A6.5.1 Gegeben sei eine rationale Funktion $r\in\mathbb{R}(x)$. Finde eine Stammfunktion.

//***S1.9.1'''***(1104)*Divisionssatz*//
//*Vor: Polynome* $S(z)\not\equiv 0$ *,* $P(z)$ *beliebig.*//
//*Beh:* $\exists$ *eindeutig bestimmte Polynome* $Q(z)$ *und* $R(z)$*:* $P=Q*S+R$*,*
$\gamma(R)<\gamma(S)$.//

Lös:Sei $R=P/Q \underset{\gamma(P)\geq\gamma(Q)}{\underbrace{\overset{S1.9.1'''}{\Rightarrow}}}$ $\exists$ Polynome $P_1, P_2\in\mathbb{R}[x]$: $R=P/Q=P_1+P_2/Q$ und $\gamma(P_2)<\gamma(Q)$.

Da man zu P_1 sofort eine Stammfunktion angeben kann, soll im Weiteren

angenommen werden, dass $\gamma(P)<\gamma(Q)$ ist. Dann kann man nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung im Reellen die Funktion R in eine Summe von einfachen Termen zerlegen. Es bleibt also zu zeigen, dass

man zu jedem einzelnen Term eine Stammfunktion angeben kann. Dies wollen wir jetzt tun, wobei in jedem Fall durch Differenzieren nachgeprüft werden kann, dass die angegebene Funktion F tatsächlich die Stammfunktion zu f ist:

1.) $f(x)=(x-x_0)^{-1}$ hat die Stammfunktion $F(x)=\log|x-x_0|$
2.) $f(x)=(x-x_0)^{-j}$ hat die Stammfunktion $F(x)=(1-j)^{-1}(x-x_0)^{1-j}$ $\forall$ $j\in\mathbb{N}: j\geq 2$.
3.) $f(x)=(\alpha x+\beta)/(x^2-ax+b)$, $a^2<4b$ damit der Nenner keine reelle Nullstelle mehr hat.

//**S5.5.2**(3004)Es gilt c)arctan x)'$=\frac{1}{1+x^2}$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$.//

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//
//2.)Kettenregel//
// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei $g:B\to\mathbb{C}$ //
// differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh:$g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ //
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.//

Wir zerlegen f=g+h

$$f(x)=\underbrace{\frac{\alpha}{2}\frac{2x-a}{x^2-ax+b}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{\beta+a\alpha/2}{x^2-ax+b}}_{h(x)}.$$

S5.1.6: $G(x)=(\alpha/2)\log|x^2-ax+b|$ ist Stammfunktion zu g

S5.5.2 c),S5.1.6: $H(x)=\frac{2\beta+a\alpha}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}$ ist Stammfunktion zu h.

$$\# \qquad H'(x)=\frac{2\beta+a\alpha}{\sqrt{4b-a^2}}\frac{1}{1+\left(\frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)^2}\left(\frac{2x}{\sqrt{4b-a^2}}-\frac{a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)'=$$

$$\# \qquad \frac{2\beta+a\alpha}{\sqrt{4b-a^2}}\frac{1}{\frac{4b-a^2+4x^2-4ax+a^2}{4b-a^2}}\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}=\frac{(2\beta+a\alpha)}{4x^2-4ax+4b}=h(x)$$

4.) $f(x)=\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}$

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^{n-1}}+2(2n-3)\int\frac{dx}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)$$

Weiter rekursiv bis 3.) angewendet werden kann

$F'(x)=\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{2(x^2+ax+b)^{n-1}-(2x+a)(n-1)(x^2+ax+b)^{n-2}(2x+a)}{(x^2+ax+b)^{2n-2}}+\right.$

$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(x^2+ax+b)^{n-2}(2(x^2+ax+b)-(2x+a)^2(n-1))}{(x^2+ax+b)^{2n-2}}+\right.$

$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(2x^2+2ax+2b-(4x^2+4ax+a^2)(n-1))}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$

$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(2x^2+2ax+2b-4nx^2-4anx-na^2+4x^2+4ax+a^2)}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$

$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(6x^2-4nx^2+6ax-4anx+2b-na^2+a^2)}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$

