A3.5.1 Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

//S3.5.4 Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $a_n \neq 0 \ \forall \ n \geq n_0$ (fast alle), $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

// Beh:In S3.5.2 gilt $R=\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

//S2.3.18(1408) 11.)(1412)Für $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ gilt immer $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$ //

Lös:$a_n=n!$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \underset{S3.5.4}{\Rightarrow}$ $R=\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$ konvergent für z=0

(oder mit Cauchy Hadamar $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1/\infty = 0$, Da nach **S2.3.18** 11.)

gilt $\#1 \underset{n\to\infty}{\leftarrow} \sqrt[n]{e} < \frac{e}{n}\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{ne} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1\#$ $\Rightarrow$ $\frac{e}{n}\sqrt[n]{n!} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 1$, also $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\log n}{n}} z^n$

*//**S2.3.8** (1402)$x \in \mathbb{R}$ ˅ $x \neq 0$ ˅ $n > -x$ ˅ $x_n = (1+x/n)^n$ $\forall$ $n \in N$: (x_n) $\uparrow$ //*

*//**S2.3.21**(1459)Wichtige Grenzwerte 3.) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}} = 0$, $\alpha > 0$//*

Lös:$a_n = n^{\frac{\log n}{n}}$ $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{|a_n|} = n^{\frac{\log n}{n^2}} = \exp(\log n^{\frac{\log n}{n^2}}) = \exp(\frac{\log n}{n^2} \log n) =$

$\exp((\frac{\log n}{n})^2) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \exp(0^2) \underset{n\to\infty}{=} 1.$

Da $\frac{\log n}{n} \overbrace{\underset{n\to\infty}{\rightarrow}}^{S2.3.21\ 3.)} 0$ und exp ist monoton (S2.3.8) $\Rightarrow$ $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1/1 = 1$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n}$ #= $\underbrace{3^0}_{a_0}\ \underbrace{z^{k=4*0=0}}_{z^0} + \underbrace{0}_{a_1} * z^{k=1} + \underbrace{0}_{a_2} * z^{k=2} + \underbrace{0}_{a_3} * z^{k=3} + \underbrace{3^1}_{a_4}\ z^{k=4*1} + \ldots$ #

//**S3.5.2**(2001) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \textit{konvergiert absolut } \forall z \in C \textit{ mit } |z-z_0| < R \\ \textit{divergiert} \quad \forall z \in C \textit{ mit } |z-z_0| > R \end{cases}$, $R = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ //

Lös:= $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \begin{cases} 3^k \text{ falls } n = 4k \text{ mit } k \in N_0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

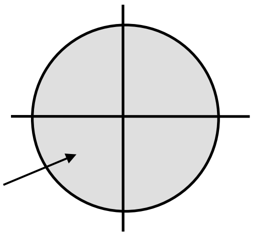
1.Möglichkeit mit Cauchy Hadamard:

$\sqrt[4k]{|a_{4k}|} = (3^k)^{1/4k} = 3^{1/4}$ und $\sqrt[4k+1]{|a_{4k+1}|} = \sqrt[4k+2]{|a_{4k+2}|} = \sqrt[4k+3]{|a_{4k+3}|} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt[n]{|a_n|}$ hat genau die Häufungswerte $3^{1/4}$ und 0 $\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 3^{1/4} \Rightarrow$

$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3^{1/4}} = 3^{-1/4}$ Cauchy Hadamard **S3.5.2**

2.Möglichkeit geom. Reihe



$3^{-1/4}$

$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z^4)^n \Leftrightarrow$

konvergiert absolut $|3z^4| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3^{-1/4}$

und div $\Leftrightarrow |z| > 3^{-1/4} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n}$ hat $R = 3^{-1/4}$ abs konv

3.Möglichkeit:mit Substitution $w = z^4$.Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n w^n$

hat nach Cauchy Hadamard KR=1/3, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n w^n$ konvergiert

absolut für $|w| < 1/3$ und divergiert für $|w| > 1/3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \underbrace{z^{4n}}_{(z^4)^n}$

konvergiert absolut für $|z^4| < 1/3$ d.h. $|z| < 3^{-1/4}$ und div für

$|z^4| > 1/3$ d.h. $|z| > 3^{-1/4} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n}$ hat KR $3^{-1/4}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n$

*//**S2.1.3** (1254) $(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus R: $a_n \to a, b_n \to b, (n\to\infty)$ und $\alpha \in R$//*

