A4.2.7

a) Es sei $M\subset K$ und $f, f_n: M\to K$, $n\in N$. (K ...z.B R, C)
Zeige: Gibt es ein $\varepsilon_0>0$ und eine Folge (x_n) in M, sodass
$|f_n(x_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon_0$ für alle oder auch nur unendlich viele n ist,
so kann (f_n) nicht gleichmäßig auf M gegen f konvergieren.

Bew:Annahme $f_n \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} f$ glm konvergent auf M ⇒

Zu $\varepsilon=\varepsilon_0>0$ $\exists$ $n_0\in N$ auf M: $|f_n(x_n)-f(x_n)| \underbrace{<}_{\forall n\geq n_0} \varepsilon_0$ $\forall$ $x\in M$.

Widerspruch, denn nach Vor gilt
$|f_n(x_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon_0$ für unendlich viele, also für mindestens ein $n\geq n_0$.
Also konvergiert f_n nicht gleichmäßig auf M gegen f

Bem:(.)Es kann sein dass f_n trotzdem auf M glm konv,
nur eben nicht gegen f ???????

b) Untersuche die untenstehende Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jeweils in den Intervallen $I_1=[0,1]$ und $I_2=[1,2]$ auf gleichmäßige Konvergenz:

$f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x\in R$, $n\in N$.

*//**D4.2.4**(2350) (Körper:K, z.B. R, C)*
//● ● Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion

// f: $D\to K$, wenn gilt $\forall$ $z\in D$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N_{(\varepsilon,z)}$: $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ $\forall$ $n>N_{(\varepsilon,z)}$
// Schreibweise: $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z\in D$
//Andere Formulierung:
// Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D punktweise konvergent, falls für
// jedes $z\in D$ die Folge $(f_n(z))$ konvergent ist. Ist dies der Fall, so
// heißt $f:D\to K$, mit $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ $\forall$ $z\in D$, die Grenzfunktion der Folge.
//● ● ● Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls

// sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls
// weiter gilt: $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in R_+$ $\forall$ $n\in N$ $\forall$ $z\in D$:$n\geq N$ ⇒ $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

Lös:#$f(x)$=#$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $f_n(x) \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} 0$ $\forall$ $x\in R$ punktweise Konv.

(.) f_n konvergiert nicht glm auf $I_1=[0,1]$, denn sonst müßte gelten:
$\exists$ Funktion f: $[0,1]\to R$ mit $f_n\to f$ glm auf I_1 ⇒
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ $\forall$ $x\in I_1$.
Aber mit $x_n=1/n$ gilt

$$|f_n(x_n)-\underbrace{f(x)}_{=0}|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=1/2=:\varepsilon_0>0 \quad \forall\ n\in N \Rightarrow$$

(f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergent (nach (a))

(..) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ konv glm auf $I_2=[1,2]$ gegen $f\equiv 0$

(genauer: $f: I_2 \to \mathbb{R}$, $f(x)=0 \quad \forall \quad x\in I_2$),
denn zu $\varepsilon>0$ bel fest wähle $n_0=[2/\varepsilon]+1 \Rightarrow$

$$|f_n(x_n) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{x\in[1,2]}{\leq} \frac{n*2}{1+n^2 1^2} \leq \frac{n*2}{0+n^2} = \frac{2}{n} \leq 2/n_0 < \varepsilon \quad \forall\ n\geq n_0, \quad \forall\ x\in I_2.$$

A4.2.9 Punktweise, gleichmäßige Konvergenz? h_n: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \left[\frac{x}{n}\right]$

//**S1.5.15**(759)
//1.) $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in\mathbb{Z}$ mit
// $[a]\leq a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in\mathbb{Z}\ |n\leq a\}$

Lös: $h(x) \underset{n\to\infty}{=} \begin{cases} 0, \mathit{falls}\ x\geq 0 \\ -1, \mathit{falls}\ x<0 \end{cases} \Rightarrow h_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} h \Rightarrow h_n$ konvergiert punktweise

