A3.1.1 Zeige: zu jeder Folge $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ existiert genau eine Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ mit

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,\ n\geq 1$$

Lös:Geg $S_n=\sum_{k=p}^{\infty} \underbrace{a_k}_{S_n-S_{n-1}}$ $(n\geq p+1)$, $S_p=a_p$

A3.1.2 Verwandle die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ in eine Teleskopreihe.

Zeige dadurch ihre Konvergenz und berechne ihren Wert.

Lös:Tip:$a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}$

A3.1.3 $(a_n)_{n=1}^{\infty}\searrow$, $a_n\geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeige: $\lim_{n\to\infty} na_n=0$

//**S3.1.2**(1602) Vor:(z_ν) und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent. *2.)* $z_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} 0$//

//Bem:1.) Sei $(z_n)\subset \mathbb{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergiert* $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

// *mit* $\left|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu\right|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$. *(d.h.* $|S_n-S_m)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$*).//*

Bew: Zu zeigen: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}:|na_n-0|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$. Sei $\varepsilon>0$ baf

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{a_\nu}_{\underset{S3.1.2\ 2.)}{\Rightarrow} 0(\nu\to\infty)}<\infty \underset{S3.1.2}{\Rightarrow} \exists\ n_1\in\mathbb{N}\ \ \sum_{\nu=n_1+1}^{n} a_\nu<\varepsilon/2<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_1+1 \underset{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu<\infty\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0}{\Rightarrow}$$

* $\exists\ n_2\in\mathbb{N}\ \ a_n=|a_n-0|<\frac{1}{n_1}\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\geq n_2$.

Wähle $n_0=\max\{n_1+1,n_2\}\Rightarrow |na_n-0|=na_n=(n-n_0)a_n+n_0a_n=$

$$\left(\sum_{\nu=n_0+1}^{n} \underbrace{a_n}_{\leq a_\nu}\right)+n_0a_n\leq\left(\underbrace{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu}_{<\frac{\varepsilon}{2},da\ \nu\geq n_0\geq n_1+1}\right)+\underbrace{n_0a_n}_{<\frac{\varepsilon}{2}da\ n\geq n_2\ \forall n>n_0}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0.$$

\# * genügt hier nicht :

\# $\exists\ n_0(\varepsilon)>n_1$:und $n>n_0$: $|na_n-0|=na_n=(n-n_0)a_n+n_0a_n=$

$$\left(\sum_{\nu=n_0+1}^{n} \underbrace{a_n}_{\leq a_\nu}\right)+n_0a_n\leq\left(\underbrace{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu}_{<\frac{\varepsilon}{2},da\ \nu\geq n_0\geq n_1+1}\right)+\underbrace{n_0a_n}_{<\frac{\varepsilon}{2}da\ a_n\underset{n\to\infty}{\to}0}<\varepsilon.?$$

A3.1.4 Zeige die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$. Diese Reihe heißt auch alternierende harmonische Reihe.

A3.1.5 Sei $a=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1)$. Wie groß muß n mindestens sein,

damit $|a-\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k+1)|<10^{-6}$ gesichert ist?

Tip:$S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}$

A3.1.6 Benutze Abschätzung sin, cos siehe oben, D2.1.1 Bem 7 um zu zeigen, dass $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\cos x - 1}{x^2}=-1/2$.

Untersuche auch den linksseitigen Grenzwert.

// *7.) Sandwhichsatz*//

// *Seien* $(x_n^+),(x_n^-)$ *und* (y_n) *Folgen in* $\mathbb{R}$. *Dann gilt* //

// $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^- = x$ *und* $x_n^- \le y_n \le x_n^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.//

Tip: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+q} a_k\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+q} |a_k| \le \varepsilon$

A3.1.7 Bestimme den Wert der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1/2)^k$

Lös:$=\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1/2)^k - 1 = \frac{1}{1-1/2} - 1 = 1$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{k})$

Lös: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{2k+1} - \sqrt{k})}_{\ge 0}$. $S_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{k}) \uparrow$.

$$\sqrt{2k+1} - \sqrt{k} = \frac{2k+1-k}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{2+\frac{1}{k}} + 1} \xrightarrow{k\to\infty} \infty \ne 0$$

S_k unbeschränkt $\Rightarrow S_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Lös:$=\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\underbrace{\frac{1}{k}}_{b_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{b_{k+1}}) \xrightarrow{\text{Teleskops}, k\to\infty} 1$

A3.1.8 Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Lös: $\frac{1}{k}$ fallende 0 Folge… Leibniz..a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ konvergent

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k(k+3)}}$

Lös:.. $\frac{1}{\sqrt[3]{k(k+3)}}$ monoton fallend $\sqrt{k(k+3)} \ldots \sqrt{\ } \ldots \sqrt[3]{\frac{1}{k(k+3)}} \searrow 0$ Folge..

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ konvergent

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k^{\frac{1}{2}(1+(-1)^k)}}$

Lös:…$=(1/1-1/2^2)+(1/3-1/4^2)+(1/5-1/6^2)+\ldots$

alternierend…für Leibnizkrit erforderlich Vor:$|a_k|\searrow$

$|a_k|$: $1,\ 1/4,\ 1/3,\ 1/16,\ 1/5,\ \ldots$

$|a_k|<|a_{k+1}|$?: $|a_{2j}|=\frac{1}{(2j)^2}$, $|a_{2j+1}|=\frac{1}{(2j+1)}$,

Beh $\frac{1}{(2j)^2}<\frac{1}{(2j+1)} \Leftrightarrow 2j+1<4j^2 \ldots 4j^2=2j2j \underset{j\geq1}{\geq} 2j2>2j+1 \Rightarrow |a_k|\uparrow$

Beh Reihe bestimmt divergent gegen ∞.

Betrachtung Folge der Partialsummen:

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k^{\frac{1}{2}(1+(-1)^k)}} = \sum_{j=1,\ k=2j,\ k=2j-1}^{n} \left(\frac{1}{(2j-1)}-\frac{1}{(2j)^2}\right)$$

$$S_{2n+1}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{(2j-1)}-\frac{1}{(2j)^2}\right)+\frac{1}{\underbrace{(2n+1)}_{\to 0\,(n\to \text{¥})}}$$

Noch zu zeigen: $S_{2n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$

Beh $\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{(2j)^2}>\frac{1}{4j} \Leftrightarrow \frac{1}{2j-1}>\frac{j+1}{4j^2} \Leftrightarrow \frac{2j-1}{(2j-1)^2}>\frac{j+1}{(2j)^2}$, denn

$2j-1<2j \Rightarrow \frac{1}{(2j-1)^2}>\frac{1}{(2j)^2}$, $2j-1>j+1\ \forall\ j\geq3$,

$S_{2n}>\frac{1}{4}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ oder $S_{2n}=\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}}_{\infty}-\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j}\right)^2}_{konv}$