A5.4.1 Sei $f_n(x)=(1+x/n)^n$ für $x\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass die Voraussetzungen von S5.4.1 für jedes abgeschlossene Intervall $[a,b]$ erfüllt sind. Gib durch Anwendung dieses Satzes einen neuen Beweis für die Differenzierbarkeit von e^x.

A5.4.2 Untersuche, ob S5.4.1 auf die Folge (f_n) mit $f_n(x)=(1-x)x^n$, $0\leq x\leq 1$ angewandt werden kann.

A5.5.1 Zeige: $(\tan x)'=1/\cos^2 x$ für $(k-1/2)\pi/2<x<(k+1/2)\pi/2$, mit $k\in\mathbb{Z}$ und die Tangensfunktion nimmt auf jedem der obigen Intervalle jede reelle Zahl als Wert an.

A5.5.2 Beweise die Teile b)-d) S5.5.2

A5.5.3 Benutze die Beh5.5.1 um zu zeigen:
$\arcsin x=\pi/2-\arccos x \;\forall\; x\in(-1,1)$
Finde eine analoge Beziehung zwischen arctan und arccot.

A5.5.4 Zeige:
- Die Funktion $\sinh x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und die Wertemenge ist gleich $\mathbb{R}$.
Ihre Umkehrfunktion Arsinh: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt Areasinus hyperbolicus.
- Die Funktion $\cosh x$ ist auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend und die Wertemenge ist gleich $[1,\infty]$.
Ihre Umkehrfunktion Arcosh: $[1,\infty]\to\mathbb{R}_+$ heißt Areacosinus hyperbolicus.

A5.6.1 Diskutiere, in welchem Sinne folgende Aussage richtig ist:
Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen addieren sich deren Argumente

A5.6.2 Finde den Hauptwert des Arguments und des Logarithmus für die folgenden Zahlen -1, i, $1+i$, $2(1-i)$, $-i$

A5.6.3 Zeige: Genau dann ist $e^z=1$, wenn $z=2k\pi$ ist für ein $k\in\mathbb{Z}$.

A5.6.4 Zeige $e^{\pm\pi i}=-1$

A5.6.5(3007) Zeige, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n^2})$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen eine auf $(0,\infty)$ differenzierbare Funktion konvergiert. Bestimme auch die Ableitung der Grenzfunktion (GF)

Lös: $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n^2})$ auf $[0,k]$ $\forall$ $k\in\mathbb{R}_+$, gleichmäßig konvergent, GF auf $(0,k)$ differenzierbar. Gliedweises differenzieren:
$I=[0,k]$, $g_n(x)=\log(1+x/n)$ auf $\mathbb{R}$ stetig, d.h. auf I stetig
$\forall$ $n\in\mathbb{N}$ im Inneren differenzierbar, da $(g_n(x))'=\frac{1}{1+x/n^2}\frac{1}{n^2}=$
$\frac{1}{n^2+x}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x}$ gleichmäßig konvergent auf $(0,k)$, weil
$x>0$: $\frac{1}{n^2+x} \underset{x>0}{<} \frac{1}{n^2}$ $\forall$ $x\in(0,k)$ konvergent nach Majorantenkriterium und für
$x=0$: $g_n(0)=0$, also $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(0)=0$ konvergent $\Rightarrow$
$\sum_{n=1}^{\infty} g_n=\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x/n^2)$ gleichmäßig konvergent auf $[0,k]$ gegen g (GF),
differenzierbar auf $(0,k)$ mit $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x/n^2)$ auf $[0,\infty)$ nicht gleichmäßig konvergent
Z.z. $\exists$ $\varepsilon>0$ $\forall$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\exists$ $x\in[0,\infty)$, $\exists$ $n\in\mathbb{N}$ $n\geq N \Rightarrow |\log(1+x/n^2)|>\varepsilon$
Bew: Wähle $\varepsilon=\log 2$, Sei $N\in\mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle $x=2N^2$, $n=N$,
dann $1+x/n^2=1+\frac{2N^2}{N^2}=3>2$, $|\log(1+x/n^2)|>\varepsilon$

