A4.3.1 Zeige die Stetigkeit der Abb $z \mapsto |z|$ auf $\mathbb{C}$.
Hinweis: $|f(z)-f(z_0)| \leq |z-z_0|$, $||z|-|z_0|| \leq |z-z_0|$.
Lipschitzbed L=1

A4.3.2 Untersuche, ob folgende Grenzwerte existieren und bestimme ggf den Wert:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$

*//**S4.2.2**(2304)*
//Vor: Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbb{R}$, $g:M\to\mathbb{R}$
//Beh: 1.) (Folgenkriterium) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n)\subset M\setminus\{x_0\}$
// mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$.

Lös: $x>1$, $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = \sqrt{x}\,\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} \rightarrow$$

$$\frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = 3/2\ (x\to\infty)$$

(wegen Stetigkeit der Wurzelfkt nach Bsp (...) Seite 2401 und $\lim\limits_{x\to\infty} 3/x=0$)

Ausführliche Begründung:

1.Möglichkeit mit Folgekriterium analog zu S4.2.2 gilt auch für $x\to\infty$.

Sei $x_n>0\ \forall n \wedge x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty \wedge (x_n)_{n=1}^{\infty}$ beliebige Folge $\Rightarrow$

$$\sqrt{x_n}\,(\sqrt{x_n+3}-\sqrt{x_n}) = \frac{3}{\sqrt{1+3/x_n}+1} \underbrace{\overset{\text{GW Regeln Folgen}}{\rightarrow}}_{\text{Stet }\sqrt{\ }\text{Fkt}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{1+0}+1} \underset{n\to\infty}{=} 3/2 \underset{(x_n)\text{ bel}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = 3/2$$

*//**S4.2.3**(2307) Grenzwertregeln//*
// 4.) Seien $M,H\subset\mathbb{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbb{R}$, $x_0\in M'$.
// (●) Sei $y_0:=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, dann gilt $y_0\in\overline{H}$.
// (●●) Falls $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$ existiert, so $\exists \lim\limits_{x\to x_0} h(f(x))=c$

2.Möglichkeit mit Analogon zu S4.2.3 4.) für $x\to\infty$:

Sei $f(x)=1+3/x$ (d.h. $M=(1,\infty)$, $M'=[1,\infty)$, da),

$x>0$ und $h(y)=\sqrt{y}$ (d.h. $M'=[0,\infty)$), sowie $y_0=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=1=c$

(da $\sqrt{\ }$ Fkt stetig). $y_0\in M\cap M'$ und $c=h(y_0) \Rightarrow$

$$\exists \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{h(f(x))}_{\sqrt{1+3/x}} = c = 1 \underset{\text{GW Regeln}}{\Rightarrow} \frac{3}{\sqrt{x+3/x}+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 3/2$$

//**D4.1.1**(2200) *Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei*//

// $U_\delta(x_0):=\{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\delta$-*Umgebung von* x_0 *in* $\mathbb{R}$.

// $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0):=U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R} / 0<|x-x_0|<\delta\}$.

//*Sei* $M\subset\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$.//

//3.) $x_0\in\mathbb{R}$ *heißt Häufungspunkt(HP) von* $M:\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ *ist* $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.//

//4.) M' *sei die Menge aller HP von M und* //

//**S4.2.3**(2307) *Grenzwertregeln*//

// 4.) *Seien* $M,H\subset\mathbb{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbb{R}$, $x_0\in M'$.

// (●) *Sei* $y_0:=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *dann gilt* $y_0\in\overline{H}$.

// (●●) *Falls* $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$ *existiert, so* $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} h(f(x))=c$

\# Sei $y=f(x)=1+3/\overset{>0}{\overbrace{\underset{\to\infty}{x}}}$ $(M=(\overset{z.B.}{\overbrace{\underset{x\to\infty}{1}}},\infty)$, $M'=[1,\infty)$ (da $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(1)\neq\emptyset$) und

\# $h(y)=\sqrt{y}$ sowie $y_0=\lim\limits_{x_0\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=1=c$ (da $\sqrt{\ }$ Fkt stetig).