Für n fest: $|h_n(x)-h(x)| \underset{Wahl\ x}{>} \varepsilon \ \forall\ \varepsilon>0$ h_n konvergiert nicht glm

Bsp $n=10$, $|h_{10}(x)-h(x)|=|\begin{cases} 0\,|0\leq x<10 \\ >1|10\leq x \\ -1|-1\leq x<0 \\ <-1|x<-1 \end{cases} - \begin{cases} 0, \mathit{falls}\ x\geq 0 \\ -1, \mathit{falls}\ x<0 \end{cases}| \underset{0\leq x=20}{=} |2-0|=2 \Rightarrow$

$\exists\ 0<\varepsilon<2$: $|h_{10}(x)-h(x)|>\varepsilon \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon)}\in\mathbb{N}\ \forall\ n>N_{(\varepsilon)} \underset{nicht}{\forall} x\in X: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

A4.5.10 Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Finde maximale Intervalle, auf denen die Reihen gleichmäßig konvergieren.

/

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(x/n)$

//**S3.1.4**(1605) Bsp 3, Seite 1608//

// $\left.\begin{array}{l} x - x^3/6 \le \sin x \le x - x^3/6 + x^5/120 \\ 1 - x^2/2 \le \cos x \le 1 - x^2/2 + x^4/24 \end{array}\right\} \forall\ 0<x \le 3$//

//**S2.2.2**(1301)

//Bsp:1.) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ nicht konvergent

// $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $\forall\ n \in \mathbb{N} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 2 \Rightarrow$ konvergent

\# $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $p>2$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow 1/k^p < 1/k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 1/k^p < \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 1/k^p$ konv

Lös:S3.1.4 Bsp 3: $\frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} \le \sin(x/n) \le \frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} + \frac{x^5}{120n^5}$

S2.2.2 Bsp1.): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = \underset{\to\infty}{x} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\to\ \infty}$ bestimmt divergent $\underset{x>0}{\rightarrow} +\infty$, $\underset{x<0}{\rightarrow} -\infty$.

Siehe oben: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{6n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^5}{120n^5}$ $\underbrace{\textit{konvergieren}}_{S2.2.2\,Bsp\,1.)}$ $\forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/n) = +\infty\,(x>0),\ -\infty\,(x<0)$.

Für $x=0$: $\sin(x/n) = \sin 0 = 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/n) = 0$ konvergent für $x=0$

\# $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $|\frac{x}{n}| < 3$ $\forall\ n > n_0$: $\frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} \le \sin \frac{x}{n} \le \frac{x}{n} - \frac{x^3}{6n^3} + \frac{x^5}{120n^5}$

\# $-\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} \ge -\sin \frac{x}{n} \ge -\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} - \frac{x^5}{120n^5} \Rightarrow -\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} \ge \sin -\frac{x}{n} \ge -\frac{x}{n} + \frac{x^3}{6n^3} - \frac{x^5}{120}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-e^{nx})$

//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//
//Für $z,w\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$ gilt//

//5.) $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \exists\ \exp(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x/n)^{-n}=\frac{1}{\exp(-x)}$, $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$//

//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//

//7.) $1+x\leq\exp(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\leq\frac{1}{1-x}\ \ \forall\ x<1$//

//1.) (.) $\exp(0)=e^{0}=1$ (..) $\exp(x)>0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$,

// **S3.1.1**(1601) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{k}$ divergent $\forall\ z\in\mathbb{K}$ mit $|z|\geq 1$,

// konvergent $\forall\ z$, $|z|<1$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{k}=\frac{1}{1-z}\ \ \forall\ |z|<1$.

