2.(1200) Kapitel Konvergenz von Folgen und Reihen

$\mathbb{K}$ steht im Folgenden immer für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Bez:Eine Abbildung φ: $\mathbb{N}\to\begin{Bmatrix}C\\R\end{Bmatrix}$ heißt $\begin{Bmatrix}komplexe\\reelle\end{Bmatrix}$ Zahlenfolge $\begin{Bmatrix}(z_n)\\(a_n)\end{Bmatrix}$ wobei $\begin{Bmatrix}z_n=\phi(n)\\a_n=\phi(n)\end{Bmatrix}$ $n\in\mathbb{N}$ bzw $\mathbb{N}_0$.

2.1(1200) Konvergenz und Grenzwert

D2.1.1(1200) Eine Folge$(z_n)=(z_n)_n^\infty\subset\mathbb{K}$ heißt konvergent $\Leftrightarrow$ $\exists$ $z\in\mathbb{K}$, sodass gilt $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|z_n-z|<\varepsilon$ $\forall$ $n\geq n_0$.
Dann heißt z der Grenzwert oder Limes der Folge (z_n).
Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.
Eine konvergente Folge mit Grenzwert 0 heißt Nullfolge.

Formulierung zu Nullfolge:
Eine Folge (z_n) in $\mathbb{K}$ heißt eine Nullfolge, falls gilt:
$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$: $n\geq N$ $\Rightarrow$ $|z_n|<\varepsilon$.
Ist dies der Fall, so sagen wir auch, dass (z_n) gegen 0 strebt oder gegen 0 konvergiert, und wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ oder $z_n\to0(n\to\infty)$.
Eine Folge (z_n)heißt konvergent, wenn ein $z\in\mathbb{K}$, existiert, für welches die Folge (z_n-z) eine Nullfolge ist. Ein solches z heißt dann Grenzwert der Folge: $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$ $\Leftrightarrow$ (z_n-z) ist Nullfolge für $(n\to\infty)$
Wir schreiben dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$ oder $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$
Wir nennen die Folge (z_n) beschränkt, falls es ein $K\in\mathbb{R}_+$ gibt mit $|z_n|\leq K$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

Bez:a) $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$

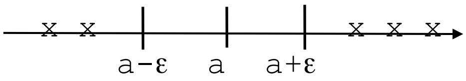
b) $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ sei eine Aussage $A_{(n)}$ festgelegt. Wir sagen dann:
(.) $A_{(n)}$ gilt für fast alle n, falls ein $n_0\in\mathbb{N}$ existiert, sodass $A_{(n)}$ $\forall$ $n\geq n_0$ richtig ist (Bsp Konvergenz Def).

Andere Formulierung:
$A_{(n)}$ gilt für fast alle $n\in\mathbb{N}$: $\Leftrightarrow$ $A_{(n)}$ gilt für $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.
(..) $A_{(n)}$ gilt für ∞ viele n, falls $|\{n\in\mathbb{N}|\ A_{(n)}$ ist richtig$\}|=\infty$

Bsp: $a_n=\begin{cases}1/n & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl}\\ 1 & \text{falls } n \text{ Quadratzahl}\end{cases}$

Bem:1.)Für ein $a\in\mathbb{R}$ und $\varepsilon>0$ heißt Intervall $U_\varepsilon(a):=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

eine ε Umgebung von a



\# $a-\varepsilon, a+\varepsilon \notin U_\varepsilon(a)$

$a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, sodass $a_n \in U_\varepsilon(a)\ \forall\ n\geq n_0$ d.h.:

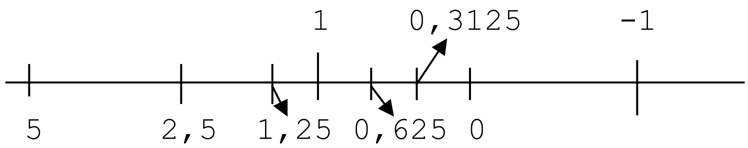
$a_n \notin U_\varepsilon(a)$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0$ liegen nur endlich viele $a_n \notin U_\varepsilon(a)$

(außerhalb der ε Umgebung von a)

Bsp: a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ….

5 2,5 1,25 0,625 0,3125 ….