\# $y_0\in M\cap M'$ und $1=c=h(y_0)$ $\Rightarrow\ \exists\ \lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{h(f(x))}_{\sqrt{1+3/x}}=c=1 \underset{\text{GW Regeln}}{\Rightarrow} \frac{3}{\sqrt{x+3/x}+1}\underset{n\to\infty}{\to} 3/2$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right)$

Lös: $\underset{2^3}{8}-x^3=(2-x)(x^2+2x+4)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^2}=\frac{1}{2-x}\left(1-\frac{12}{x^2+2x+4}\right)=$

$\frac{1}{2-x}\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}=\frac{-4-x}{x^2+2x+4}\to\frac{-4-2}{2^2+2\cdot 2+4}$ (wegen GWRegeln

oder Stetigkeit der rat Fkt Nenner$\neq 0$ für $x=2$) $\underset{x\to 2}{=} -1/2$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}$ für $r\in\mathbf{Q}$ (fest)

//**S1.7.2**(903) Endliche geometrische Reihe//

// Vor. Seien $a,b\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}_0$ Beh: 1.) $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k=\begin{cases} n+1, & a=1\\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1\end{cases}$//

Lös: Beh: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}=r$ für $r\in\mathbf{Q}$.

Bem: Diese Aussage gilt sogar für $r\in\mathbf{R}$, sogar für $r\in\mathbf{C}$. (Dies wird am einfachsten mit der Ableitung von $f(x)=x^x$ im Punkt 1 gezeigt, siehe später)

Sei $r=p/q$ mit $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$.

(.) Sei zuerst $q=1$, d.h. $r=p\in\mathbf{Z}$,

Falls $r\geq 0$, so wurde Beh schon in A4.2.2 a) bewiesen

oder $\frac{x^r-1}{x-1}=\sum\limits_{\nu=0}^{r-1} x^\nu \underset{x\to 1}{\to} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} 1^\nu=r$

Falls $r<0$:

Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

O.B.d.A. $x_n\neq 0$ $\forall$ n. Sei $y_n:=1/x_n$ #$\Rightarrow x_n=y_n^{-1}$#, $n\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$ $\Rightarrow$

$$\frac{x_n^r-1}{x_n-1}=\frac{y_n^{-r}-1}{y_n^{-1}-1}=\frac{(y_n^{-r}-1)y_n}{1-y_n}=\frac{1-y_n^{-r}}{1-y_n}(-y_n)=\Big(\sum_{k=0}^{\overbrace{-r-1}^{\geq 0}} \underbrace{y_n^k}_{\underset{n\to\infty}{\to} 1}\Big)\underbrace{(-y_n)}_{\underset{n\to\infty}{\to} -1}=(-r)(-1)\underset{n\to\infty}{\to} r$$

(..) Allg Fall: Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ mit

$x_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Def $y_n:=x_n^{\frac{1}{q}}$ $\Rightarrow$ $x_n:=y_n^q$, $n\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$ $\Rightarrow$ $\frac{x_n^r-1}{x_n-1}=\frac{y_n^{\overbrace{pq}^{=p}}-1}{y_n^q-1}=$

$$\frac{\left(\frac{y_n^p-1}{y_n-1}\right)}{\left(\frac{y_n^q-1}{y_n-1}\right)}\overbrace{\underset{(n\to\infty)}{\to}}^{wg(.)} p/q=r \underset{\text{Folgenkrit}}{\Rightarrow} \text{Beh, denn } \sqrt[q]{\ } \text{ ist stetig.}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x[1/x]$

//**S1.5.15**(759)//
//1.) $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in\mathbb{Z}$ mit //
// $[a]\le a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in\mathbb{Z}\ |n\le a\}$//
Lös: $[1/x]\le 1/x<[1/x]+1 \Rightarrow [1/x]-1\le(1/x)-1<[1/x] \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{x}-1}_{=\frac{1-x}{x}}<[1/x]\le 1/x\ \ \forall\ x\ne 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1\ \forall\ x>0 \\ 1-x>x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1\ \forall\ x<0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-|x|}_{\to 1(x\to 0)}<x\cdot[1/x]<\underbrace{1+|x|}_{\to 1(x\to 0)}\ \ \forall\ x\ne 0 \Rightarrow$$

