^2+4n}}_{>-1}\right)^n-1\right) \underset{S1.5.6}{\ge} 2\left(1+\frac{n}{4n^2+4n}-1\right) =$$

$$2\frac{1}{4n+4} = \frac{1}{2(n+1)}$$

A2.3.2 Zeige, dass die Expotentialfunktion streng monoton wachsend ist. $x<y \Rightarrow e^x<e^y \Rightarrow 1<e^y e^{-x}=e^{y-x}$

A2.3.3 Zeige $\frac{1}{(1+1/n)^{n+1}} = (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}\ \forall\ n\in N$ und schließe daraus, dass die Folge $(1+1/n)^{n+1}$ monoton fallend gegen e strebt.

A2.3.4

a) Zeige, dass die Expotentialfunktion exp: $R\to(0,\infty)$ streng monoton wachsend ist

b) Zeige $\exp(x)\ge 1+x\ \forall\ x\ge 0$, und schließe daraus, daß die Funktion exp nach oben unbeschränkt ist.

c) Benutze $\exp(x)\exp(-x)=1$, um zu zeigen: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ K\in R,\ \forall\ x<-K: \exp(x)<\varepsilon$

d) Skizziere den Graphen von exp und log und zeige $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$

A2.3.5 Zeige: $|e-(1+1/n)^n| \le e/n \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$.

*//**S2.3.8** (1402) $x\in R \wedge x\neq 0 \wedge n>-x \wedge x_n=(1+x/n)^n \ \forall\ n\in N$: $(x_n)\ \uparrow$ //*
*// **2.3.9** (1403) $b_n:=(1+1/n)^{n+1} \searrow$ //*
//S2.3.10 (1403) $[(1+1/n)^n,(1+1/n)^{n+1}]$ $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=:e$, $n\in N$//

Bew: $|e-(1+1/n)^n|=e-(1+1/n)^n \underbrace{\le}_{S2.3.9,S2.3.8} (1+1/n)^{n+1}-(1+1/n)^n=\underbrace{(1+1/n)^n}_{\le e\, S2.3.8,S2.3.5}\underbrace{[(1+1/n)-1]}_{=1/n}$

$\le e/n \ \forall\ n\in\mathbb{N}$

//#S2.3.5 (1401) $g>1$, $a>0$, $g^x=a \Leftrightarrow \exists_1\ x=\underbrace{{}^g\log a}_{Definition}$ $a\in R$//

//#Bem: 1.) ${}^g\log 1=0$//
// 2.) $x\in(0,+\infty)$, $x\mapsto {}^g\log x\ \uparrow$ aus 2.3.4 Fall $a>1$//
// 3.) ${}^g\log a^\rho=\rho * {}^g\log a$//

A2.3.6 Zeige:

a) $0<a<b \Rightarrow \begin{cases} a^x<b^x, \text{falls } x>0 \\ a^x>b^x, \text{falls } x<0\end{cases}$

//S2.3.20 (1452) 2.) $0<x<y \Leftrightarrow -\infty<\log x<\log y$; $x,y\in R$)//
//S2.3.18 (1409) 8.) (1412) $x<y \Leftrightarrow \exp(x)<\exp(y)$//

Bew: (.) $0<a<b$, $x>0$: $a<b \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 2.)} \log a<\log b \underbrace{\Rightarrow}_{x>0}$

$x\log a<x\log b \underbrace{=}_{S2.3.18\ 8.)} \underbrace{e^{x\log a}}_{a^x}<\underbrace{e^{x\log b}}_{b^x}$

(..) $0<a<b$, $-x>0 \underbrace{\Rightarrow}_{(.)} \underbrace{a^{-x}}_{(a^x)^{-1}}<\underbrace{b^{-x}}_{(b^x)^{-1}} \Rightarrow a^x>b^x$

b) $x<y \Rightarrow \begin{cases} a^x<a^y, \text{falls } a>1 \\ a^x>a^y, \text{falls } 0<a<1\end{cases}$

*//**S2.3.20** (1452) 1.) $\log e^x=x\ \forall\ x\in R$, $e^{\log y}=y\ \forall\ y>0$. $\log 1=\log e^0=0$//*
//2.) $0<x<y \Leftrightarrow -\infty<\log x<\log y$; $x,y\in R$//
//#Bem: $0<u<1<v \Rightarrow \log 0<\log u<\underbrace{\log 1}_{=0}<\log v \Rightarrow \underbrace{\to-\infty}_{u\to 0}<\log u<\underbrace{\log 1}_{=0}<\log v<\underbrace{\to\infty}_{v\to\infty}$ //
*//**S2.3.18** (1409) 8.) (1412) $x<y \Leftrightarrow \exp(x)<\exp(y)$ (strenge Monotonie)//*