$a_1, a_2, a_3 \notin U_1(0)$

$U_\varepsilon(z_0) := \{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0, z, z_0\in\mathbb{C})$ Kreisscheibe heißt

ε-Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$. Damit gilt:

$z_n \rightarrow z_0 (n\rightarrow\infty), z_n \subset \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

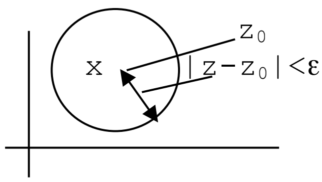
mit $z_n \in U_\varepsilon(z_0)\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$

$\forall\ \varepsilon>0$ gilt $z_n \in U_\varepsilon(z_0)$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$

$\forall\ \varepsilon>0$ gilt $z_n \notin U_\varepsilon(z_0)$

(außerhalb der ε Umgebung von z_0)

nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}$



Für $(z_n)\subset\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$ gilt $z_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} z \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt $z_n\in U_\varepsilon(z)$ für fast alle

$n\in\mathbb{N}$. $\forall\varepsilon>0$ gilt $z_n \notin U_\varepsilon(z)$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}$.

2.) Für $(z_n)\subset\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$ gilt $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim\limits_{n\rightarrow\infty}(\mathrm{Re}\ z_n) = \mathrm{Re}\ z \wedge \lim\limits_{n\rightarrow\infty}(\mathrm{Im}\ z_n) = \mathrm{Im}\ z$

Bew: $|\mathrm{Re}\ z_n - \mathrm{Re}\ z|, |\mathrm{Im}\ z_n - \mathrm{Im}\ z| \leq |z_n - z| \leq$

$|\mathrm{Re}\ z_n - \mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z_n - \mathrm{Im}\ z|$

3.) Eindeutigkeit des Grenzwerts konvergenter Folgen.

Aus $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} w_n = w$ und $\lim\limits_{n\rightarrow\infty} w_n = z \Rightarrow w=z$, oder andere Formulierung

$w_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} w$ und $w_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} z \Rightarrow w=z$

*//**S1.2.1** (406) Vor: K angeordnet, $a,b\in K$ 5.) $a=0 \Leftrightarrow |a|<\varepsilon\ \forall\varepsilon\in K$ mit $\varepsilon>0$//*

Bew: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |w_n - w|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |w_n - z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_1$

$n_2=\max\{n_1, n_0\} \Rightarrow |w-z| = |w-w_n+w_n-z| \leq |w_n-w| + |w_n-z| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon\ \forall\ n\geq n_2(\varepsilon)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S1.2.1\ .5.)}$ $|w-z|=0 \Rightarrow w=z$

Andere Formulierung:

Eine konvergente komplexe Zahlenfolge besitzt höchstens einen Grenzwert, d.h., eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Bew: Annahme $z^{(0)}, z^{(1)}$ sind 2 Grenzwerte einer konvergenten Folge.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0^{(i)}(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z^{(i)}|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0^{(i)},\ i=1,0$

$|z^{(0)}-z^{(1)}|\leq \underbrace{|z^{(0)}-z_n|}_{<\varepsilon/2(Def)} + \underbrace{|z_n-z^{(1)}|}_{<\varepsilon/2(Def)} <\varepsilon$

$\forall\ n\geq \max\{n_0^{(0)}(\varepsilon/2), n_0^{(1)}(\varepsilon/2)\}$ ist

$\forall\ \varepsilon>0\ \ \varepsilon>|z^{(0)}-z^{(1)}|\geq|Re(z^{(0)})-Re(z^{(1)})|\ \ \underbrace{\Rightarrow}_{S1.2.1\ 5.)}\ \ Re(z^{(0)})=Re(z^{(1)})$,

analog Im $\Rightarrow z^{(0)}=z^{(1)}$,

Bem: $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ sind gleich $\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0: |z_1-z_2|<\varepsilon$

4.) Eine Nullfolge ist konvergent; ihr Grenzwert ist gleich 0

Bew: Ist klar nach Definition der Konvergenz.

5.) Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\neq 0\ \Rightarrow\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall\ n\geq n_0: x_n\neq 0$

Bew: Sei $\varepsilon=|x|\Rightarrow\ \exists\ n_0:\ \forall\ n\geq n_0$ gilt $|x_n-x|<\varepsilon/2$ und wegen

$|x_n|=|x+x_n-x|=|x-(-x_n)+x)|\geq|x|-|x-x_n|=|x|-|x_n-x|\geq\varepsilon/2=|x|/2\neq 0\ \Rightarrow$ Beh

6.) $x_n, y_n\in\mathbb{R}.\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=y,\ x_n\leq y_n\ \forall\ n\geq n_0\Rightarrow x\leq y$

Bew: Wir zeigen folgende stärkere Aussage: Ist $x>y$, so folgt $x_n>y_n$ für alle großen n. Dazu sei $\varepsilon=x-y$ gesetzt. Dann gibt es ein $N\in\mathbb{R}_+$ so, dass $\forall\ n\geq N$ gilt $|x-x_n|<\varepsilon/2$ und $|y-y_n|<\varepsilon/2\ \Rightarrow$

$x_n-y_n\geq \underbrace{x-y}_{\varepsilon} -(|\underbrace{x_n-x}_{<\frac{\varepsilon}{2}}|+|\underbrace{y_n-y}_{<\frac{\varepsilon}{2}}|)>0\ \ \forall\ n\geq N$??????