(Sandwichth, GW mit Folgenkrit) $\exists\ \lim\limits_{x\to 1} x[1/x]=1$.

oder

...$\lim\limits_{x\to 0} x(1/x-r)=\lim\limits_{x\to 0}(1-xr)=1$ ($1/x=[1/x]+r, r\in[0,1)$)

e) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$

Lös: $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ existiert nicht, denn:

$x_n=\dfrac{1}{\pi n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0$ und $\sin(1/x_n) \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0$

$y_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0$ und $\sin(1/y_n)=1\to 1$

A4.3.3
a) Gesucht: Bijektive,stetige Funktion $f:(0,1)\to(0,y)\ \forall\ y>0$
Lös: $f(x)=x*y$

b) Die durch $f(x)=x^3-x^2+3x-1$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist stetig. Bestimme zu $\varepsilon>0$ explizit ein $\delta>0$, sodass $\forall\ x\in U_\delta(1)$ gilt: $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$.
Lös: Sei $\varepsilon>0$, definiere $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\varepsilon/7\}$. Dann gilt $\forall\ x\in\mathbb{R}$ mit
$|x-1|<\delta$ (d.h. insbesondere $x\in(0,2)$)
$|f(x)-f(1)|=|x^3-x^2+3x-3|=|x-1|(x^2+3)<\delta(x^2+3)<7*\delta<\varepsilon$
\# Es genügt kleine Umgebungen um 1 ($\delta(\varepsilon)\le 1$) zu untersuchen, d.h.
\# $|x-1|<\delta\le 1 \Rightarrow x-1<1 \vee 1-x<1 \Rightarrow x<2 \vee x>0 \Rightarrow x\in(0,2)$
\# $|f(x)-f(1)|=|x^3-x^2+3x-1-(1-1+3-1)|=|x^3-x^2+3x-3|=|(x-1)(x^2+3)|=$
\# $|(x-1)||(x^2+3)|=|x-1|(\underbrace{x^2+3}_{>0})<\delta(x^2+3)<7*\delta<\varepsilon$

A4.3.4 Untersuche die folgenden Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf Stetigkeit
a) $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ für } x\le 0 \\ x^2-2x+a \text{ für } x>0\end{cases}$ mit $a\in\mathbb{R}$ fest.
Lös: Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist f stetig. Außerdem gilt
$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0_+}(x^2-2x+a)=a$ und $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0_-}(x+2)=2=f(0)$.
Somit gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow a=2$. Dann ist f stetig in $x_0=0$ für a=2
d.h. f stetig $\Leftrightarrow$ a=2

b) $f(x)=\begin{cases} x \text{ für } x \in Q \\ 0 \text{ für } x \in R/Q \end{cases}$

Lös: Fall 1: $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Dann gilt für $x_n=x+\frac{\sqrt{2}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} x$, aber $f(x_n)=0 \overset{n\to\infty}{\not\to} x=f(x)$ $\Rightarrow$

f nicht stetig in x

Fall 2: $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\exists\ (x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n=x$ $\Rightarrow$

$f(x_n)=x_n \overset{n\to\infty}{\to} x\neq f(x)=0$ $\Rightarrow$ f nicht stetig in x

Fall 3: x=0. Sei $\varepsilon>0$ baf. Setze $\delta_\varepsilon=\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$ mit $|x-x_0|=|x-0|=|x|<\delta_\varepsilon$:

$|f(x)-f(0)|=|f(x)|<\delta_\varepsilon=\varepsilon$

f stetig nur im Nullpunkt, f nicht stetig.

A4.3.5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei stetig in 0 und es gelte $f(x+y)=f(x)*f(y)$ $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

a) Zeige, dass entweder $f(x)=0$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$ oder $f(x)>0$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$ gilt.

Im 2.Fall gilt stets $f(0)=1$.