$\left.2(2n-3)\frac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{(6x^2-4nx^2+6ax-4anx+2b-na^2+a^2)}{(x^2+ax+b)^n}+\right.$

$\left.(4n-6)\frac{x^2+ax+b}{(x^2+ax+b)^n}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{6x^2-4nx^2+6ax-4anx+2b-na^2+a^2+4nx^2+4anx+4nb-6x^2-6ax-6b}{(x^2+ax+b)^n}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{-4b-na^2+a^2+4nb}{(x^2+ax+b)^n}\right)=\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\left(\frac{n(4b-a^2)-(4b-a^2)}{(x^2+ax+b)^n}\right)=$

$\frac{1}{(n-1)(4b-a^2)}\frac{(n-1)(4b-a^2)}{(x^2+ax+b)^n}=f(x)$

5.) $f(x)=\dfrac{\alpha+\beta x}{(x^2+ax+b)^n}$, $a^2<4b$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//

//1.)Vor:Seien $f,g\colon M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in \overset{\circ}{M}$.//

//Beh: d)Ist $g(z_0)\neq 0$ (und damit $\neq 0$ in $U_\delta(z_0)\subset M$... $\Rightarrow$ //

// $\exists$ $g(z)\neq 0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$), g differenzierbar, d.h. stetig, so ist f/g

// differenzierbar in z_0 und //

// $(f/g)'(z_0)=\dfrac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//

Lös: $f(x)=\underbrace{\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{2x-a}{(x^2+ax+b)^n}}_{f_1(x)}+\underbrace{\dfrac{\beta+a\alpha/2}{(x^2+ax+b)^n}}_{f_2(x)}$

$F_1(x)=\dfrac{-\alpha}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+ax+b)^{n-1}}$ ist Stammfunktion zu f_1:

\# $F_1'(x)=\dfrac{-\alpha}{2(n-1)}((x^2+ax+b)^{-n+1})'=\dfrac{-\alpha}{2(n-1)}(-n+1)(x^2+ax+b)^{-n})(2x+a)=f_1(x)$

\# $F_2(x)=(\beta-\dfrac{\alpha a}{2})\displaystyle\int\dfrac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx$ ist Stammfunktion zu f_2.

\# Weiter rekursiv nach 4.) bis 3.) angewendet werden kann
Es reicht daher aus, eine Stammfunktion $g_n(x)=(x^2-ax+b)^{-n}$ zu finden?
Es gilt:: $(4b-a^2)(n-1)g_n(x)=\dfrac{2(2n-3)}{(x^2-ax+b)^{n-1}}+\dfrac{d}{dx}\dfrac{2x-a}{(x^2-ax+b)^{n-1}}$?????.
(Aus Vorlesung, verstehe ich leider nicht, hat jemand Hilfe für mich?)
Der 2. Term hat natürlich eine Stammfunktion, während der 1. Term,

bis auf eine Konstante, gleich g_{n-1} ist. Daher kann man aus dieser Formel rekursiv eine Stammfunktion zu g_n berechnen

Es sei noch erwähnt, dass man die oben angegebenen Stammfunktionen sowie viele weitere in zahlreichen Formelsammlungen nachschlagen kann.

A6.5.2 Führe eine Partialbruchzerlegung im Reellen für folgende rationale Funktionen durch und finde die Stammfunktionen:

$\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$, $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$, $\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$

A6.5.3

a) $r(x)=\dfrac{x^4+2x^3}{(x-2)^3(3x+1)^2\underbrace{(x^2+2)}_{\text{keine reellen Nst}}}=$

$\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}+\dfrac{D}{3x+1}+\dfrac{E}{(3x+2)^2}+\dfrac{ax+b}{x^2+2}$