*Andere Formulierung:

$d=|x-y|, \varepsilon<d/10$, Annahme: $y>x\ \Rightarrow\ y=x+d$

$U=\{u\in\mathbb{R}\ |x-d/10\leq u\leq x+d/10\}$,

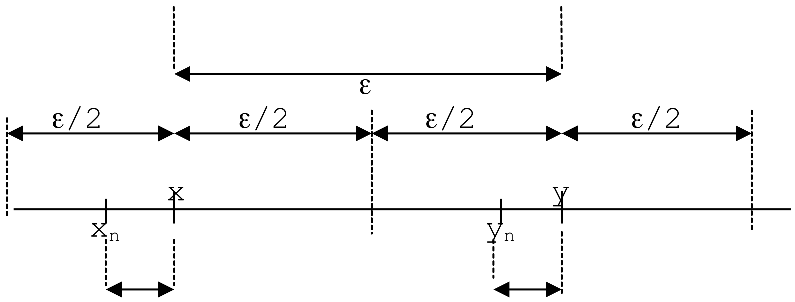
$O=\{o\in\mathbb{R}|\,y-d/10\leq o\leq y+d/10\}=\{o\in\mathbb{R}|\,x+d-d/10\leq o\leq x+d+d/10\}=$

$\{o\in\mathbb{R}|\,x+9d/10\leq o\leq x+11d/10\}\ \Rightarrow\ o>u\ \ \forall\ o,u$

$\forall\ n>n_0(\varepsilon): |x_n-x|<\varepsilon<d/10\ \Rightarrow\ x-d/10\leq x_n\leq x+d/10\ \Rightarrow\ x_n\in U$

$\forall\ n>n_0(\varepsilon): |y_n-y|<\varepsilon<d/10\ \Rightarrow\ y-d/10\leq y_n\leq y+d/10\ \Rightarrow\ y_n\in O$

$\underbrace{\Rightarrow}_{o>u}\ \ y_n>x_n$ Widerspruch $\Rightarrow x>y$



Bsp für $|x_n-x|$ $\qquad$ $|y_n-y|$

7.) Sandwhichsatz

Seien (x_n^+), (x_n^-) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = x \text{ und } x_n^- \le y_n \le x_n^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Bew: Zu $\varepsilon>0$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ so, dass $|x_n^\pm - x|<\varepsilon$ $\forall$ $n\ge N$ gilt $\Rightarrow$ $|y_n-x|<\varepsilon$ und daher folgt die Beh.

8.) Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile beide konvergieren.

Bew: Seien $z_n=x_n+iy_n\in\mathbb{C}$ für $n\ge1$. Sei angenommen, dass (z_n) gegen $z=x+iy$ konvergiert, also (z_n-z) Nullfolge ist $\Rightarrow$ (x_n-x) und (y_n-y) sind Nullfolgen.

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von (x_n) und (y_n) gegen x bzw y, dass (x_n-x) und (y_n-y) Nullfolgen sind, und dann folgt, dass (z_n-z) ebenfalls Nullfolge ist, d.h. dass (z_n) gegen z konvergiert.

Andere Formulierung:

Für eine komplexe Zahlenfolge z_n gilt

(.) $z_n\to z\ (n\to\infty) \Rightarrow |z_n|\to|z|\ (n\to\infty)$

Bew: $\varepsilon>|z_n|-|z| \ge ||z_n|-|z||$ $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$

(..) $z_n\to z\ (n\to\infty) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_n)\to\mathrm{Re}(z)\ (n\to\infty)$ und $\mathrm{Im}(z_n)\to\mathrm{Im}(z)\ (n\to\infty)$ oder

Für $(z_n)\subset\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$ gilt $\lim_{n\to\infty} z_n=z \Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n)= \mathrm{Re}\, z$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n)=\mathrm{Im}\, z$

Bem: Insbesondere hat eine reelle Zahlenfolge, welche konvergent ist (gemäß unserer Def) einen reellen und eindeutigen Grenzwert

Bew: "$\Rightarrow$" $\varepsilon>|z_n-z| \ge|\mathrm{Re}(z_n-z)|=|\mathrm{Re}(z_n)-\mathrm{Re}(z)|$ $\forall n \ge n_0(\varepsilon)$

Analog Im

„$\Leftarrow$" $|z|^2=\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z) \le 2\max\{\mathrm{Re}^2(z),\mathrm{Im}^2(z)\}=2\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}^2$

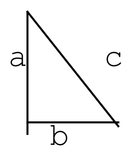
$|z|\le\sqrt{2}\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}$, $\varepsilon>0$ gegeben

$|z_n-z|\le\sqrt{2}\max\{|\mathrm{Re}(z_n-z)|,|\mathrm{Im}(z_n-z)|\}$.

