A6.7.1 Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ nicht konvergiert.

A6.7.2 Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x^{-\alpha}dx$ für $\alpha \geq 1$ nicht konvergiert.

A6.7.3 Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\sin x dx$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ nicht absolut konvergiert.

Lös: $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{[(k+1)\pi]^\alpha} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx}_{>0,\text{unabh von } k}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Lös:.. $\lim_{a\to+\infty} \arctan a - \lim_{b\to-\infty} \arctan b = \pi/2-(-\pi/2)=\pi$

A6.7.4 Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Lös:.. $\lim_{a\to1^-} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a\to1^-} \arcsin x\Big|_0^a =$

$\lim_{a\to1^-} \arcsin a - \arcsin 0 = \pi/2-0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Lös:.. $\lim_{a\to+\infty} \arctan a - \lim_{b\to-\infty} \arctan b = \pi/2-(-\pi/2)=\pi$

c) $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}dx$

Lös:.. $= \lim_{a\to1} \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}dx = \lim_{a\to1}\left(-\frac{1}{5}\right) \int_0^1 \frac{x^5(-5x^4)}{\sqrt{1-x^5}}dx =$

($u=1-x^5 \Rightarrow x^5=1-u \Rightarrow x=0 \Rightarrow u=1$, $x=a \Rightarrow u=1-a^5$, $du=-5x^4$)

$\lim_{a\to1} -\frac{1}{5} \int_1^{1-a^5} \frac{1-u}{\sqrt{u}}du = -1/5 \lim_{a\to1} \int_1^{1-a^5} (u^{-1/2}-u^{1/2})du =$

$-1/5 \lim_{a\to1} (2u^{1/2}-\frac{2}{3}u^{3/2})\Big|_1^{1-a^5} =$

$-1/5[\lim_{a\to1} (2(1-a^5)^{1/2}-\frac{2}{3}(1-a^5)^{3/2})-(2-2/3)]=4/15$

d) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x(1+x)}dx$

Lös: $\ldots=\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_1^a \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\lim\limits_{a\to\infty} \log x\Big|_1^a -\log(1+x)\Big|_1^a =$

$$\lim_{a\to\infty}(\log a-\log(1+a))+\log 2=\lim_{a\to\infty}\overbrace{\Big(\log \underbrace{\frac{a}{1+a}}_{\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a}{1+a}=1,\log\text{ stetig}}}^{\log 1=0}+\log 2=\log 2$$

A6.7.5 Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz

a) $\int\limits_0^\infty \sin x dx$

Lös: $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_0^a \sin x dx=\lim\limits_{a\to\infty}(-\cos a+\cos 0)$, lim existiert nicht,

uneigentliches $\int$ existiert nicht

b) $\int\limits_0^1 \frac{\log x \cos x}{\sqrt{x}}dx$

Lös: $|\cos x|<1$, $|\log x| \underset{x\in(0,1)}{=} -\log x=\log 1/x=\log t \le t^\alpha=(1/x)^\alpha=x^{-\alpha}\ \ \forall\ \alpha\in R_+$

$\log t\ge 0$, $(1/x=t,\ t\subset(1,\infty))$,

$\left|\frac{\log x\cos x}{x^{1/2}}\right| \le \frac{x^{-\alpha}}{x^{1/2}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}}$, $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ konvergiert für $0\le\frac{1}{2}+\alpha<1$, Bsp 6.7.3, uneigentliches $\int$ konvergiert.