$x^4+2x^3=A(x-2)^2(3x+1)^2(x^2+2)+B(x-2)(3x+1)^2(x^2+2)+$
$C(3x+1)^2(x^2+2)+D(x-2)^3(3x+1)(x^2+2)+E(x-2)^3(x^2+2)+$
$(ax+b)(x-2)^3(3x+1)^2$

b) $r(x) = \dfrac{x^6 + 4x^3}{\underbrace{(x^2 - 1)^2}_{[(x-1)(x+1)]^2} \underbrace{(x^2 - 6x + 10)}_{(x-3)^2+1 \text{ keine reellen Nst}}} =$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{ax+b}{x^2-6x+10} + \frac{cx+d}{(x^2-6x+10)^2} + \frac{ax+b}{(x^2-6x+10)^3}$$

A6.5.4 $\displaystyle\int_2^4 \frac{3x^2+x-1}{x^3-1}\,dx$

Lös: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow$

$(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1$ hat keine reellen Nullstellen $\Rightarrow$

$$\frac{3x^2+x-1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{ax+b}{x^2+x+1} \Rightarrow$$

$3x^2+x-1=Ax^2+Ax+A+ax^2+bx-ax-b \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 3 = A + a \\ 1 = A + b - a \\ -1 = A - b \end{array}\right\} \Rightarrow A=1,\ a=2,\ b=2 \Rightarrow$$

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x+2}{x^2+x+1}\right)dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx + \int_2^4 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$\left(\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+1/2)^2+1} = \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)\right)^2+1},\right.$$

$u=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1/2)$, $du=\frac{2}{\sqrt{3}}dx$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}du$, $x=2 \Rightarrow u=\frac{5}{\sqrt{3}}$, $x=4 \Rightarrow u=\frac{9}{\sqrt{3}}$,

$$\left.\frac{4}{3}\int_{5/\sqrt{3}}^{9/\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,du\ \right)$$

$$\log(x-1)\Big|_2^4 + \log(x^2+x+1)\Big|_2^4 + \frac{4\sqrt{3}}{3*2}\arctan u\Bigg|_{\frac{5}{\sqrt{3}}}^{\frac{9}{\sqrt{3}}} =$$

$$\log 3 - \log 1 + \log 21 - \log 7 + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{9}{\sqrt{3}}$$

b) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2x^3-4x^2-18x-54}{x^4-81}\,dx$

Lös: $x^4-81 = \underbrace{(x^2-9)}_{(x-3)(x+3)} * \overbrace{(x^2+9)}^{\text{keine reellen Nullst}}$

$$\int_4^5 \left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{ax+b}{x^2+9}\right)dx =$$

$(2x^3-4x^2-18x-54=$

$Ax^3+3Ax^2+9Ax+27A+Bx^3+3Bx^2+9Bx-27B+ax^3+9ax+bx^2-9b$,

$A=-1$, $B=+1$, $a=2$, $b=0)$

$$\int_4^5 \left(\frac{-1}{x-3} + \frac{1}{x+3} + \frac{2x}{x^2+9}\right)dx = -\log(x-3)\Big|_4^5 + \log(x+3)\Big|_4^5 + \log(x^2+9)\Big|_4^5 =$$

$$\log 2 + \log 1 + \log 8 - \log 7 + \log 34 - \log 25 = \log\left(\frac{8*34}{2*7*25}\right) =$$

$\log 136/175$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x^5+x+1}{x^4+1}dx - \int\limits_0^1 (x+\frac{1}{x^4+1})dx$

Lös: $\underbrace{x^4+1}_{\textit{keien reellen Nullst}} = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+cx^3+dx^2+ax^3+acx^2+adx+bx^2+bcx+bd$

$x^4+ax^3+cx^3+acx^2+bx^2+dx^2+adx+bcx+bd$

#$a+c=0$, $ac+b+d=0$, $ad+bc=0$, $bd=1 \Rightarrow c=-a$, $d=\frac{1}{b}$, $-a^2+b+\frac{1}{b}=0$, $a\frac{1}{b}-ab=0 \Rightarrow$

#$a(\frac{1}{b}-b)=0 \Rightarrow b=1$ oder $a=0 \Rightarrow$

#$b=1$: $d=1$, $ac+2=0, ac=-2$, $-a^2=-2$, $a=\sqrt{2}$, $c=-\sqrt{2}$

#$a=0$: $c=0$, $b+d=0$, $b=-d$, $bd=-b^2=-d^2=1 \Rightarrow b=i$, $d=i$, $bd=-1$ Widerspruch