Zu $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}>0$ $\exists$ $n_1: |\mathrm{Re}(z_n-z)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $\forall n\ge n_1(\varepsilon)$

$\exists$ $n_2: |\mathrm{Im}(z_n-z)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $\forall n\ge n_2(\varepsilon)$ $\Rightarrow$

$|(z_n-z)|<\varepsilon$ $\forall n\ge\max\{n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\}=:n_0(\varepsilon)$.



$c^2=a^2+b^2<$
$2\max\{a^2+b^2\}$

9.) Divergenz: $\forall$ $z\in\mathbb{C}$ $\exists$ $\varepsilon>0$ $\forall$ $n_0(\varepsilon\varepsilon)\in\mathbb{N}$ $\exists$ $n\ge n_0: |z_n-z|\ge\varepsilon$.

Bsp: 1.) $a_n:=a$ $\forall$ $n\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$

$|a_n-a|=0<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ $n_0(\varepsilon)$ beliebig

2.) $a_n=1/n$ $n\in\mathbb{N}$

$\varepsilon>0$ $\exists$ n_0: $n_0>1/\varepsilon$ (z.B. $n_0=[1/\varepsilon]+1>1/\varepsilon$) $\forall$ $n\ge n_0$ $n>1/\varepsilon, 1/n<\varepsilon \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

3.) Sei $x \in K$, $|x|<1$, $a_n=x^n$, $n \in N$, dann $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

*//**S1.5.6** (715) $x \in R$, $x \geq -1$, $n \in N$; $(1+x)^n \geq 1+nx$, „=" $\Leftrightarrow$ $x=0^\wedge n=0^\wedge n=1$//*

Bew: Sei $x \neq 0$, $|x|=\frac{1}{1+h}<1$, mit $h=\frac{1}{|x|}-1>0 \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.6} (1+h)^n \geq 1+nh$

$\Rightarrow |x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} = \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{n}$ $\quad \varepsilon>0$...

Wähle $n_0:=\left[\frac{1}{h\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{n_0}<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{hn}<\varepsilon \;\; \forall\; n \geq n_0$

4.) $a_n=\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $|x|<1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{aus3.)}} |x|^{n+1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{1-x}$ $\quad \forall\; |x|<1$

$a_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ für $z \in C$, $z \neq 1$, $n \in N$,

$z=1 \Rightarrow a_n=n+1\to\infty$

$|z|<1 \Rightarrow |z^n-0|=|z^n|=|z|^n\to 0\,(n\to\infty)$ für $|z|<1 \Rightarrow$

$a_n\to\frac{1}{1-z}\,(n\to\infty)$, $a_n\to a \Rightarrow a_n-a_{n-1}=z^n\to a-a=0 \Leftrightarrow |z|<1$

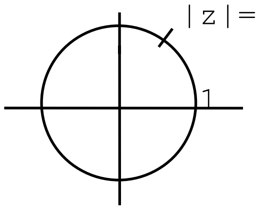
5.) $a_n=\frac{n^2-1}{n^2+n-1}$, $a=1$?

Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n_0(\varepsilon)>1/\varepsilon$, $n_0(\varepsilon) \in N$,

$\left|\frac{n^2-1}{n^2+n-1}-1\right| = \left|\frac{-n}{n^2+n-1}\right| = \frac{n}{n^2+n-1}$ (n groß) $\leq \frac{n}{n^2} = 1/n<\varepsilon$

6.) $b_n=z^n$ $\qquad |z|<1 \Rightarrow b_n\to 0$, $|z|>1 \Rightarrow |b_n|\to\infty$

$|z|=1$



$|z|=1$, Ann. $\exists\; b:=\lim_{n\to\infty} b_n$, $|b_n|=1 \Rightarrow |b|=1$

$\Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow z=\frac{z^{n+1}}{z^n}=\frac{b_{n+1}}{b_n}\to b/b=1$

A2.1.1

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_n=(1+(-1)^n)\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Betrachtung: $a_1=(1-1)\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=0$,

$a_2=(1+(-1)^2)\,(-1)^{\frac{2(2+1)}{2}}=-2$

$a_3=(1+(-1)^3)\,(-1)^{\frac{3(3+1)}{2}}=0$

$a_4=(1+(-1)^4\,(-1)^{\frac{4(4+1)}{2}}=2*1=2$

$a_n=0$ für $n=1,3,5,\ldots$ $2k-1$, $k\in\mathbb{N}$.