Lös: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-e^{nx}) \underset{S2.3.18\,5.)}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(e^{x})^{n}}}$, $y\geq 0$, $e^{y}\geq 1+y$, $e^{x}>0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $(e^{x})^{n}>0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

$e^{(e^{x})^{n}}\geq 1+(e^{x})^{n}\geq(e^{x})^{n} \Rightarrow \frac{1}{e^{(e^{x})^{n}}}\leq\frac{1}{(e^{x})^{n}}$.

- $x>0 \underset{x>0\ \&\ e^{x}\geq 1\Rightarrow e^{x}>1}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{e^{x}}\right)<1 \underset{S3.1.1}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{x}}\right)^{n}$ konvergiert punktweise.
- $x\leq 0 \Rightarrow e^{x}\leq 1 \Rightarrow (e^{x})^{n}\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{(e^{x})^{n}}}\geq 1/e\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{(e^{x})^{n}}}$ also keine Nullfolge

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{(e^{x})^{n}}}$ divergiert

Noch zu untersuchen gleichmäßige Konvergenz...x>0 bzw $x\in[\delta,\infty]$ $\forall$ $\delta>0$

*//**S4.2.4**(2356) Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz//*

// Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ ist genau dann auf D gleichmäßig //

// konvergent, wenn $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbb{N}\ \forall\ x\in D: m\geq n\geq N \Rightarrow |\sum_{k=n}^{m} g_k(x)|<\varepsilon$.//

//Bem:Seien $f_n(z): M\to\mathbb{C}$ $n\in\mathbb{N}$, gegeben.

// $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig auf M $\Leftrightarrow$

// $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$)//

// mit $\left|\sum_{\nu=m+1}^{n} f_\nu(z)\right|<\varepsilon$ $\forall$ $n>m\geq n_0(\varepsilon)$ und $\forall$ $z\in M$. //

*//**S2.3.18**(1409)Eigenschaften Expotentialfunktion//*

//7.) $1+x\leq\exp(x)$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\leq\frac{1}{1-x}$ $\forall$ $x<1$//

*//**S1.5.6** (715) Vor:$x\in\mathbb{R}$, $x\geq-1$, $n\in\mathbb{N}$ Beh:$(1+x)^n\geq 1+nx$//*

// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

*//**S3.1.2** (1602)Rechenregeln für unendliche Reihen//*

//Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen.//

// (siehe auch Rechenregeln für unendliche Reihen S3.1.2)//

// Sei $(z_n)\subset\mathbb{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit//

// $|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu|<\varepsilon$ $\forall$ $n>m\geq n_1(\varepsilon)$.(d.h. $|S_n-S_m)|<\varepsilon$ $\forall$ $n>m\geq n_1(\varepsilon)$.//

Beh: $\forall$ $\delta>0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-e^{nx})$ (.)gleichmäßig konvergent auf $[\delta,\infty)$?

(..) aber nicht auf ganz $\mathbb{R}_+$?

(.) S4.2.4 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz erfüllt?

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in[\delta,\infty),\ n,m\geq N \underbrace{\Rightarrow}_{S4.5.1} \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{e^{(e^x)^k}}\right|<\varepsilon$$

$$x\geq\delta>0 \Rightarrow e^x\geq e^\delta \underbrace{\geq}_{S2.3.18\,7.)} 1+\delta \Rightarrow (e^x)^n\geq(1+\delta)^n \underbrace{\geq}_{S1.5.6)\,-1\leq 0<\delta} 1+n\delta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e^{(e^x)^n}}<\frac{1}{e^{1+n\delta}}<\frac{1}{e^{n\delta}}<\underbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{e^\delta}_{>1}}\right)}_{=q<1}^{n} \Rightarrow \left|\frac{1}{e^\delta}\right|<1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^\delta}\right)^k \text{ konvergent } \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2\,Bem:1.)}$$

$$\left|\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{e^\delta}\right)^n\right|<\varepsilon \text{ für } m,n\geq N(\varepsilon)$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig, wähle $N(\varepsilon)$: $\left|\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{e^\delta}\right)^k\right|<\varepsilon$ für $m,n\geq N(\varepsilon)$

$$\Rightarrow\ \forall\ m,n\geq N(\varepsilon): \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{(e^{e^k})^n}\right|\leq\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{\varepsilon^\delta}\right)^n<\varepsilon$$