Eigener Versuch:
//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//
//1.)Vor:Seien f,g: $M \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ bzw.$\mathbb{R}$://
// Funktionen f und $g:I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar in $x_0 \in I$//
//Beh:a)$f \pm g$ sind differenzierbar in z_0 und $(f \pm g)'(z_0)=f'(z_0) \pm g'(z_0)$.//
// b) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ist αf differenzierbar in z_0 und //
// $(\alpha f)'(z_0)= \alpha f'(z_0)$.//
//2.)Kettenregel//
// Vor:Sei $f:A \to B$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{\circ}{A}$,$f(z_0) \in \overset{\circ}{B}$, und sei $g:B \to \mathbb{C}$ //
// differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh:$g \circ f:A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(g \circ f)'(z_0)=g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$ //
// (Kettenregel) $(g \circ f)'=(g' \circ f)f'$.//
//Folgerungen://
//4.)$(\log x)'=1/x$, $x>0$//
//**S5.4.1**(3000) Gliedweises differenzieren von Folgen und Reihen//
//Vor:(.)Funktionenfolge $(f_n):I \to \mathbb{R}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$,//
// (..)(f_n) auf I differenzierbar//
// (…)(f_n')auf I gleichmäßig konvergent//
// (….)(f_n) wenigstens für ein $x=x^* \in I$ konvergent.//
//Dann//
// ● konvergiert (f_n) auf I gleichmäßig und //
// ● Grenzfunktion $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ ist auf I differenzierbar: //
// $f'(x)=(\lim_{n\to\infty} f_n')(x)$ d.h. $(\lim_{n\to\infty} f_n)'=\lim_{n\to\infty}(f_n')$//
*//**D4.5.1** (2600)Gleichmäßige Konvergenz//*
// Sei $M \subset \mathbb{R}$ oder $M \subset \mathbb{C}$. Sei $f_n:M \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Funktionsfolge//
// $(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M gegen $f(z):M \to \mathbb{C}$: $\Leftrightarrow$//
//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z \in M$) mit//
// $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n \geq n_0(\varepsilon)$ <u>und</u> $\forall\ z \in M$.//
*//**S4.5.2** (2601)Majorantenkriterium von Weierstrass//*
//Vor:Sei $M \subset \mathbb{R}$ oder $M \subset \mathbb{C}$ und sei $f_n:M \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.//
// Sei $|f_n(z)| \leq a_n\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $\forall\ z \in M$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.//
//Beh:$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sind gleichmäßig auf M konvergent.//
//(1302)Bsp:1.) $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $a_n:=\sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \leq 1+\sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1}-1/k) \underset{S1.7.1}{=}$//
// $1+1-1/n \underset{n\to\infty}{\to} 2 \underset{S2.2.2}{\Rightarrow}$ konvergent//
//S2.2.2 (1301)Vor:$(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton und beschränkt Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//
Mit S5.4.1 Bew $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n^2})$ auf $[0,\infty)$
gleichmäßig konvergent gegen eine auf $(0,\infty)$ differenzierbare Funktion .
● Vor S5.4.1 (.) ok:$x \in [0,\infty)$, d.h, $x \in [0,c]\ \ \forall\ c \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$
$(f_n)=\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n^2}):I \to \mathbb{R}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$, $I=[0,c] \subset \mathbb{R}$//
● Vor S5.4.1 (..) ok: $f_n=\sum_{k=1}^{n} \log(1+x/k^2) \Rightarrow$

$f_n' \underbrace{=}_{S5.1.61a),b),2.),Folgerungen4.)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x/k^2}\frac{1}{k^2}$ ∀ $(1+x/k^2) \underbrace{>}_{Folgerungen4.)} 0$ ⇒

f_n auf I differenzierbar ∀ $(1+x/k^2)>0$ d.h. ∀ $x>-k^2$ d.h. ∀ $\underbrace{x}_{\in[0,\infty)} \geq 0$

● Vor S5.4.1 (…) ok: ∀ $x\in[0,c]$ gilt

$(f_n)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x/k^2}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+x} \underbrace{\leq}_{x\geq 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ∀ $x\in[0,c]$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \ldots \frac{1}{n^2+x} \uparrow$ ⇒ $0 < \frac{1}{1+x} < \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k^2+x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underbrace{\leq}_{(1302)Bsp:1.)} 2 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+x}$ konvergent ⇒ $(f_n)' \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} (f)'$ (f Grenzfunktion)

● Vor S5.4.1 (….) ok: $x^*=0$: $(f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{0}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1) = 0$ konvergent

$\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{Vor\ erfüllt}}_{S5.4.1}$ $(f_n) = \sum_{n=1}^{n} \log(1+\frac{x}{n^2})$ konvergiert auf $I=[0,c]$ gleichmäßig und //

Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \log(1+\frac{x}{n^2})$

ist auf I differenzierbar:

$f'(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n') = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+x} = (\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \log(1+\frac{x}{n^2}))' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x/n^2)$ auf $[0,\infty)$ nicht gleichmäßig konvergent

