A5.2.1 • f,g stetig auf [a,b] • differenzierbar auf (a,b), • f(a)=g(a),
• $0 \leq f'(x) < g'(x) \quad \forall\ x \in (a,b)$.
Zeige $f(x)<g(x) \quad \forall\ x \in (a,b]$

Lös:Betrachte $h(x)=g(x)-f(x) \Rightarrow h'(x)=g'(x)-f'(x)>0$ auf (a,b) $\Rightarrow$
$h\uparrow \Rightarrow h(x)>h(a) \quad \forall\ x>a,\ g(x)-f(x)>g(a)-f(a)=0 \Rightarrow g(x)>f(x) \ \forall\ x \in (a,b]$

A5.2.2 Gib eine geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes

A5.2.3 Benutze den Mittelwertsatz, um eine Abschätzung für sin(1,005) zu erhalten, wenn der Wert für sin 1 (z.B aus einer Wertetabelle) bekannt ist.

A5.2.4 Zeige, dass das Newtonverfahren, angewandt auf $f(x)=x^2-a$, gerade der Quadratwurzeliteration entspricht.
Finde selber das analoge verfahren zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$

A5.2.5 Warum ist folgendes Argument kein Beweis für den 2. Mittelwertsatz: Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$. Dasselbe gilt auch für g anstelle von f und daraus folgt S5.2.4

Löstip:Andere Funktion... anderes ξ

A5.2.6 Zeige:Die Funktion $f(x)=\begin{cases} x^2 \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 \quad . & (x=0) \end{cases}$ ist in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ (also auch im Nullpunkt) differenzierbar, aber die Ableitung ist nicht stetig im Punkt x=0.

Lös: $x \neq 0: f'(x)=2x\sin(1/x)-(1/x^2)x^2\cos(1/x) \#= 2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$

($** \lim\limits_{x \to x_0} \cos(1/x)$ existiert nicht)

$$x=0:\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} =\# \frac{x^2\sin(1/x)-0}{x-0} =\# x\sin(1/x) \underset{x\to 0}{\rightleftarrows} 0 \text{ da } (\sin(1/x) \leq 1)$$

differenzierbar $\Rightarrow f'(0)=0$

** daher Ableitung unstetig, $2x\sin(1/x) \to 0$

*? nimmt jeden Wert an...Ableitung hat keine Sprungstellen

A5.2.7 Zeige: Ist die Funktion f in I=(a,b) differenzierbar und die Ableitung f′ monoton, so ist f in I stetig differenzierbar.

//**S5.2.8** (2808)Zwischenwertsatz von Darboux für Ableitungen//
//Vor:Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. //
// Sei a<b, a,b∈I und $f'(a) \neq f'(b)$.//
// Beh: $\forall\ \eta : f'(a) \leq \eta \leq f'(b)\ \exists\ \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)=\eta$.//

Achtung Lösung habe ich nicht ganz verstanden, enthält evt Schreibfehler? muss neu bearbeitet werden!!!!!!

Lös:Annahme f′ nicht stetig, d.h. $\exists\ x_0 \in (a,b)$ mit $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x_0)$

o.B.d.A. $f'(x_0) \neq \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ (für x_0^+ Bew entsprechend).

O.B.d.A. f′ monoton wachsend (fallend…statt <, >). Dann gilt

$\forall\ \xi < x_0,\ \forall\ \zeta > x_0,\ f'(\xi) \leq \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \underset{!}{<} f'(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f'(x) \leq f'(\zeta)$ im Widerspruch zum Zwischenwertsatz, da f auf $[x_1,x_2]$, $x_1>a$, $x_2<b$ differenzierbar.

A5.2.8 Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

$f(a,b) \to \mathbb{R}$ stetig auf (a,b) differenzierbar $\Rightarrow \exists\ \xi \in (a,b): \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

a) $\lim_{n\to 0} n(1-\cos(1/n))=0$

//**S5.2.4**(2804)Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//
//Vor:(.)a<b, f,g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig auf [a,b] und differenzierbar//
// auf(a,b). //
// (..)$g(b)-g(a) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a,b)$,//
//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi \in (a,b): f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a)$.
// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

Lös: $\lim_{n\to 0} n(1-\cos(1/n)) = -\lim_{n\to 0} \dfrac{\cos 0 - \cos(1/n)}{0-1/n} \underset{f=\cos,\ f'=\sin}{\underbrace{\overset{S5.2.3}{=}}} \lim_{n\to 0} \sin\xi_n \overset{\sin\ \text{stetig}}{=} \sin 0 = 0 \underset{\text{MWS}}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$\exists\ \xi \in (0,1/n)$, dann $\lim_{n\to 0} \xi_n = 0$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\dfrac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$, $a>0$, $\beta\neq 0$

//**S5.2.3**(2803)(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//

//Vor: $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//

//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//

//**S5.2.4**(2804)Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//

//Vor:(.) $a<b$, $f,g: [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar//

// auf (a,b). //

// (..) $g(b)-g(a)\neq 0$ und $g'(x)\neq 0\ \ \forall\ x\in(a,b)$,//

//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.

// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

*//**S4.2.3**(2307) Grenzwertregeln*

//1.) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)/g(x)=a/b$ (falls $b\neq 0$)//

Lös: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x-a}\dfrac{x-a}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\left(\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x-a}\right)\left(\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{x^{\beta}-a^{\beta}}{x-a}\right)^{-1}\right)$

Falls auf der rechten Seite beide lim existieren

$\dfrac{\overbrace{x^{\alpha}}^{f(b)}-\overbrace{a^{\alpha}}^{f(a)}}{\underbrace{x}_{b}-\underbrace{a}_{a}}=f'(\xi_x)\ \underbrace{\overbrace{=}^{S5.2.2}}_{f'(a^{\alpha})=0,f'(a)=0}\ \alpha\,\xi_x^{\alpha-1}$ ($y\to y^{\alpha-1}$ stetig) $\alpha\,\xi_x^{\alpha-1}\underset{\xi_x\to a}{\to}\alpha a^{\alpha-1}$

(MWS $f(x)=x^{\alpha}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$, $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, $x\to a$, $x<\xi_a<a$,

$a<\xi_a<x$ MWS $\exists\ \xi_a$, $\lim\limits_{x\to a}\xi_a=a$)

$\dfrac{x^{\beta}-a^{\beta}}{x-a}\to\beta a^{\beta-1}\neq 0$, $\dfrac{x^{\beta}-a^{\beta}}{x-a}\to\dfrac{1}{\beta a^{\beta-1}}$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x^{\beta}-a^{\beta}}=\alpha a^{\alpha-1}=\dfrac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$