Bew: $\left.\begin{aligned} &Fall\,1: f(x)=0\ \forall x\in R \\ &Fall\,2: \exists x_0\in R\ mit\ f(x_0)\neq 0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$f(x_0)=f((x_0-x)+x)=f(x_0-x)f(x)$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

Fall 1: richtig für $f(x)=0$, d.h. auch für $f(x_0)=0$

Fall 2: $f(x)\neq 0$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Es gilt $f(0)=f(0+0)=(f(0))^2$ $\Rightarrow$ $1=f(0)$

Noch z.z. Im Fall 2 gilt $f(x)>0$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Es gilt $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=(f(\frac{x}{2}))^2>0$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

b) Beweise, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

//**S4.3.3**(2409) Folgenstetigkeit//
// Genau dann ist $f:D\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge//
// (x_n) in D mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n)\to f(x_0)$ gilt für $n\to\infty$.//

Bew:Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x)=0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n-x)=f(0)$ stetig nach Vor $\Rightarrow$

$f(x_n)=f(x_n-x+x)=f(x_n-x)f(x)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)f(x)=f(x) \underset{S4.3.2}{\Rightarrow}$ f ist stetig in $x\in\mathbb{R}$

$\underset{x\text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ f ist stetig

c) Beweise, dass im Fall $f(0)=1$ $\forall\, x\in\mathbb{Q}$ gilt: $f(x)=f((1))^x$.

Bew:#$f(0)=1$ heißt nach a) 2.Fall $f(x)>0$

$f(x)>0\ \forall\, x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=f(1)^x\ \forall\, x\in\mathbb{Q}$

(.) $f(nx)=(f(x))^n\ \forall\, n\in\mathbb{N}_0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Bew durch Induktion nach n bei festem $x\in\mathbb{R}$

n=0: $f(0*x)=f(0)=1=(f(x))^0$

$n\to n+1$: Für ein $n\in\mathbb{N}$ gelte $f(nx)=f(x)^n \Rightarrow$

$f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)f(x)=f(x)^n f(x)=(f(x))^{n+1}$

(..) $f(nx)=(f(x))^n\ \forall\, n\in\mathbb{Z}\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Bew:Es genügt zu zeigen $f(-nx)=f(x)^{-n}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Es gilt $1=f(0)=f(nx+(-nx))=f(nx)f(-nx) \underset{(.)}{=} (f(x))^n f(-nx) \Rightarrow$

$1=(f(x))^n f(-nx) \Rightarrow f(-nx)=(f(x))^{-n}$

Beh

(...) Für $x\in\mathbb{Q}$ gilt $f(x)=f(1)^x$

Bew:Es sei $x=p/q$ mit $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$(f(1))^p \underset{(..)}{=} f(p)=f(\frac{p}{q}q)=f(xq) \underset{(..)}{=} (f(x))^q \Rightarrow f(x)=(f(1))^{\frac{p}{q}}=(f(1))^x$.

d) Beweise, dass im Fall $f(0)=1$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$ gilt: $f(x)=f(1)^x$.

Bew: Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x \Rightarrow$

$f(x) \underset{b)\, f\text{ stetig}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \underset{c)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(f(1))^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n \log f(1)} = e^{x\log f(1)} = f(1)^x$.

A4.3.6 Gegeben sei eine stetige und monoton wachsende Funktion $f:[0,1]\to[0,1]$. Es sei $a_0\in[0,1]$. Definiere eine Folge, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rekursiv durch $a_{n+1}=f(a_n)$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Beweise, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent ist und dass der Grenzwert a ein Fixpunkt von f ist, d.h. es gilt $f(a)=a$.

Lös: #Bsp: $y=x^2$ $\nearrow$,

$x=0,2\Rightarrow x^2=0,04$, $x=0,3\Rightarrow x^2=0,09$, aber

$a_0=0,1$, $a_1=0,1^2=0,01$, $a_1<a_0$

$y=\sqrt{x}$ $\nearrow$, $a_0=0,25$, $a_1=\sqrt{0,25}=0,5$, $a_1>a_0$

Fall 1: $a_1\geq a_0 \Rightarrow a_{n+1}\geq a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ Bew durch Induktion

$n=0$: o.k.