//**S4.5.1**(2601)Funktionenreihe Cauchy-Kriterium für gleichm Konvergenz//

//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$, $f_n: M\to\mathbb{C}$ für $n\in\mathbb{N}$ gegeben.//

//Beh:$(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M (gegen Funktion $f(z):=M\to\mathbb{C}$)

// ⇔ $\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0(\varepsilon)$

#Bew: $|f_n(z)-f_m(z)| = |\sum_{k=1}^{n} \log(1+x/k^2) - \sum_{k=1}^{m} \log(1+x/k^2)| = |\sum_{k=n+1}^{m} \log(1+x/k^2)|$

Z.z. $\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ N\in\mathbb{R}_+\ \exists\ x\in[0,\infty),\ \exists\ k\in\mathbb{N}\ k>n+1\geq N \Rightarrow |\log(1+x/n^2)|>\varepsilon$

Wähle $\varepsilon=\log 2$, Sei $N\in\mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle $x=2N^2$, $n=N$,

dann $1+x/k^2 = 1+\frac{2N^2}{N^2} = 3 > 2$, $|\log(1+x/k^2)|>\varepsilon$

A5.6.6 Bestimme alle $x\in\mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion differenzierbar ist und bestimme dort die Ableitung

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x<-2\pi \\ \cos x\cdot e^{|x|} & -2\pi\le x\le \pi/2 \\ Ar\sinh x & \pi/2<x<2\sqrt{6} \\ \log(x+5) & 2\sqrt{6}\le x \end{cases}$$

Hinweis: Zeige Arsinh $x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

//(2531)Korollar S4.4.2//
//(..)sinh $x:R\to R$ ist $\uparrow$ und stetig, $f(R)\to R$ d.h. er hat //
// Umkehrfunktion:Arsinh: $R\to R\uparrow$ und stetig.//
// (...)cosh $x:[0,\infty)\to[1,\infty)$ ist$\uparrow$ und stetig und surjektiv, seine //
// Umkehrfunktion Arcosh $x:[1,\infty)\to[0,\infty)$ ist $\uparrow$ und stetig.//

//**S3.6.4**(2150)Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen $\forall\ z\in\mathbb{C}$ gilt://

// $\sinh z=-\sinh(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion, KR R=∞//

//3.) $\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2$ (Additionstheoreme)//
// $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$//
// speziell: $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$//

//**D3.6.4*(2150)*** Hyperbolische Funktionen//
// $\cosh z:=1/2(e^z+e^{-z})\ \forall\ z\in\mathbb{C}$ (Cosinus hyperbolicus)//
// $\sinh z:=1/2(e^z-e^{-z})\ \forall\ z\in\mathbb{C}$ (Sinus hyperbolicus)//

Lös: Arsinh $x=y \Leftrightarrow x=\sinh y\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \underset{Korollar S4.4.2}{\uparrow}$ (Arsinh : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \underset{Korollar S4.4.2}{\uparrow}$)

$e^y=1/2(e^y+e^{-y})+1/2(e^y-e^{-y})=\cosh y+\sinh y$, $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$,

$e^y=\sqrt{1+\sinh^2 y}+\sinh y$

$e^{\text{Arsinh } x}=\sqrt{1+x^2}+x$, Arsinh $x=\log(x+\sqrt{1+x^2}):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

e^{-x}, $\cos x$, Arsinh x differenzierbar auf $\mathbb{R}$,

$e^{|x|}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$\log(x+5)$ differenzierbar auf $(-5,\infty)$,

Allgemein: $f(x)\begin{cases} f_1(x), & x\le a \\ f_2(x), & x>a \end{cases}$ ... f_1,f_2 stetig differenzierbar,

$f(x)$ differenzierbar in a, falls f stetig in a und

$f_2'(a)=f_1'(a)$, d.h. $\lim_{x\to a^+}\frac{f_2(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f_1(x)-f(a)}{x-a}$

-2π: $e^{-(-2\pi)}=e^{2\pi}*\underbrace{\cos(-2\pi)}_{=1}=e^{|-2\pi|}=e^{2\pi}\Rightarrow$ f stetig in -2π.