$a_n=-2$ für $n=2,6,10\ldots$ $4k-2$ $k\in\mathbb{N}$.

$a_n=2$ für $n=4,8,12..$ $4k$, $k\in\mathbb{N}$.

(.) Zu zeigen a_n beschränkt

Lös:

//**S1.2.1**(406) 8.) $||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$//

$|a_n|=|1+(-1)^n|\,|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}|=|1+(-1)^n|\underset{S1.2.1}{\leqslant}1+1\leq 2$

(..) inf, sup $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Lös: $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}=0$, $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}=2\,((-1))^{\frac{(4k(4k+1))}{2}}=2$,

$(a_{2(2k-1)})_{k\in\mathbb{N}}=2\,((-1))^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}}=2\,(-1)^{(2k-1)(4k-1)}=-2$

$\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\underset{D1.3.1}{\Rightarrow}$ $\exists$ inf & sup von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}+(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}+(a_{2(2k-1)})_{k\in\mathbb{N}}\Rightarrow$ inf $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=-2=a_2$, $\sup(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=2=a_4$.

b) Zeige die Konvergenz und berechne den Grenzwert der Folge (x_n) mit $x_n=(n-1)/(n+1)$

Lös: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{\overbrace{1-1/n}^{Nullf}}{\underbrace{1+1/n}_{Nullf}}=1$

A2.1.2

Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz mit Hilfe der Konvergenzdefinition:

(.) $a_n=\frac{n^2}{n^2+3}$

Lös: Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. Sei $\varepsilon>0$ baf.

Dann gilt für $n\geq n_0(\varepsilon)=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$

$|a_n-1|=|\frac{n^2}{n^2+3}-\frac{n^2+3}{n^2+3}|=\frac{3}{n^2+3}\leq\frac{3}{n^2}\leq\frac{3}{n}<\varepsilon.\quad \frac{3}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$

(..) $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu-\frac{n^2}{2n+1}$

Lös: $a_n=\frac{n(n+1)}{2n}-\frac{n^2}{2n+1}=\frac{(n+1)(2n+1)-2n^2}{2(2n+1)}=\frac{2n^2+3n+1-2n^2}{2(2n+1)}=$

$\frac{3n+1}{4n+2}$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty}=3/4$. Sei $\varepsilon>0$ baf.

Definiere $n_0(\varepsilon):=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Dann gilt $\forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$:

$|\frac{3n+1}{4n+2}-3/4|=\frac{|2(3n+1)-3(2n+1)|}{4(2n+1)}=\frac{|6n+2-6n-3|}{4(2n+1)}=$

$\frac{1}{4(2n+1)}\leq\frac{1}{2n+1}\leq\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

A2.1.3

a) Es sei $|z|<1$ und $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch $z_n=\sum\limits_{k=0}^{n}kz^k$.

Untersuche $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme ggf den Grenzwert.

Lös: $z_n=\sum\limits_{k=0}^{n}kz^k=\sum\limits_{k=1}^{n}kz^k=\sum\limits_{k=1}^{n}z^k\underbrace{\sum\limits_{j=1}^{k}1}_{k}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=j}^{n}z^{k-j}z^j=\sum\limits_{j=1}^{n}z^j\sum\limits_{k=j}^{n}z^{k-j}\underbrace{=}_{\nu=k-j}\sum\limits_{j=1}^{n}z^j\sum\limits_{\nu=0}^{n-j}z^\nu=\sum\limits_{j=1}^{n}$

$z^j\frac{1-z^{n-j+1}}{1-z}=$

$\frac{z}{1-z}\sum\limits_{j=1}^{n}z^{j-1}-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{z^{n+1}}{1-z}=\frac{z}{1-z}\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}z^\nu-\frac{nz^{n+1}}{1-z}=\frac{z}{1-z}\frac{1-\overbrace{z^n}^{\to 0}}{1-z}-\frac{\overbrace{nz^n}^{\to 0}z}{1-z}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{z}{(1-z)^2}$

b) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

Lös: Ansatz $\forall\ k\in\mathbb{N}\ \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{A}{(3k-2)}+\frac{B}{(3k+1)} \Leftrightarrow 1=A(3k+1)+B(3k-2)\ \forall\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$1=k(3A+3B)+A-2B\ \forall\ k\in\mathbb{N}\ \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{unabhängig von } k}\ 3A+3B=0, 1=A-2B \Leftrightarrow A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(3k-2)}-\frac{1}{(3k+1)}\right)$

Teleskopsumme... $S_n=\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(3k-2)}-\frac{1}{(3k+1)}\right)=$

$\frac{1}{3}\left[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+...(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2})+(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1})\right]=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3n+1})\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$

c) $S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Lös: $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = -\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + 1 = -1 - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \frac{1}{4}$

A2.1.4 Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweise, dass dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ gilt.

