A5.3.1 f: $[-1,\infty \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x}$.

a) $T_{(3,0)} f(0,x)$ d.h. 3. Taylorpolynom von f, Entwicklungspkt $x_0=0$?

*//**D5.3.2** (2903) $I\subset R$, $I=(a,b)$, $f:I\to R$ stetig differenzierbar, $x_0\in I$, $n\in N_0$:*

// ● $T_{(n,x_0)}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt ntes Taylorpolynom von f um x_0.//

*//**D4.1.1**(2200) Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei*

// $U_\delta(x_0) := \{x\in\mathbb{R} \mid |x-x_0|<\delta\} = (x_0-\delta, x_0+\delta) = \delta$-Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$.

// $\overset{o}{U}_\delta(x_0) := U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x\in\mathbb{R} / 0<|x-x_0|<\delta\}$.

//Sei $M\subset\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$.

//1.) $x_0\in M$ heißt innerer Punkt von M: $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $U_\delta(x_0)\subset M$.

// $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M

*//**S5.3.1**(2903) Satz von Taylor*

//Vor: Beliebiges $I\subset R$, $x_0\in I$, $n\in N_0$, $f:I\to R$ ist n mal stetig

// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und

// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)

//Aussagen:

// $\forall$ $x\in I$ $\exists$ $\xi=\xi_{(x)}=\xi_{n,x_0,x} \in I(x,x_0)$:

// $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!}(x-x_0)^\nu+R_n(x)$ und

// $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

//Bsp (2758): 3.) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>-1$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}*1$, $x>-1$

Lös: $\overset{o}{I} \underbrace{=(-1,\infty)}_{D4.1.1}$

$$T_{(3,0)} f(0,x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=\left.\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right|_{x=0}=\frac{1}{2},\ f''(0)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0}=-\frac{1}{4},$$

$$f'''(0)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}\Big|_{x=0}=\frac{3}{8}$$

$$T_{(3,0)} f(0,x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

f in $[-1,\infty)$ $\underbrace{4x\,diffb}_{Bsp(2758)}$, 3x stetig diffb d.h Vor S5.3.1 erfüllt in $\overset{o}{I}$

$\frac{1}{(\sqrt{1+x})^p}$, $p\in\mathbb{N}$ stetig wegen

Bsp:(2401) (...) $h(x)=\sqrt{x}$, stetig in x_0 $\forall$ $x_0>0$ $\Rightarrow$

$\sqrt{1+x}$, stetig in x_0 $\forall$ $x_0>-1$ d.h. in $\overset{o}{I}$

b) Zeige für $|x| \le \frac{1}{5}$ die Restgliedabschätzung $|R_4(0,x)| < \frac{1}{4} 10^{-3}$ und berechne $\sqrt{10}$ bis auf einen Fehler von 10^{-3}

Für $|x| \le \frac{1}{5}$ gilt $|R_4(0,x)| \le \frac{5}{128} \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{4*325^3} < \frac{1}{4*1000}$

Für $x=\frac{1}{9}$: $\sqrt{10} = 3*\sqrt{\underbrace{1+1/9}_{\frac{10}{9}}} = 3(1+\frac{1}{2}\ \frac{1}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + R_4(0, \frac{1}{9})$

Bis auf einen Fehler von $3\frac{1}{4*10^{-3}} < 10^{-3}$ gilt

$\sqrt{10}$ ¿ $3(1+\frac{1}{2}\ \frac{1}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}\right)^3) = 3\frac{12295}{11664} = \frac{12295}{3888} = 3{,}16229$