(..)Z.z. $\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ N\in\mathbb{R}_+,\ \exists\ n,m\in\mathbb{N},\ \exists\ x\in\mathbb{R}_+,\ m,n\geq N,\ \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{(e^{e^x})^k}\right|>\varepsilon$.

Wähle $\varepsilon=1/27$. Sei $N\in\mathbb{R}_+$, beliebig, m=n=N, x=1/N

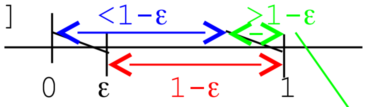
$$\Rightarrow\ \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{(e^{e^x})^k}\right|=\frac{1}{(e^{e^x})^N}=\frac{1}{(e^{e^{1/N}})^N}=1/e^e>1/27,\ e<3,\ e^e<e^3<3^2\neq 27$$

A4.2.11 Zeige: Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x)=x^n$ ist nicht gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$.

Lös:Wann gilt $|x|^n<\varepsilon$ für $0\le x<1$...$x=1$?..$|x|^n=1$...$\cancel{<}\ \varepsilon$ nicht glm konv

A4.2.12 Zeige: Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x)=(1-x)x^n$ ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$

Lös:



#Falls $x>1-\varepsilon \Rightarrow \varepsilon>1-x \Rightarrow f_n(x)=(1-x)\big(\overset{\le 1}{x}\big)^n\le \overbrace{1-\underbrace{x}_{>(1-\varepsilon)}}^{<\varepsilon}<\varepsilon,$

#Falls $x<1-\varepsilon$ d.h. $0<\varepsilon<1-x \Rightarrow f_n(x)=(1-x)x^n<(1-\underbrace{x}_{\in[0,1]})(1-\varepsilon)^n \underbrace{\le}_{1-x\le 1} (1-\varepsilon)^n$

$$|f_n(x)|\le\begin{cases} f_n(x)\le(1-x)<\varepsilon & \text{für } x>1-\varepsilon \text{ unabhängig von } n\\ f_n(x)\le(1-\varepsilon)^n<\varepsilon\ \forall n\ge N & \text{für } 0<x<1-\varepsilon\end{cases}$$

A4.2.13 Zeige: Die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$

Lös: glm Konv aus Majorantenkriterium ... $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konv

A4.2.14

a) Finde die maximalen Intervalle, auf denen die Funktionenfolge $f_n(x)=x*\exp(-nx^2)$ punktweise bzw gleichmäßig konvergiert.

//**D4.2.4**(2300) Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$, $f_n:M\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$//

//Aussage: Die Funktionsfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig

// auf M gegen $f(z):M\to\mathbb{C}$: $\Leftrightarrow$

//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabh. von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)\ \ \forall\ z\in M$.

*//**S2.3.18**(1409) Für $x\in\mathbb{R}$ gilt 7.)(1411) $1+x\leq\exp(x)\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$//*

*//**S1.5.6** (715) Vor: $x\in\mathbb{R}$, $x\geq-1$, $n\in\mathbb{N}$ Beh: $(1+x)^n\geq 1+nx$//*

// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

Lös: ● punktweise konvergent

$$f_n(x)=x\frac{1}{e^{nx^2}}=x\left(\frac{1}{\underbrace{e^{x^2}}_{=q}}\right)^n,\quad q^n\ \underbrace{\overbrace{\longrightarrow}^{|q|<1}}_{n\to\infty}\ 0,\quad q^n\ \underbrace{\overbrace{\longrightarrow}^{|q|=1}}_{n\to\infty}\ 1,\quad q^n\ \underbrace{\overbrace{\longrightarrow}^{|q|>1}}_{n\to\infty}\ \infty,$$

$$\left|\frac{1}{e^{x^2}}\right|<1\ \Rightarrow\ f_n(x)\ \text{konvergent:}\quad \frac{1}{\underbrace{e^{x^2}}_{e^{x^2}\geq 1}}\overset{x^2>0}{\leq}1\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\neq 0}\ f_n(x)=x\frac{1}{e^{nx^2}}\ \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty}\ x*0\ \text{konvergiert punktweise}\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \text{gegen}\ 0$$

$$\frac{1}{\underbrace{e^{\underbrace{x^2}_{=0}}}_{=1\ \text{für}\ x=0}}=1$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x=0}\ f_n(x)=x=0*1\ \frac{1}{e^{nx^2}}\ \text{konvergiert gegen}\ 0$$

$$f_n(x)=x\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n=0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ f_n\ \text{konvergiert punktweise}\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

● ● gleichmäßig konvergent

*//**S2.3.18**(1409) Für $x\in R$ gilt7.)(1411) $1+x\le \exp(x)$ $\forall$ $x\in R$//*

*//**S1.5.6** (715) Vor: $x\in R$, $x\ge -1$, $n\in N$ Beh: $(1+x)^n \ge 1+nx$//*

// Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1//

Beh.: f_n auf $\mathbf{R}$ gleichmäßig konvergent

Bew: Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall\ n\in\mathbf{N}\ \forall\ x\in\mathbf{R}$: $n \ge N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \underset{\text{Seite 2362}}{\Rightarrow} |f_n(x)|<\varepsilon$

$$|f_n(x)|=|x\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n|=|x|\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n$$

da $e^{x^2} \underset{S2.3.18}{\ge} 1+x^2>0$, $(e^{x^2})^n \ge (1+x^2)^n \underset{S1.5.6,\,x^2>-1}{\ge} 1+nx^2>1$

$$|f_n(x)|=|x|\underbrace{\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^n}_{\le 1} \le \begin{cases} |x| \text{ für } x=0 \\ \dfrac{|x|}{1+nx^2}=\dfrac{|x|}{1+n|x||x|}=\dfrac{1}{\frac{1}{|x|}+n|x|}\le\dfrac{1}{n|x|} \text{ für } x\ne 0 \end{cases}.$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $N=1/\varepsilon^2$, dann gilt $\forall\ n\in\mathbf{N}$ mit $n\ge N$:

$$|f_n(x)|\le\begin{cases} |x|<\varepsilon\ \forall |x|\le\varepsilon \\ \dfrac{1}{n|x|}\underset{|x|>\varepsilon}{<}\dfrac{1}{n\varepsilon}\underset{n\ge 1/\varepsilon^2}{\le}\varepsilon, \end{cases},\ \forall x\in\mathbf{R},\ n>1/\varepsilon^2$$

$\Rightarrow$ f_n auf $\mathbf{R}$ gleichmäßig konvergent

b) Zeige: Wenn eine Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, so muss für jede Folge (x_n) aus D gelten: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Bew: $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbf{R}_+.\ \forall\ n\in\mathbf{N}\ \forall\ x\in\mathbf{D}$: $n\ge\tilde{N}$:#$|f_n(x)-f(x)|$=#$|f_n(x)|<\tilde{\varepsilon}$

Beh. $\forall\ (x_n)\subset D$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Vor. $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbf{R}_+$: $\forall\ n\in\mathbf{N},\ \forall\ x\in D,\ n\ge\tilde{N} \Rightarrow |f_n(x_n)|<\tilde{\varepsilon}$.

Beh: $\forall\ (x_n)\in D$ gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbf{R}_+\ \forall\ n\in\mathbf{N},\ n\ge N$: $|f_n(x_n)|<\varepsilon$.