$a+c=0$, $c=-a$, $b+1/b-a^2=0$, $b+d+ac=0$, $a\frac{1}{b}-ba=0 \Rightarrow a=a+(\frac{1}{b}-b)=0$,

$ad+bc=0$, $bd=1 \Rightarrow b^2+1=0 \Leftrightarrow b=\frac{1}{b}$, $b^2=1$, $b=1$, $a^2=2$, $a=\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1},$$

$b+d=1 \Rightarrow b=1/2=d$, $(ax+bx)=0 \Rightarrow a=\sqrt{2}/4$, $c=-\sqrt{2}/4$ $\left(\frac{2x}{4\sqrt{2}}=\frac{x\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)$

$$\int\limits_0^1 xdx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_0^1 \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=$$

$\int\limits_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{\underbrace{x^2+\sqrt{2}x+1}_{\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x+\sqrt{2}/2))^2+1)}}dx$, (denn $\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x+\frac{\sqrt{2}}{2}))^2+1)=\frac{1}{2}(2(x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2})+1)=$

$\frac{1}{2}(2x^2+2\sqrt{2}x+1+1)=x^2+\sqrt{2}x+1)$

Substitution $u=\sqrt{2}(x+\sqrt{2}/2)$, $du=\sqrt{2}dx$,

$x=0 \Rightarrow u=1$, $x=1 \Rightarrow u=1+\sqrt{2}$

$\int\limits_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{\underbrace{x^2-\sqrt{2}x+1}_{\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x-\sqrt{2}/2))^2+1)}}dx$, (denn $\frac{1}{2}((\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}))^2+1)=\frac{1}{2}(2(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2})+1)=$

$\frac{1}{2}(2x^2-2\sqrt{2}x+1+1)=x^2-\sqrt{2}x+1)$

Substitution $u=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}/2)$, $du=\sqrt{2}dx$,

$x=0 \Rightarrow u=-1$, $x=1 \Rightarrow u=\sqrt{2}-1$

$$\int\limits_0^1 \frac{2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=2\int\limits_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{u^2+1}du$$

$$2\arctan u\Big|_1^{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_0^1\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_0^1\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{4\sqrt{2}}(\log(x^2+\sqrt{2}+1)\Big|_0^1)-\log(x^2-\sqrt{2}x+1)\Big|_0^1)+$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}(2\arctan u)\Big|_1^{1+\sqrt{2}}+2\arctan u\Big|_{-1}^{-1+\sqrt{2}}$$

A6.5.5..............

Lös:tan $\alpha/2=t \Rightarrow$ tan x=sin x/cos x=$\tan(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}}=$

$\frac{2t}{1-t^2}$, auf $(0,\pi/2)$, sin $x\geq 0$, cos $x\geq 0$

sin x=$\sqrt{1+\cos^2 x}$, cos x=$\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{2t}{1-t^2}$,

$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{4t^2}{1-2t^2+t^2}$, $\sin^2 x(1-2x^2+t^2)=4t^2-\sin^2 x(4+t)$,

$\sin^2 x+1+2t^2+t^4=4t^2$, $\sin^2 x=\frac{4t^2}{1+2t^2+t^4}$, $0\leq\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\frac{4t^2}{1+t^2}}=\sqrt{\frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{(1+t^2)^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$t=\tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\arctan t$, $x=2\arctan t$, $dx=2\frac{t}{1+t^2}dt$, $x=0 \Rightarrow t=0$,

$x=\pi/2 \Rightarrow t=1$…..

$$\int_0^{\pi/2} r(\sin x\cos x)dx=\int_0^1 r\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}2\frac{1}{1+t^2}dt$$

A6.5.6 ????

Lös:$f(x)=\arccos x$, $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=-1(1-x^2)^{-1/2}\underset{\text{Bin Reihe}}{=}$

$-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$, $\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n$ integrierbar.

$\int_0^x\binom{-1/2}{n}(-t^2)^n dt=\binom{-1/2}{n}(-t)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\arccos x=\int_0^x f(x)dx+\underset{\arccos 0}{1}$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad\forall\ |x|<1$