2.4(1500) **Häufungswerte (HW) von Zahlenfolgen**

In **D2.4.1′** und **D2.4.1′′** werden HW definiert.
Beginn mit **D2.4.1′**: **D2.4.1′′** wird mit Hilfe von **D2.4.1′** wie ein Satz bewiesen.
Beginn mit **D2.4.1′′**: **D2.4.1′** wird mit Hilfe von **D2.4.1′′** wie ein Satz bewiesen.

D2.4.1′(1500)

1.) Sei $(z_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$.

$z\in\mathbf{C}$ ist HW von (z_n) $\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge (z_{ν_n}) von (z_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\nu_n} = z$

Bem: Falls $z_n \to z$, d.h. konvergent, so besitzt sie nur 1 HW.

Bew D2.4.1′ aus D2.4.1′′:

z ist HW von z_n $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon>0$ gilt $z_n \in U_\varepsilon(z)$ für ∞ viele $n\in\mathbf{N}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.1''}$

$\varepsilon=1/k$, $k\in\mathbf{N}$... $\exists$ $z_{\nu_k} \in U_{\frac{1}{k}}(z)$, $\nu_{k+1}>\nu_k \Rightarrow z_{\nu_k} \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$

Andere Formulierung:

Genau dann ist $z\in\mathbf{K}$ Häufungswert (HW) einer Folge (z_n) aus $\mathbf{K}$, wenn eine Teilfolge von (z_n) gegen z konvergiert.

Bew: Sei z ein HW. Zu $\varepsilon=1/n$, mit $n\in\mathbf{N}$, wählen wir ein $\phi(n)\in\mathbf{N}$, für welches $|z_{\phi(n)}-z|<1/n$ ist und wir können oBdA annehmen, daß ϕ streng monoton wächst. Dann ist aber $(x_{\phi(n)})$ die gewünschte Teilfolge. Die Umkehrung ist klar nach Definition der Konvergenz.

2.) $x_0\in\mathbf{R}$ heißt Häufungspunkt (HP) von M: $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.

siehe auch 4.1 Seite 2201

\# $z\in\mathbf{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) von $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathbf{C} \Leftrightarrow$

\# $\exists\ (z_{n_k})_{k,n\in\mathbf{N}}$: $z_{n_k}\neq z\ \forall\ k\in\mathbf{N}$ & $z_{n_k} \underbrace{\to}_{k\to\infty} z$

\# äquivalent

\# $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \infty$ viele $n\in\mathbf{N}$: $z_n\neq z$ & $z_n\in U\varepsilon(z)$

\# äquivalent

\# $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{o}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.

#Beispiel für Folgenhäufungswerte:

$M=(a_n)_{n\in N}:=\begin{cases}\frac{1}{n}, \text{ falls } n \text{ gerade}\\ 1, \text{ sonst}\end{cases}$,

#Häufungswerte (HW) nach D2.4.1 1.)

#HW 0: $\forall\ \varepsilon>0$ gilt $a_n\in U_\varepsilon(0)$ für ∞ viele n

1: $\forall\ \varepsilon>0$ gilt $a_n\in U_\varepsilon(1)$ für ∞ viele n

#Häufungspunkt (HP) nach nach D2.4.1 2.)

#HP 0: $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{o}{U}_\varepsilon(0)\neq\emptyset$, z.B. $\varepsilon=\frac{1}{17}$, $a_n=\frac{1}{43}\in M$ & $\frac{1}{43}\in \overset{o}{U}_\varepsilon(0)$ $\Rightarrow$

$M\cap \overset{o}{U}_{\frac{1}{17}}(0)\neq\emptyset$, weil $\forall\ n\in N\ \exists\ n_+>n \Rightarrow \frac{1}{n_+}<\frac{1}{n}$

äquivalent

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \infty$ viele $n\in N$: $a_n\neq 0$ & $a_n\in U^{\varepsilon}(0)$... $\frac{1}{18}, \frac{1}{19}, ...$