$(e^{-x})'=-e^{-x}\ \underset{x\to-2\pi}{\rightarrow}\ -e^{2\pi}\ \vee$

$(\cos xe^{|x|})'\underset{x<0}{=}(\cos xe^{-x})'=(-\sin xe^{-x}+\cos x(-e^{-x})=$

$(\sin x-\cos x)e^{-x}\begin{cases}\underset{x\to-2\pi}{\longrightarrow}-e^{2\pi} \\ \underset{x\to0}{\longrightarrow}-1\end{cases}\Rightarrow$ f differenzierbar in -2π

$(\cos xe^{|x|})'\underset{x>0}{=}(\cos xe^{x})'=(-\sin x+\cos x)e^x\underset{x\to0}{\rightarrow}1$,

f nicht differenzierbar in 0

$(\cos xe^{|x|})\underset{x\to\pi/2}{\rightarrow}0\ \vee$ Arsinh $\underset{=\pi/2}{x}$ $x>0\Rightarrow$ f ist nicht stetig in $\pi/2\Rightarrow$

f nicht differenzierbar in $\pi/2$

Arsinh $x=\log(x+\sqrt{1+x^2}\underset{x\to2\sqrt{6}}{\rightarrow}\log(2\sqrt{6}+\sqrt{1+24})=\log(5+2\sqrt{6})$,

$\log(5+x) \underbrace{\to}_{x\to 2\sqrt{6}} \log(5+2\sqrt{x}) \Rightarrow$ f stetig in $2\sqrt{6}$

$(\text{Arsin } x)' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underbrace{\to}_{x\to 2\sqrt{6}} 1/5$

$(\log(5+x))' = \dfrac{1}{5+x} \to \dfrac{1}{5+2\sqrt{6}} \Rightarrow$

f nicht differenzierbar in $2\sqrt{6}$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & x < -2\pi \\ \sin x e^{-x} - \cos x \underbrace{e^{-x}}_{\to -1 (x\to 0^+)} & -2\pi \le x < 0 \\ -\sin x e^{x} + \cos x \underbrace{e^{x}}_{\to 1 (x\to 0)} & 0 < x < \pi/2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} & 0 < x < 2\sqrt{6} \\ \dfrac{1}{5+x} & 2\sqrt{6} < x \end{cases}$$

f ist differenzierbar in $\mathbb{R}\setminus\{0,\pi/2,2\sqrt{6})$

A5.6.10 Berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$

//**S5.2.8**(2850)Grenzwertregeln von de l'Hospital//

//Vor:Sei $-\infty<a<b\le\infty$, $I=[a,b)\subset\mathbb{R}$. Die Funktionen $f,g:I\to\mathbb{R}$ seien //

// differenzierbar auf I und $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in I$. $\exists\ \lambda := \lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ .//

//Beh: Gilt (.) $\lim\limits_{x\to b_-} f(x) = \lim\limits_{x\to b_-} g(x) = 0$ oder (..) $\lim\limits_{x\to b_-} |g(x)| = \infty$ so//

// $\exists\ \lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda = \lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda=\infty,\ \lambda=-\infty)$//

Lös: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} \underbrace{=}_{S5.2.8} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1\cdot e^x}{1+e^x}}{\dfrac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}$

Lös:...$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!} - 1 - x\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cancel{\dfrac{x^k}{2^k k!}}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!} - x(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{8}) - \sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^{k-1}(k-1)!}}{x^3} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{8}}{x^3} + \sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^{k-3}}{k!} - \sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^{k-3}}{2^{k-1}(k-1)!}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{8}}{x^3} + x\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^{k-4}}{k!} - x\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^{k-4}}{2^{k-1}(k-1)!}\right) =$

$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{24}$

c) $\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$.

Lös: $\lim_{x\to\pi/4} (\tan x)^{\tan 2x} = \lim_{x\to\pi/4} e^{\log(\tan x)\tan 2x} = \lim_{x\to\pi/4} e^{\tan 2x * \log(\tan x)} =$

$$\text{NR: } \lim_{x\to\pi/4} \frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{\tan 2x}} \underset{\text{d'lHosp}\ \lim_{x\to\pi/4} \log(\tan x)=0 = \lim_{x\to\pi/4} 1/\tan 2x}{=}$$

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(\tan 2x)^2}\cdot\frac{1\cdot 2}{(\cos 2x)^2}} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{2}{(\sin 2x)^2}} =$$

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\sin^2 2x}{-2\sin x\cos x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$\lim_{x\to\pi/4} (\tan)^{\tan 2x} = e^{-1}$.

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin^3 x)(1-\cos x)}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2}$

$$\text{Lös:..} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin^3 x(1-\cos x)(1+\cos x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}{(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2)(1+\cos x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}{(1+\cos x)((\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3})^2-4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}{(1+\cos x)2(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}-1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{(1+\cos x)2(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}-1)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{(1+\cos x)2((1+x^3)(1-x^3)-1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{(1+\cos x)2((1-x^6-1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{-(1+\cos x)2x^6} =$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5}_{\to 1} \underbrace{\frac{(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{-2(1+\cos x)}}_{\to -2} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4} = 1$$