//3.) $a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle $n \in N$ und $a=b \Rightarrow c_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a,\ a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a,\ b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} b=a$//

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, $b_n \ge 0$, $n \in N_0$.//*

//2.) $|z_n| \le b_n$, $\forall\ n \ge n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent//

Lös: $a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ (=cosh(n))

1.Möglk: $\underbrace{\frac{e}{\sqrt[n]{2}}}_{\to \frac{e}{1} (n\to\infty)} = \sqrt[n]{\frac{e^n}{2}} \le \sqrt[n]{|a_n|} \underbrace{\le}_{da\ n\ge 0, e^{-n} \le e^n} \sqrt[n]{\frac{e^n + e^n}{2}} = e \underbrace{\Rightarrow}^{S2.1.3\,3.)} \sqrt[n]{|a_n|} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1/e$$

2. Möglk: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{2} z^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{\sqrt[n]{2}} = e \Rightarrow$ R=1/e? und

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2} z^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e^{-1}}{\sqrt[n]{2}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1/e \Rightarrow R=e$?

$\Rightarrow$ hat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n \ldots R \ge 1/e$?, $\sqrt[n]{\frac{e^n + e^{-n}}{2}} \ge \sqrt[n]{\frac{e^n}{2}}$

obige 2 Reihen abs konv für $|z|<1/e$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für $|z|<1/e$.

Annahme: $R>1/e \Rightarrow \exists\ \tilde{z} \in \mathbb{C}$: $1/e<|\tilde{z}|<e$ so, dass

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{z}^n$ absolut konvergiert $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^n}{2}}_{a_n - \frac{e^{-n}}{2}} \tilde{z}^n$ abs konvergent, da $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-n}}{2}}_{\frac{e^n + e^{-n}}{2} - \frac{e^n}{2}} \tilde{z}^n$ konvergiert,

Widerspruch, weil $|\tilde{z}|>1/e$... $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^n}{2}}_{a_n - \frac{e^{-n}}{2}} \tilde{z}^n$ R=1/e hat

Genauer: Annahme $\exists\ z^* \in \mathbb{C}$, $|z^*|>1/e$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^{-n}}{2} (z^*)^n$ konv abs

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{z}^n$ konvergiert absolut $\forall\ |\tilde{z}| \le |z^*|$, insbesondere

$\exists\ \tilde{z} \in \mathbb{C}$: $1/e<|\tilde{z}|<e$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^{-n}}{2} \tilde{z}^n$ konv abs

e) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$ für $a\in\mathbb{C}$ (fest)

//**S3.5.4**(2004) Vor: Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $a_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0$ (fast alle), $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

// Beh: In **S3.5.2** gilt $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

Lös: $a_n=a^{n^2}$ mit $a\in\mathbb{C}$ fest. $\sqrt[n]{|a_n|}=|a|^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \begin{cases} 0, \text{falls } |a|<1 \\ 1, \text{falls } |a|=1 \\ \infty, \text{falls } |a|>1 \end{cases} \Rightarrow$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}=\begin{cases} \infty, \text{falls } |a|<1 \\ 1/1=1, \text{falls } |a|=1 \\ 0, \text{falls } |a|>1 \end{cases}$$ oder mit **S3.5.4**

1.Fall: $a=0$, $R=\infty$, klar, da $a_n=0\ \forall\ n$

2.Fall: $a\neq 0$: $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}}\right|=|a|^{-2n-1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \begin{cases} \infty, \text{falls } |a|<1 \\ 1, \text{falls } |a|=1 \\ 0, \text{falls } |a|>1 \end{cases} \underset{S3.5.4}{\Rightarrow}$

$$R=\begin{cases} \infty, \text{falls } |a|<1 \\ 1/1=1, \text{falls } |a|=1 \\ 0, \text{falls } |a|>1 \end{cases}$$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} 2^{-n} z^n$

Lös: $a_n=(-1)^n\binom{1/2}{n}2^{-n}$. $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{\binom{1/2}{n}2^{-n}}{\binom{1/2}{n+1}2^{-n-1}}\right| \underset{*}{=} \frac{n+1}{\left|\frac{1}{2}-n\right|}\frac{1}{2^{-1}}=2\frac{n+1}{n-\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 2$

$\underset{S3.5.4}{\Rightarrow}$ R=2

$$*\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n+1}{\alpha-n}=\binom{\alpha}{n+1}\frac{n+1}{\alpha-n}$$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!}z^n$.