Bew: Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = a$, d.h. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon$.

Wenn $a_n>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, dann ist auch $a\geq 0$. $\sqrt{a_n} - \sqrt{a} = \frac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}$

Sei $\varepsilon>0$ baf, dann gilt
$\forall\ n\geq n_1(\varepsilon) := n_0(\varepsilon^2)$:

Fall 1: $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{a} < \varepsilon$

Fall 2: $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}{\underbrace{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}_{>0}} = |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \frac{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|} = \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq$

$\frac{|a_n-a|}{\varepsilon} < \varepsilon$

Andere Formulierung:

$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \Rightarrow a \geq 0$

Fall 1: $a>0$. Sei $\varepsilon>0$ baf, Wähle $n_0\in\mathbb{N}$: $|a_n-a| \underbrace{<}_{\lim_{n\to\infty} a_n=a} \underbrace{\sqrt{a}*\varepsilon}_{\bar{\varepsilon}}\ \forall\ n\geq n_0$.

$\Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \underbrace{\leq}_{\sqrt{a_n}\geq 0} \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$.

Fall 2: $a=0$. Sei $\varepsilon>0$ baf. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$: $|a_n-0| < \underbrace{\varepsilon^2}_{\bar{\varepsilon}}\ \forall\ n\geq n_0$.

$\Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$.

$\underbrace{\Rightarrow}_{Fall\ 1 und\ 2}\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon\ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

A2.1.5 Seien P und Q Polynome, und sei $Q(n)\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$. Untersuche die Konvergenz der Folge $(x_n = P(n)/Q(n))$ und berechne ggf ihren Grenzwert.

Lös: $P(n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k n^k$, $a_\nu \neq 0$, $Q(n) = \sum_{j=0}^{m} b_j n^j$, $b_\nu \neq 0$,

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^\nu}{n^\mu} \frac{\sum_{k=0}^{\nu} a_k n^{k-\nu}}{\sum_{j=0}^{\mu} b_j n^{j-\mu}} \underbrace{=}_{\mu=\nu} \frac{n^\mu}{n^\mu} \frac{\sum_{k=0}^{\mu} a_k n^{k-\mu}}{\sum_{k=0}^{\mu} b_k n^{k-\mu}} \underbrace{\rightarrow}_{k-\mu<0,\mu\to\infty} \frac{a_\mu}{b_\mu}$$

$\mu <> \nu \rightarrow ?$??????????????

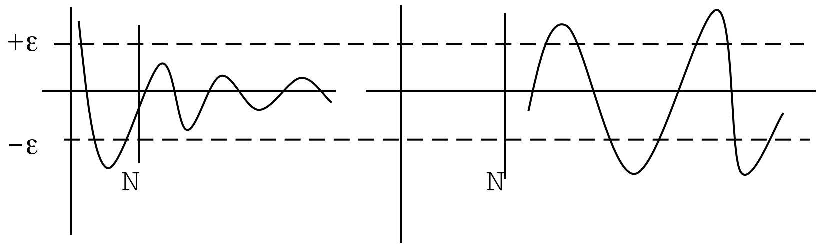
A2.1.6

a) Ergänze: Eine Folge (x_n) in **K** heißt konvergent, wenn $\exists\ x\in$**K**, so dass $\forall\ \varepsilon>0$...

Lös: (x_n) in **K** heißt konvergent, wenn
$\exists\ x\in$**K**, so dass gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in$**N** mit $|z_n-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$.

b) Negiere die Aussage aus a)

Lös: (x_n) divergiert (d.h. nicht konvergent oder bestimmt divergent),
wenn $\forall\ x\in$**K** $\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ n\in$**R**$_+$ $\exists\ n\in$**N** mit $n\geq N \Rightarrow |z_n-z|<\varepsilon$.
(x_n) divergiert (nicht konvergent):



c) Bestimme zu $\varepsilon>0$ ein $N\in$**R**$_+$ so, dass $\forall\ n\in$**N**$: n\geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

*//**A1.8.1** b)(1002) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für n,p∈N mit//*
// $n\geq 2p$, dass $\sqrt[n]{n^p}<1+2p/\sqrt{n}$. Anl: Setze $x_j=\sqrt{n}$ für $1<j\leq 2p$ //

Lös: Ziel $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon \underbrace{\Leftrightarrow}_{\sqrt[n]{n}>1} \sqrt[n]{n}-1<\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$.