#1 nicht HP von M: da z.B für $a_n\notin U_{\varepsilon=0,3}(1)\ \forall\ n\in N \Rightarrow M\cap \overset{o}{U}_{0,3}(1)=\emptyset\ \forall\ \varepsilon>0$

äquivalent

$\exists$ keine $(a_{n_k})_{k,n\in N}$: $a_{n_k}\neq 1\ \forall\ k\in N$ & $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 1$

D2.4.1''(1501)

Sei $(z_n)\subset K$. Ein $z\in K$ heißt Häufungswert (HW) von (z_n): $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ gilt $|z_n-z|<\varepsilon$ für unendlich viele $n\in N$ $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ gilt $z_n\in U_\varepsilon(z)$ für ∞ viele n.

(Bew der Verbindung D2.4.1'' aus D2.4.1')

Bew:"$\Rightarrow$" z ist HW $\underset{D2.4.1'}{\Rightarrow}$ $\exists$ Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n) mit $(z_{v_n}) \overset{n\to\infty}{\to} z$,

$\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon): |z_{v_n}-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$|z_m-z|<\varepsilon$ für $m=\nu_{v_{n_0(\varepsilon)}}, \nu_{v_{n_0(\varepsilon)+1}}, ...\infty$ viele

"$\Leftarrow$"(*) $\forall\ \varepsilon>0: |z_n-z|<\varepsilon$ unendlich oft.

$\varepsilon=1$ $:M_1=\{n\geq 1: |z_n-z|<\varepsilon=1\}$, $\exists\ n_1=\min M_1$

(wegen(*) $M_1\neq\emptyset$ d.h. $M_1\subset N$ hat min)

$\varepsilon=2^{-1}$ $:M_2=\{n\geq n_1: |z_n-z|<1/2\}$, $\exists\ n_2=\min M_2$

(nach(*) gibt es ∞ viele Indizes: $M_2\neq\emptyset$ d.h.

$M_2\subset N$ hat min)

$\varepsilon=\frac{1}{\ell+1}$ $:M_{\ell+1}=\{n\geq n_\ell: |z_n-z|<\frac{1}{\ell+1}\}$, $\exists\ n_{\ell+1}=\min M_{\ell+1}$

(nach(*) gibt es ∞ viele Indizes: $M_{\ell+1}\neq\emptyset$ d.h.

$M_{\ell+1}\subset N$ hat min

$(z_{n_\ell}) \overset{n_\ell\to\infty}{\to} z \underset{D2.4.1'}{\Rightarrow}$ z ist HW von (z_n)

Bem: $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n \Rightarrow$ z ist HW von (z_n)

Bsp:1.) $a_n=(-1)^n$, $n\in N$, $(-1)^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, $(-1)^{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} -1$, HW 1 und -1

2.) $z_n=(i)^n$, $z_{4n}\equiv 1, z_{4n+1}\equiv i, z_{4n+2}\equiv -1$, $z_{4n+3}\equiv -i$, $\{HW\}=\{1,-1,i,-i\}$

3.) $a_n=(-1)^n(1+1/n)^n$ HW e,-e

4.) $a_n=(1+1/n)^{(-1)^n\cdot n}$ $a_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} e$, $a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1/e$

5.) $a_n=-n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$

6.) $a_n=(-1)^n\cdot n$ $\quad a_{2n}=\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\infty$, $a_{2n+1}=\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}-\infty$

7) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$, HW={+1,-1}. Annahme: $\beta\neq\pm1$, $\beta>0$, β ist HW.

$\beta-1=\varepsilon_0$. $|a_{2n}-1|\le\varepsilon_0/2=\dfrac{\beta-1}{2}$ $\quad\forall\ n\ge n_0(\varepsilon)$.

$|a_n-\beta|\ge\begin{cases}1/2,\ n=2m+1\\ \varepsilon_0/2,\ n=2m\end{cases}$ $\quad\forall\ n\ge n_0(\varepsilon)\Rightarrow\beta$ kann kein HW sein.

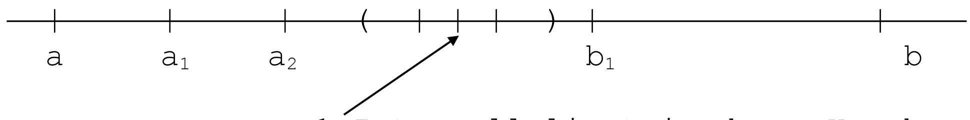
8.) $a_n=(1+(-1)^n/n)^n$, HW: e,e^{-1}, keine anderen HW, n, 2n sind alle Folgenelemente, oder wie oben

S2.4.1(1502)Bolzano Weierstrass (BW)
Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ beschränkt
Beh:(a_n) hat mindestens einen HW $a\in\mathbb{R}$ und eine gegen a konvergente Teilfolge.($-k\le a_n\le k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$)

*//**S2.2.3** (1306)Jede Folge $(a_n)\subset R$ besitzt eine monotone//*
// Teilfolge//
*//**S2.2.2** (1301)Vor:$(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh:$\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n$//*

Bew: $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.3}$ (a_n) enthält eine monotone Teilfolge (a_{ν_n}),
$(a_{\nu_n})\nearrow$ oder $\searrow$. Da (a_{ν_n}) beschränkt $|a_{\nu_n}|\le k$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$
$a_{\nu_n}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}a\in\mathbb{R}\Rightarrow a$ HW von (a_n).

Andere Formulierung (keine Einschränkung auf $\mathbb{R}$)
Eine beschränkte Folge hat <u>mindestens</u> einen HW.
//D2.1.1(1200) 8.)Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau//
// dann, wenn die Folgen der Real- und //
// Imaginärteile beide konvergieren.//

Bew:


$a_0=a$ $\qquad$ $b_0=b$

$a=a_0\le a_1\le a_2\le\ldots..\ b_2\le b_1\le b$

Sei zunächst $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Sei (x_n) eine beschränkte Folge, und seien a,b so, dass $a\le x_n\le b$ für alle n gilt. Wir wählen jetzt 2 Folgen (a_n) und (b_n) so, dass immer gilt $a_n\le x_n\le b_n$ für unendlich viele n. Dazu seien $a_0=a$, $b_0=b$ gesetzt. Wenn a_n,b_n bereits gewählt sind, enthält die linke oder rechte Hälfte des Intervalls $[a_n,b_n]$ unendlich viele Folgeglieder, und wir wählen dann im ersten Fall $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=(a_n+b_n)/2$ und im andern Fall $a_{n+1}=(a_n+b_n)/2$, $b_{n+1}=b_n$. Jetzt sei eine streng monoton wachsende Funktion ϕ gewählt, mit $a_n\le x_{\varphi(n)}\le b_n$, was möglich ist, weil unendlich viele $x_m\in[a_n,b_n]$ in jedem der Intervalle $[a_n,b_n]$ liegen. Offenbar sind die Folgen (a_n) und (b_n) monoton(wachsend bzw fallend), also beide konvergent, und wegen $0<b_n-a_n=(b-a)/2^n\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}0$ sind die Grenzwerte gleich $x\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]$. Nach dem Sandwichsatz folgt deshalb die Konvergenz der Teilfolge $(x_{\phi(n)})$ gegen ein $x\in\mathbb{R}$, und dieses x ist HW der Folge (x_n).

Sei jetzt $K=C$. Sei eine beschränkte Folge (z_n) gegeben, und seien (x_n) bzw (y_n) die Folgen der Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen z_n. Wegen $|z_n|=\sqrt{x_n^2+y_n^2}\geq|x_n|$ ist (x_n) beschränkt.
Also existiert eine Teilfolge $(x_{\phi(n)})$, welche gegen ein $x\in R$ konvergiert (siehe oben $K=R$). Die Teilfolge $(z_{\phi(n)})$ ist aber wieder beschränkt und daraus folgt die Beschränktheit von $(y_{\phi(n)})$.Deshalb existiert auch eine konvergente Teilfolge dieser Teilfolge, welche wir mit $(y_{\varphi(n)})$ bezeichnen wollen und auch die Teilfolge $x_{\varphi(n)})$ der Folge $(x_{\phi(n)})$ konvergiert nach S2.2.2. Daraus folgt mit D2.1.1 Bem 8 die Konvergenz von $(z_{\phi(n)})$. Also hat (z_n) einen HW.

Andere Formulierung:

$z_n=x_n+iy_n$, $x_{n(m)} \underbrace{\rightarrow}_{n(m)\rightarrow\infty} x$, $y_{n(m)}$ beschränkt nach Vor., $y_{n(m(k))} \underbrace{\rightarrow}_{n(m(k))\rightarrow\infty} y$, $x_{n(m(k))} \underbrace{\rightarrow}_{n(m(k))\rightarrow\infty} x$.

Andere Formulierung/ Erweiterung von R auf C.

Jede beschränkte Folge aus C hat eine konvergente Teilfolge und damit einen HW in C.

//***S2.2.3*** *(1306) Jede Folge $(a_n)\subset R$ besitzt eine monotone//*
// Teilfolge//
//***S2.2.2*** *(1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\rightarrow\infty} a_n$//*

Bew: $|\text{Re } z_n|,|\text{Im } z_n|\leq|z_n|\leq k \underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1,\ S2.1.5} \exists$ Teilfolge $(\text{Re } z_\nu)_n^\infty$ von $(\text{Re } z_n)$ mit $\text{Re } z_{\nu_n}\rightarrow\alpha\in R$. Wende S2.4.1 an auf $(\text{Im } z_{\nu_n})\Rightarrow$

$\exists\ (\text{Im } z_{\nu_{n_k}})_{k=1}^\infty$, $\text{Im } z_{\nu_{n_k}} \underbrace{\rightarrow}_{k\rightarrow\infty} \beta\in R \Rightarrow$

$z_{\nu_{n_k}}=(\text{Re } z_{\nu_{n_k}})+i(z_{\nu_{n_k}}) \underbrace{\rightarrow}_{k\rightarrow\infty} \alpha+i\beta \Rightarrow \alpha+i\beta\in H$

S2.1.2 2.) (1504) Seite 1250 andere Formulierung

Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.

$(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N\ \forall\ n,m\in N: n,m\geq n_0(\varepsilon)\in N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

*//**D2.1.1**(1200) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{K}$ heißt eine Nullfolge, falls gilt://*

// $\forall\varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n\in\mathbb{N}: n\geq N \Rightarrow |z_n|<\varepsilon$.//

*//**D2.1.3**(1250) (z_n) in K Cauchyfolge:*

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,m\in N: n,m\geq N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$//

//D2.4.1''(1501)

//Sei $(z_n)\subset\mathbb{R}$. Ein $z\in\mathbb{R}$ heißt Häufungswert (HW) von (z_n): $\Leftrightarrow$//

// $\forall\ \varepsilon>0$ gilt $|z_n-z|<\varepsilon$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$//

// $\forall\varepsilon>0$ gilt $z_n\in U_\varepsilon(z))$ für ∞ viele n.//

//Bem: $z=\lim\limits_{n\to\infty} z_n \Rightarrow z$ ist HW von (z_n)//

Bew: "$\Rightarrow$" $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent $\Rightarrow$ $|z_n-z|$ Nullfolge $\underbrace{\Rightarrow}_{D2.1.1,\ |x_n-x_m|\leq|x_n-x|+|x_m-x|}$

(*) für 2ε statt ε (bedeutungslos)

"$\Leftarrow$" $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ Cauchyfolge $\underbrace{\Rightarrow}_{\varepsilon=1,\ festes\ m\geq N,\ (*)}$ $|z_n|\leq|z_n-z_m|<1+|z_m|\ \ \forall\ n\geq N \Rightarrow$

$(z_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.4}$ $\exists$ Häufungswert z $\underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.1}$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ m\geq N: |z-z_m|<\varepsilon$ $\underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.1}$ $|z_n-z|\leq|z_n-z_m|+|z_m-z|<2\varepsilon\ \ \forall\ n\geq N \Rightarrow$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$

Andere Formulierung "$\Leftarrow$":

Zu $\varepsilon=1\ \exists\ n_0(1)\in\mathbb{N}$: $|a_n-a_m|<1\ \ \forall\ n\geq n_0(1)$

$|a_n|\leq|a_n-a_{n_0}|+|a_{n_0}|<1+|a_{n_0}|\ \ \forall\ n\geq n_0(1)$,

$k=\max\{|a_1|,|a_2|,...,|a_{n_0-1}|,1+|a_{n_0}|\}>0 \Rightarrow |a_n|\leq k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1}$

$\forall\ \varepsilon/2\ \exists\ n_1(\varepsilon/2)\in\mathbb{N}$: $|a_{v_n}-a|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n\geq n_1(\varepsilon/2) \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon/2\ \exists\ n_0(\varepsilon/2)\in\mathbb{N}$: $|a_n-a_m|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon/2)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{n_2:=\max\{n_0(\varepsilon/2),\ n_1(\varepsilon/2)\}}$

$\forall\ n\geq n_2$: $|a_n-a|\leq|a_n-a_{v_n}|+|a_{v_n}-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ da $a_{v_n}\geq n_1\geq n_2$.

Bem: Jede reelle Cauchyfolge konvergiert in $\mathbb{R}$ und eine rationale Cauchyfolge hat einen reellen, aber im allgemeinen keinen rationalen Limes.

Beachte: Konvergenz kann gezeigt werden, auch wenn Grenzwert nicht bekannt ist

Bsp: $a_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}\nearrow\ (n\to\infty) \Rightarrow b_n$ ist Cauchyfolge $\Rightarrow$

Für n>m: $|a_n-a_m|<\varepsilon/2=\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k(k+1)}\right|\leq\sum\limits_{k=m+1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=b_n-b_m \Rightarrow$

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $b_n-b_m<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$|a_n-a_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (a_n)$ ist Cauchyfolge

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2}\ \exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$.

A2.4.1 Finde alle HW der Folge $(x_n=(-1)^n)$.

A2.4.2 Finde eine Folge mit unendlich vielen HW

A2.4.3 Zeige: Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen HW hat und dieser ist dann gleich dem Grenzwert.

S2.4.2 (1505)

Vor: Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und H die Menge aller HW von (a_n)

$\left(\underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1} H \neq \emptyset \right)$

Beh: $\exists$ min H und max H.

*//**S2.1.3** (1255) (a_n) Folge aus R: $a_n \to a$, $\alpha \in R$//*

// 1.) $a_n \le \alpha$ $(\ge \alpha)$ für unendlich viele $n \in N \Rightarrow a \le \alpha$ $(a \ge \alpha)$//

*//**D1.3.2** (504) Ein angeordneter Körper $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig //*

// $:\Leftrightarrow$ $\forall$ $T \subset K$, $T \neq \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T \in K$.//

*//**S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K$, $T \neq \emptyset$, $s \in K$//*

// 1.) $\overleftarrow{s} = \sup T$: $\Leftrightarrow$ $\alpha)$ $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und//

// $\beta)$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ ist $\overleftarrow{s} - \varepsilon$ keine obere Schranke von T//

// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t \in T$: $t \le \overleftarrow{s}$ und $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \overleftarrow{s} - \varepsilon$//

// $\underrightarrow{s}$ inf T: $\Leftrightarrow$ $\alpha)$ $\underrightarrow{s}$ ist untere Schranke von T und//

// $\beta)$ $\forall$ $\varepsilon > 0$ ist $\underrightarrow{s} + \varepsilon$ keine untere Schranke von T//

// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t \in T$: $t \ge \underrightarrow{s}$ und $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon < \underrightarrow{s} + \varepsilon$//

// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\sup T \in K$ und $\sup T \in T$: maxT=supT//

// $\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\inf T \in K$ und $\inf T \in T$: minT=infT//