Bew: (.) $x<y$, $a>1 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 2.)} \log a>\underbrace{\log 1}_{=0\, S2.3.20\, 1.)}=0 \underbrace{\Rightarrow}_{x<y} x\log a<y\log a \underbrace{=}_{S2.3.18\ 8.)} \underbrace{e^{x\log a}}_{a^x}<\underbrace{e^{y\log a}}_{a^y}$

(..) $x<y$, $0<a<1 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 2.)} \log a<\underbrace{\log 1}_{=0\ S2.3.20\, 1.)}=0 \underbrace{\Rightarrow}_{x<y} x\log a>y\log a \underbrace{=}_{S2.3.18\ 8.)}$
$\underbrace{e^{x\log a}}_{a^x}>\underbrace{e^{y\log a}}_{a^y}$

A2.3.7 Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme ggf den Grenzwert:

a) $a_n=\left(\frac{n+7}{n-15}\right)^{2n}$ ... = $\left(\frac{1+7/n}{1-15/n}\right)^{2n}$ = $\left[\frac{(1+7/n)^n}{(1-15/n)^n}\right]^2 \underset{n\to\infty}{\to} \left(\frac{e^7}{e^{-15}}\right)^2 = e^{44}$

b) $a_n=\sqrt[n]{n^\alpha}$ für $\alpha\in\mathbb{R}$ (fest)

... $n^{\frac{\alpha}{n}}=(n^{\frac{1}{n}})^\alpha=(\sqrt[n]{n})^\alpha \underset{n\to\infty}{\to} 1^\alpha=1$, da $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, denn die Potenzfunktion ist stetig, d.h. wenn $b_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ mit $b_n,b>0\ \forall\ n$, so $(b_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\to} b^\alpha$...Bew:

$(b_n)^\alpha=\exp(\alpha*\log b_n) \underset{n\to\infty}{\to} \exp(\alpha*\log b) \underset{n\to\infty}{\to} b^\alpha$

*//**S2.3.20**(1452) 7.) $a,a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \log a_n \underset{n\to\infty}{\to} \log a$//*

*//**S2.3.18**(1409)10.)(1412) $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \exp(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} \exp(a)$//*

Bew: $(b_n)^\alpha=\exp(\alpha \underbrace{\log b_n}_{\to\log b(\text{ S2.3.20 7.})}) \underbrace{\to}_{S2.3.18\ \ 10.)} \exp(\alpha\log b)=b^\alpha$

$a_n=\sqrt[n]{n^\alpha}=(n^\alpha)^{\frac{1}{n}}=n^{\alpha\frac{1}{n}}=(n^{\frac{1}{n}})^\alpha=1^\alpha=\exp(\alpha(\log 1)=\exp(0)=1$

c) $a_n=(¿_k^n)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ für $k\in\mathbb{N}_0$ und $\lambda>0$ (fest).

Lös: $a_n=\underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}}_{\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{1}\underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\frac{n-1}{n}=1-1/n\to1}\underbrace{\frac{\dots(n-k+1)}{\dots.n}}_{\to1}}$ $(1-\lambda/n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{(1+\frac{-\lambda}{n})^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1^{-k}=1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$a_n=\underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}}_{\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{1}\underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\frac{n-1}{n}=1-1/n\to1}\underbrace{\frac{\dots(n-k+1)}{\dots.n}}_{\to1}}$ $(1-\lambda/n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to1}\dots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to1}\underbrace{(1-\lambda/n)^k}_{\to1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

Bem: Diese Aussage ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich. Approximation der Binominalverteilung durch die Poissonverteilung allerdings in etwas allgemeinerer Form:

$p_n\in(0,1)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(np_n)=\lambda>0 \Rightarrow \binom{k}{n}(1-p_n)^{n-k} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

A2.3.8 Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert: $a_0:=2$, $a_{n+1}:=a_n-\frac{\log a_n}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Zeige, dass (a_n) konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Hinweis: zeige zuerst $a_n\ge1\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

A2.3.9 Ist die durch $a_1:=1$, $a_{n+1}=\frac{2+a_n}{1+a_n}$ rekursiv definierte Folge a_n konvergent?

A2.3.10 Vor: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$**=**$a>0$. Beweise: $\lim\limits_{n\to\infty}\log a_n$**=**$\log a$

//**S2.3.20**(1452) Eigenschaften des Logarithmus//
//6.)(.) $1-1/x\le\log x\le x-1\ \forall\ x>0$.//

Bew: Vor $\Rightarrow \frac{a_n}{a} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 1 \underbrace{\Rightarrow}_{2.3.20\ 6.)} \underbrace{1-\frac{a_n}{a}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n\rightarrow\infty}} \leq \log \frac{a_n}{a} \leq \underbrace{\frac{a_n}{a}-1}_{\substack{\rightarrow 0 \\ n\rightarrow\infty}} \Rightarrow \log \frac{a_n}{a} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$ d.h.

$\log a_n - \log a \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0 \Rightarrow \log a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} \log a$