$n\to n+1$: Für ein $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $a_{n+1}\geq a_n \underset{\text{f mon wachsend}}{\Rightarrow} f(a_{n+1})\geq f(a_n)$

d.h. $a_{n+2}\geq a_{n+1}$.

Fall 2: $a_1<a_0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ analog

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist also monoton und außerdem beschränkt

$(a_n\in[0,1]\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0) \Rightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, etwa

$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \underset{f\ stetig}{=} f(a)$

A4.3.7 Zeige: Jedes Polynom ist stetig in $\mathbb{C}$.

Hinweis: x^n stetig weil x stetig

A4.3.8 Zeige: Jede rationale Funktion ist auf ihrem natürlichen Definitionsbereich stetig.

A4.3.9 Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(z-z_0)^n$

habe Konvergenzradius R>0 bzw. R=∞.

Definiere $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(z-z_0)^n$ für $z\in U_R(z_0)$, falls $R\neq\infty$, bzw. $z\in\mathbb{C}$, falls R=∞.

Zeige, $\forall\ z_1\in U_R(z_0)$ (falls $R\neq\infty$) bzw. $z_1\in\mathbb{C}$, falls $R=\infty$: $\exists \lim_{z\to z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}$ und gebe diesen Wert mit Hilfe der a_n, $n\in\mathbb{N}_0$ an.

*//**S3.5.7**(2053)*

//Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR R>0. Sei z_0^* mit $|z_0-z_0^*|= r<R$//

// fest gewählt.//

//Beh: $\forall z\in\mathbb{C}$ mit $|z_0-z_0^*|<R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^n$,//

// wobei $\forall\ k\in\mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^* - z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert//

Lös: (noch nicht überprüft)

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \underset{S3.5.7}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_n)^k$ mit $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_1-z_0)^{n-k}$ $\forall\ k\in\mathbb{N}_0$,

insbesondere $b_0=f(z_1) \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_1)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_1)^k \underset{k\to\infty}{\to}$

$b_1=\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu(z_1-z_0)^{\nu-k}$ für $(z_0 \underset{k\to\infty}{\to} z_1)$.

$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+1}(z-z_n)^k$ ist stetig im Inneren des Kreises ⇒

$g(z) \underset{\nu\to\infty}{\to} g(z_1)=b_1$

A4.3.10 Zeige:Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig in einem Punkt $c\in[a,b]$, so gilt immer $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ falls $c\in(a,b)$ und

$\lim_{x\to a_+} f(x)=f(a)$ falls c=a bzw $\lim_{x\to b_-} f(x)=f(a)$ falls c=b ist.

A4.3.11 Berechne den Grenzwert einer rationalen Funktion für $x\to\infty$

A4.3.12 Formuliere und beweise Rechenregeln für die oben eingeführten Funktionsgrenzwerte (+. mal,Quot...Nenner ≠0)

A4.3.13 Gib ein Bsp einer auf [0,1] stückweise stetigen Funktion an, welche an mindestens einer Stelle weder links- noch rechtsseitig stetig ist.

A4.3.14 Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeige: Alle evt Unstetigkeitsstellen von f sind Sprungstellen. Die Menge aller Unstetigkeitsstellen ist höchstens abzählbar.
Falls es unendlich viele Sprungstellen $x_k\in[a,b]$ mit Sprunghöhen f_k gibt, dann ist die Reihe $\sum f_k$ konvergent und ihr Wert ist höchstens gleich b-a.

A4.3.15 Zeige an Hand eines Bsp. $a_k=(-1)^k$: Es gibt Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, welche nicht konvergieren, für die aber $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \forall\ x\in(-1,1)$ konvergiert und $a=\lim_{x\to 1_-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ existiert. Man nennt die Zahl a auch den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ im Sinne des Abelschen Summationsverfahrens.

dazu: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1/(1+x) \underset{x\to 1_-}{\rightarrow} \to 1/2$