Lös: $a_n=\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(2n-1)^{2n-1}\cdot 2^{2n+2}(2n+2)!}{2^{2n}(2n)!\,(2n+1)^{2n+1}}=$

$$\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}2^2\underbrace{\frac{2n+2}{2n-1}}_{\to 1}=4\underbrace{\frac{(1-\frac{1}{2n})^{2n}}{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}}_{\to\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}}\to 4e^{-2} \underset{S3.5.4}{\overset{n\to\infty}{\Rightarrow}} R=4e^{-2}$$

(Formeln (1) $1/R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (2) $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $a_n\neq 0$, $n\geq m$)

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \log(n+1)x^n$

Lös: (2) $\frac{\log(n)}{\log(\underbrace{n+1}_{n(1+1/n)})} = \frac{\log(n)}{\log(n) + \underbrace{\log(1+1/n)}_{\text{beschränkt}}} = \frac{1}{1 + \frac{\log(1+1/n)}{\log(n)}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+3(-1)^n)^{-n}x^n$. Lös: (1) 1

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+½+\ldots+1/n)x^n$. Lös: (2) 1

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(4+(-1)^n)^{3n}}$

Lös: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{a_n} \leq 0$. $1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R_x = \sqrt{R_y}$

$3\sqrt{3} = \sqrt{3^3} \ldots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{a_n} \leq 0 \ \ldots$

(1) $1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R_x = \sqrt{R_y}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} (3\cdot 7^n + 5\cdot 2^{2n+6})z^n$

l) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \pi^n z^{2n}$.

m) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$.

Lösung: $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k-1}_{a_k} x^k$, $|a_k| = k+1$, $\sqrt[k]{k+1} \underset{k\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} = 1/1 = 1$

n) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$.

Lösung: $\sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{k!}\right|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k!}} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \Rightarrow R = +\infty$, d.h konvergent auf $\mathbb{R}$.

o) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $a_{2\ell-1} = 0$, $a_{2\ell} = 2^l$ für $\ell \in \mathbb{N}$.

Lösung: $\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \sqrt[2l]{2^l}, k = 2l, l \in N \\ 0, k = 2l-1, l \in N \end{cases}$, $\sqrt[2l]{2^l} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \underset{\sqrt[2l]{2^\ell} > 0}{=} \lim_{l\to\infty} \sqrt[2l]{2^l} = \lim_{l\to\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

p) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\, x^k$.

//**S2.1.3**(1255)

// Vor:Seien $(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus $\mathbb{R}$ mit $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\to} b$, $\alpha\in\mathbb{R}$

//Beh: 3.) $a_n\le c_n\le b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ und $a=b \Rightarrow c_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\to} b=a$//

Lösung: $a_k=\sqrt{k}$, $1\le\sqrt[k]{|a_k|}$, $1\le\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{\underbrace{\sqrt{k}}_{monoton}}\le\sqrt[k]{k} \underset{k\to\infty}{\to} 1 \underset{S2.1.3}{\Rightarrow} \sqrt[k]{|a_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow R=\frac{1}{\overline{\underbrace{\lim}_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}}=1$

o) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $a_k=\begin{cases}\frac{(-1)^l}{(2l)!}, & k=2l, l\in N\\ 0, & k=2l-1, l\in N\end{cases}$

$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[2l]{\left|\frac{(-1)^l}{(2l)!}\right|}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[2l]{\left|\frac{1}{(2l)!}\right|}=0$, da $\sqrt[n]{n!} \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow R=\frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}}=+\infty$

A3.5.2 Es sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gegeben mit $a_k\neq 0\ \forall\ k\ge k_0$

Beweise: Falls die Folge $\left(\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\right)_{k=k_0}^{\infty}$ bestimmt divergiert, so ist der Konvergenzradius der Reihe gleich ∞.

Bew: $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \underset{k\to\infty}{\to} \infty$: $\forall\ k\in\mathbb{R}_+\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ k>N\ \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|>k$ also $|a_{k+1}|<1/k|a_k| \Rightarrow$

$|a_k|<(1/k)^{k-k_0}|a_{k_0}|\le(1/k)^k * c$ $(c=|a_{k_0}|k^{k_0})$, $\sqrt[k]{|a_k|}\le 1/k\sqrt[k]{c}$,

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}\le 1/k\ \forall\ k\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=0 \Rightarrow R=\infty$