Es gilt $1\leq\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^1}\underbrace{\geq}_{A1.8.1} 1+\frac{2*1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0\leq\sqrt[n]{n}-1\leq\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Es reicht (hinreichend) $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{4}{\varepsilon^2}$. Wähle $N=\lfloor\frac{4}{\varepsilon^2}\rfloor+1$.

n=1: $\sqrt[n]{n}=1+\frac{2}{1}\quad\forall\ n\in$**N**$, n\geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

d) Bestimme zu $K\in$**R**$_+$ ein $N\in$**R**$_+$ so dass $\forall\ n\in$**N**$: n\geq N \Rightarrow \sqrt[n]{n!}>K$

Lös: Ziel $\sqrt[n]{n!}>K \Leftrightarrow n!>K^n \Leftrightarrow n(n-1)\ldots1>\underbrace{K*K*\ldots*K}_{n\ mal}$.

Es gilt $n!\geq\underbrace{n(n-1)\ldots[n/2]}_{mehr\ als\ [n/2]\ Faktoren}>\underbrace{(\frac{n}{2}-1)}_{<[n/2]}{}^{n/2}$.

Es reicht $(\frac{n}{2}-1)^{n/2}>K^n \Leftrightarrow (\frac{n}{2}-1)^{1/2}>K \Leftrightarrow n\geq 2K^2+2$. Wähle $N=2K^2+3$,

dann $\forall\ n>N\ n!>K^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!}>K$

A2.1.7 Es sei $a_n=(1+1/n)^2+1\ \forall\ n\in$**N**. Zeige direkt mit D2.1.1, dass die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Bew: Beh $a_n\to 2\ (n\to\infty)$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0\in$**N**$: |a_n-2|<\varepsilon\ \forall\ n\leq n_0$. Sei $\varepsilon>0$ baf, wähle $n_0=[3/\varepsilon]+1 \Rightarrow$
$n_0>3/\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$.

$|a_n-2|=|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+1-2|=|\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}|=\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\underbrace{\geq}_{n^2>n}\frac{2}{n}+\frac{1}{n}$

$=3/n\leq 3/n_0<\varepsilon$ für $n_0>3/\varepsilon$

D2.1.2 (1209) Eine komplexe Folge (z_n) aus **C** heißt beschränkt:⇔
$\exists\ K>0$ mit $|z_n|\leq K\ \forall\ n\in$**N**

S2.1.1(1210) Geg die Folgen (x_n) und (y_n) in K. Dann gilt:

a) Ist (x_n) Nullfolge und gibt es $C\in\mathbb{R}_+$ und $n_0\in\mathbb{N}$, so dass $\forall\ n\geq n_0$ gilt $|y_n|\leq C|x_n|$, dann ist auch (y_n) eine Nullfolge.

Bew: Zu $\varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+$, sodass $\forall\ n\geq N$ gilt $|x_n|<\varepsilon/C$, und dann gilt auch $|y_n|\leq C|x_n|<C*\varepsilon/C<\varepsilon$, wenn nur $n\geq\max\{N,n_0\}$

b) Ist (x_n) eine Nullfolge und ist (y_n) beschränkt, so ist (x_ny_n) ebenfalls eine Nullfolge

Bew: Ist $|y_n|\leq K\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, so ist $|x_ny_n|\leq K|x_n|\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$ und mit a) folgt Beh

c) Sind beide Folgen Nullfolgen, so ist auch (x_n+y_n) eine Nullfolge.

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Nach Vor $\exists\ N_x,N_y\in\mathbb{R}_+$, für die $|x_n|<\varepsilon/2$, bzw $|y_n|<\varepsilon/2$ gilt, falls nur $n\geq N_x$, bzw $n\geq N_y$ ist.
Nach Dreiecksungleichung ist $|x_n+y_n|\leq|x_n|+|y_n|<\varepsilon$, falls $n\geq\max\{N_x,N_y\}$ woraus Beh folgt.

d) Ist (x_n) eine Nullfolge und ist $m\in\mathbb{N}$, so ist auch $\sqrt[m]{|x_n|}$ Nullfolge

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Nach Vor $\exists\ N\in\mathbb{R}_+$, sodass $|x_n|<\varepsilon^m$ ist, falls nur $n\geq N$.
Daraus folgt die Beh.

A2.1.8

a) Beh: $\forall\ p\in\mathbb{N}$ gilt $0\leq x_n=\sqrt[n]{n^p}-1\ \underbrace{\to}_{n\to\infty}\ 0$

*//**A1.8.1** b) (1002) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für n,p∈N mit//*
// $n\geq 2p$, daß $\sqrt[n]{n^p}<1+2p/\sqrt{n}$. //

Bew: Nach **A1.8.1** b) ist $0<x_n<\underbrace{2p/\sqrt{n}}_{Nullf}$,woraus die Beh folgt.

b) Schließe aus a), daß $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ gilt

Bew: p=1

A2.1.9 Beh: $\forall\ x\in K$ mit $|x|<1$ und jedes $p\in\mathbb{N}$ ist (n^px^n) eine Nullfolge.