Sei $x_n\subset D$ beliebig. Sei $\varepsilon>0$. Setze $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon$, bestimme $\tilde{N}$, setze $N=\tilde{N}$, dann gilt $\forall\ n\in\mathbf{N},\ \forall\ x\in D,\ n\ge N$: $|f_n(x)|<\varepsilon \Rightarrow$ also ist erst recht $\forall\ n\in\mathbf{N},\ \forall\ x\in D,\ n\ge N \Rightarrow |f_n(x_n)|<\varepsilon$.

A4.2.15

a) Zeige: Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ ist gleichmäßig konvergent auf dem abgeschlossenen Intervall [0,1]

Lös: glm Konv aus Majorantenkriterium ... $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konv

b) Zeige: Wenn eine Funktionenfolge (f_n) auf D gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, so muss für jede Folge (x_n) aus D gelten: $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Bew: $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbb{R}_+.\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \Rightarrow\ \forall\ x\in D:\ n\geq\tilde{N}: \#|f_n(x)-f(x)|=\#|f_n(x)|<\tilde{\varepsilon}$

Beh. $\forall\ (x_n)\subset D:\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=0$

Vor. $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ \tilde{N}\in\mathbb{R}_+: \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in D,\ n\geq\tilde{N}\ \Rightarrow\ |f_n(x_n)|<\tilde{\varepsilon}$.

Beh: $\forall\ (x_n)\in D$ gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\geq N:\ |f_n(x_n)|<\varepsilon$.

Sei $x_n\subset D$ beliebig. Sei $\varepsilon>0$. Setze $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon$, bestimme $\tilde{N}$, setze $N=\tilde{N}$, dann gilt $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in D,\ n\geq N:\ |f_n(x)|<\varepsilon\ \Rightarrow$ also ist erst recht $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\in D,\ n\geq N\ \Rightarrow\ |f_n(x_n)|<\varepsilon$.

c) Zeige, dass die Funktionenfolge $f_n(x)=n^2x(x-2)(1-x)^n$ auf $0\leq x\leq 2$ (.) punktweise aber (..) nicht gleichmäßig konvergent ist.
Anl.: Finde eine Folge (x_n) aus dem Intervall $(0,2)$, welche die Bedingung aus (b) nicht erfüllt.

*//**S1.5.6** (715) Vor: $x\in R$, $x\geq-1$, $n\in N$ Beh: $(1+x)^n\geq 1+nx$//*
// Gleichheit gilt genau dann, wenn $x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//

Lös: (.) Protokoll nicht verstanden, eigener Versuch beweist (.), kann falsch sein

\# • $x=0,1,2\ \Rightarrow\ f_n(x)=0$

\# •• $0<x<1$: $n*\underset{\neq 0}{x}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\infty$, $n^2*\underset{\neq 0}{x}\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\infty$, $(\underset{0<x<1}{x}-2)<0$, $(1-\underset{0<x<1}{x})^n=(\underset{0<x<1}{1-x})^n>0$,

\# $(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n<0$, $\underset{0<x<1}{x}(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n<0$,

\# $n^2*\underset{0<x<1}{x}(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n\underset{n\to\infty}{\rightarrow}-\infty$,

\# ••• $1<x<2$: $(1-\underset{1<x<2}{x})<0$, $(1-\underset{1<x<2}{x})^n\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\pm\infty$, $n^2*\underset{0<x<1}{x}(\underset{0<x<1}{x}-2)(1-\underset{0<x<1}{x})^n\underset{n\to\infty}{\rightarrow}\pm\infty$

\# $f_n(x)$ punktweise konvergent in 0,1,2

(..) $x_n=\frac{1}{n}\in[0,2]$: $f_n(1/n)=n^2\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-2)(1-\frac{1}{n})^n\ \Rightarrow\ \underbrace{(1-2n)}_{\to-\infty}\underbrace{(1+\frac{-1}{n})^n}_{\to 1}$ divergent $\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz