Ü1 Zeige durch Induktion über n:Ist f auf einem Intervall I n mal differenzierbar, und ist die nte Ableitung von f die Nullfunktion, so ist f ein Polynom vom Grad höchstens gleich n-1

Ü2 Sei f mindestens (2n+1)mal stetig differenzierbar auf (a,b) für ein $n\in\mathbb{N}$ und gelte für ein $x_0\in(a,b)$:
$f'(x_0)=f''(x_0)=..=f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$.
Zeige:Dann hat f im Punkt x_0 kein lokales Extremum.

Ü3 Finde die Taylorreihe von $f(x)=\log x$ im Punkt $x_0=1$ und untersuche ihre Konvergenz.

Ü4 Lineare homogene Differentialgleichung 1.Ordnung
Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig und sei

$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ für ein $x_0\in I$. Sei $y_0\in\mathbb{R}$.

a)Zeige: Die Funktion $y(x)= y_0e^{F(x)}$ erfüllt die beiden Bedingungen $y'(x)=f(x)y(x),\ \forall\ x\in I,\ y(x_0)=y_0$.
Man nennt die 1. der beiden Gleichungen eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung (und y eine Lösung derselben), während die 2. auch Anfangsbedingung genannt wird. Beide zusammen stellen ein Anfangswertproblem dar.

b)Zeige: Ist y irgend eine Funktion auf I, die beiden Bedingungen genügt, so ist $y(x)e^{-F(x)}$ konstant, und durch Einsetzen von $x=x_0$ folgt dann $y(x)=y_0e^{F(x)}$
Schließe aus a) und b), daß das obige Anfangswertproblem genau ein Lösung y besitzt..

Ü5 Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen.
Seien $I_1,I_2\subset\mathbb{R}$ 2 Intervalle, seien $f:I_1\to\mathbb{R}$ und $g:I_2\to\mathbb{R}$ stetig und sei $g(x)>0$ auf I_2. Seien weiter F und G Stammfunktionen zu f bzw g (also G streng monoton wachsend auf I_2). Seien schließlich $x_0\in I_1$, $y_0\in I_2$.
a)Zeige: Ist $I\subset I_1$ ein Intervall und ist $y:I\to I_2$ stetig differenzierbar mit
$y'(x)=f(x)g(y(x))\ \forall\ x\in I,\ y(x_0)=y_0,$ (*)
so folgt

$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\int_{x_0}^{x} y'(t)/g(y(t))dt=G(y(x))-G(y_0)$ für $x\in I$.

Da G injektiv ist, kann diese Gleichung nach y(x)aufgelöst werden und wir erhalten
$y(x)=G^{-1}(G(y_0))+F(x)-F(x_0))\ \forall\ x\in I.$ (**)

b)Zeige: Ist $I\subset I_1$ ein Intervall und so, dass für $x\in I$ immer gilt $G(y_0)+F(x)-F(x_0)\in G(I_2)$ und definiert man y durch (**), so erfüllt y die Bedingung (*)
Schließe aus a) und b), daß das Anfangswertproblem (*) auf dem in b) angegebenen Intervall genau 1 Lösung y besitzt.

A6.6.1 Finde die Taylorreihe von $f(x)=\log x$ an der Stelle $x_0=2$ und bestimme ein Intervall, auf dem das Restglied $r_n(x)$ gegen 0 konvergiert.

Lös: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, …

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. $f^{(n)}(2)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k+r_n(x)$$

$$r_n(x)=(x-2)^{n+1}\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(n+1)!}=(x-2)^{n+1}\frac{(-1)^n(n)!}{\xi^{n+1}(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(n+1)}\left(\frac{x-2}{\xi}\right)^{n+1}$$

konvergiert für $\left|\dfrac{x-2}{\xi}\right|\leq 1 \Leftrightarrow |x-2|\leq|\xi|$ falls $x\in[1,3]$,

$\xi\in[1,3]$, $x-2\in[-1,1]$, $\left|\dfrac{x-2}{\xi}\right|\in[0,1]$, $r_n\to 0$

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k k!}(x-2)^k.$$

Besseres Intervall: $f(x)=1/x=\dfrac{1}{2+(x-2)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=$

$\left(\left|\dfrac{x-2}{2}\right|<1,\ |x-2|<2,\ x\in(0,4)\right.$

$1/2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-2}{2}\right)^n=1/2\sum_{k=0}^{¥}(-1)^k\dfrac{(x-2)^k}{2^k}$ gleichmäßig konvergent

$\left|\dfrac{x-2}{2}\right|$ ¿ $r<1$, $\displaystyle\int(-1)^k\frac{(x-2)^k}{2^k}dx=\frac{(-1)^k\left(\frac{x-2}{2}\right)^{k+1}}{k+1}$

$f(x)-f(x_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}f'(x)dx$, $f(x)=f(x_0)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x-2}{2}\right)^{k+1}}{k+1}$

$=f(x_0)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x-2}{2}\right)^{k}}{k*2^k}$ für $x\in(0,4)$, $\sum g_n(x)$, $g_n(x)$ ¿ a^n, $0<a<1$

$\Rightarrow$ gleichmäßig konvergent, $a_nx^n<a^n$, $a<1$

A6.6.2 Löse folgende Anfangswertprobleme
Bestimme insbesondere in Teil b) das Intervall, auf dem $y(x)$ wirklich definiert ist.

a) $\begin{cases} y'(x)=\tan x*y(x) \\ y(0)=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'(x)=\sin x*e^{y(x)} \\ y(0)=1 \end{cases}$

A6.6.3 Zeige durch Induktion über n: Ist f auf einem Intervall I n-mal differenzierbar und ist die n-te Ableitung von f die Nullfunktion, so ist f ein Polynom vom Grade höchstens gleich n-1.

A6.6.4 Sei f mindestens (2n+1 mal stetig differnzierbar auf (a,b) für ein $n\in\mathbb{N}$ und gelte für ein $x_0\in(a,b)$:
$f'(x_0)=f''(x_0)=..=f^{(2n)}(x_0)=0$, $f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$. Zeige:Dann hat f im Punkt x_0 kein lokales Extremum.

A6.6.5 Finde die Taylorreihe von $f(x)=\log x$ im Punkt $x_0=1$ und untersuche ihre Konvergenz.

A6.6.6 Lineare homogene Differentialgleichung 1.Ordnung
Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig und sei

$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ für ein $x_0\in I$. Sei schließlich $y_0\in\mathbb{R}$.

a) Zeige: Die Funktion $y(x)=f(x)y(x)$, $\forall\ x\in I$, $y(x_0)=y_0$. Man nennt die 1. der beiden Gleichungen eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung (und y eine Lösung derselben), während die 2. auch Anfangsbedingung genannt wird. Beide zusammen stellen ein Anfangsproblem dar.

b) Zeige: Ist y irgend eine Funktion auf I, die beiden Bedingungen genügt, so ist $y(x)e^{-F(x)}$ konstant, und durch Einsetzen von $x=x_0$ folgt dann $y(x)=y_0e^{F(x)}$
Schließe aus a) und b), dass das obige Anfangswertproblem genau ein Lösung y besitzt..

A6.6.7 Differenzialgleichung mit getrennten veränderlichen.
Seien $I_1,I_2\subset\mathbb{R}$ 2 Intervalle, seien $f:I_1\to\mathbb{R}$ und $g:I_2\to\mathbb{R}$ stetig und sei $g(x)>0$ auf I_2. Seien weiter F und G Stammfunktionen zu f bzw g (also G streng monoton wachsend auf I_2). Seien schließlich $x_0\in I_1$, $y_0\in I_2$.

a) Zeige: Ist $I\subset I_1$ ein Intervall und ist $y:I\to I_2$ stetig differenzierbar mit
$y'(x)=f(x)g(y(x)=\ \forall\ x\in I,\ y(x_0)=y_0,\qquad (*)$
so folgt

$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\int_{x_0}^{x} y'(t)/g(y(t))dt=G(y(x))-G(y_0)$

für $x\in I$. Da G injektiv ist, kann diese Gleichung nach y(x) aufgelöst werden und wir erhaltwen
$y(x)=G^{-1}(G(y_0))+F(x)-F(x_0))\ \forall\ x\in I.\qquad (**)$

b) Zeige: Ist $I\subset I_1$ ein Intervall und so, daß für $x\in I$ immer gilt $G(y_0)+F(x)-F(x_0)\in G(I_2)$ und definiert man y durch (**), so erfüllt y die Bedingung (*)

Schließe aus a) und b), daß das Anfangswertproblem (*) auf dem in b) angegebenen Intervall genau 1 Lösung y besitzt.