Bew: x^n ist Nullfolge. Wir setzen $1/|x|=1+\varepsilon$ (da $|x|<1$).
Aus **A1.8.1** folgt $\sqrt[n]{n^p}<1+\varepsilon/2\ \ \forall\ n\geq n_0\Rightarrow n^p|x|^n<\underbrace{(1+\varepsilon/2)^n}_{\Rightarrow n^p}/(1+\varepsilon)^n=\underbrace{y}_{<1}{}^n$

mit $y=(1+\varepsilon/2)/(1+\varepsilon)<1$. (Aus $1/|x|=1+\varepsilon$, $|x|^n=1/(1+\varepsilon)^n$)
Daraus folgt die Beh.

A2.1.10

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

*//**A2.1.6** d) (1206) Bestimme zu $K \in R_+$ ein $N \in R_+$ so daß $\forall\ n \in N: n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > K$//*

Lös: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x^n|}{n!} = \left(\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n \leq q^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ falls $|q|<1$. Es reicht

$\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \leq q \in (0,1) \quad \forall\ n \geq n_0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \geq |x|/q$ wie in A2.1.6 d,

wähle $n_0 = 2\left(\frac{|x|}{q}\right)^2 + 3$ mit $q \in (0,1)$ beliebig $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow$

$\frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \leq q \Rightarrow 0 \leq \frac{|x|}{n!} \leq q^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow$ Beh

Andere Formulierung:

$x_n = x^n/n!$. $|x_n| = |x|^n/n! = \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\ldots\frac{|x|}{n}$. Sei $m>|x|$ oder $m>2|x|$, so

ist $\frac{|x|}{m} < 1/2$, also ist für $n \geq m$

$|x_n| < \underbrace{\prod_{k=1}^{m-1}\frac{|x|}{k}}_{C} \prod_{k=m}^{n} 1/2 = \underbrace{C\,(\underbrace{1/2}_{<1})^{n-m+1}}_{\to 0(n\to\infty)}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - 5n\mu + 1}{2*3^n + n^5 + 2} = 1/2$

*//**A2.1.9** Beh: $\forall\ x \in K$ mit $|x|<1$ und jedes $p \in N$ ist $(n^p x^n)$ eine //*
//Nullfolge. $x^n n^p \to 0$ für $|x|<1 \quad \forall\ p \in \mathbb{N}$, $x^n \to 0, |x|<1$.*//*

Lös: $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-(1/3)^n 5n\mu + (1/3)^n}{2+(1/3)^n n^5 + 2(1/3)^n} = 1/2$, da $(1/3)^n n^3 \to 0$, $(1/3)^n \to 0$,
$(1/3)^n n^5 \to 0$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha x^n + \beta y^n} = y$, $(0<x<y,\ \alpha,\beta>0)$

*//**A2.1.8** a) Beh: $\forall\ p \in N$ gilt $0 \leq x_n = \sqrt[n]{n^p} - 1 \to 0\ (n\to\infty)$//*

Lös: $\beta y^n < \underbrace{\alpha x^n}_{>0} + \beta y^n < (\alpha+\beta) y^n \quad (x<y, x^n<y^n \Rightarrow \alpha x^n < \beta y^n) \Rightarrow$

$\sqrt[n]{\beta}\, y < \sqrt[n]{\alpha x^n + \beta y^n} < y\sqrt[n]{(\alpha+\beta)}$. Da $\sqrt[n]{\beta} \to 1$ und $\sqrt[n]{(\alpha+\beta)} \to 1 \Rightarrow$
Beh mit Sandwichsatz

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n´+3n} - n = 3/2$

Lös: $= \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3n}{\sqrt{n´+3n}+n} = \frac{3}{\sqrt{1+3/n}+1} \to 3/2$

A2.1.11 Zeige: $\forall$ $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist $(x_n=1/(a+nb))$ eine Nullfolge,
außer wenn $-a/b \in \mathbb{N}$ ist
(dann ist x_n nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert: $a+nb=0 \Leftrightarrow nb=-a \Leftrightarrow n=-a/b$)

Lös: $|1/(a+nb)|=|x_n|<\varepsilon \Leftrightarrow |a+nb|>1/\varepsilon$

$$|a+nb| \geq ||a|-|nb|| \underbrace{=}_{n\ groß} |nb|-|a|=n|b|-|a|>1/\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1/e+|a|}{|b|},$$

$$N=\left|\frac{1/\varepsilon+|a|}{|b|}\right| +1$$