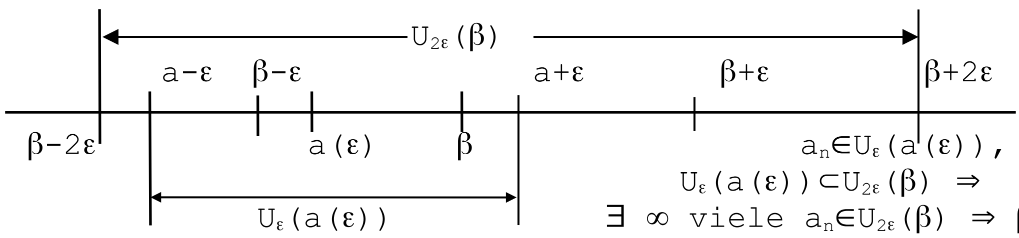
Bew: Sei $a \in H \underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.1} \exists\ a_{\nu_n} \underbrace{\to}_{n \to \infty} a$, $|a_{\nu_n}| \le k \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3} |a| \le k \Rightarrow$ H ist beschränkt

$\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}$ $\exists$ $\beta := \sup H$ und analog $\exists$ inf H....

zu zeigen $\beta \in H$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\,2.)}$ $\exists$ max H...

Sei $\varepsilon > 0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\,1.)}$ $\beta - \varepsilon$ ist keine obere Schranke für H $\Rightarrow \exists\ a(\varepsilon) \in H$:

$\beta - \varepsilon < a(\varepsilon) \le \beta$, $\exists\ \infty$ viele $a_n \in U_\varepsilon(a(\varepsilon))$



$a_n \in U_\varepsilon(a(\varepsilon))$,

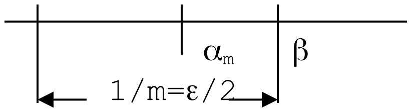
$U_\varepsilon(a(\varepsilon)) \subset U_{2\varepsilon}(\beta)$ $\Rightarrow$

$\exists\ \infty$ viele $a_n \in U_{2\varepsilon}(\beta) \Rightarrow \beta \in H \Rightarrow$

β=max H...analog für Minimum

// ***S2.4.1*** *(1502) Vor:Sei $(a_n)\subset \mathbb{R}$ beschränkt//*
// *Beh:(a_n) hat einen HW $a\in\mathbb{R}$ und eine gegen a konvergente //*
// *Teilfolge.($-k\le a_n\le k\ \forall\ n\in\mathbb{N}$)//*

Andere Formulierung:



Sei H die Menge aller HW.
Z.z: $\exists \max H$.
Nach Vor gilt: $\exists\ k\ge 0:|a|\le k\ \forall\ n \ \underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1}\ H \ne\emptyset$.
Für HW α gilt $|\alpha|\le k$, d.h. H ist beschrankt $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}\ \exists\ \beta=\sup H$.
Noch z.z.: β ist HW. Nach S1.3.1 1.) gibt es zu jedem $m\in\mathbb{N}$
ein $\alpha_m\in H$ mit $\beta-\underbrace{1/m}_{\varepsilon/2}\le\alpha_m\le\beta$ (an sup herankommen mit 1/m).
Wir definieren induktiv mit $n_0=1$ für $m\ge 1$
$n_m:=\min\{k\ge n_{m-1}|a_k-\alpha_m|\le 1/m\}\ne\emptyset$,da α_m HW,
$\{k\ge n_{m-1}:|a_k-\alpha_m|\le 1/m\}\subset\mathbb{N}\Rightarrow$ min existiert.
Zu $\varepsilon>0$ wähle $m_0(\varepsilon):=[2/\varepsilon]+1$, dann gilt

$$|a_{n_m}-\beta|\ \le\ \underbrace{|a_{n_m}-\alpha_m|}_{<1/m<\varepsilon/2}+\underbrace{|\alpha_m-\beta|}_{<\varepsilon/2}<\varepsilon \qquad \underbrace{\frac{1}{m}}_{\varepsilon/2}\ge\beta-\alpha_m$$

d.h.: $a_{n_m}\to\beta$, d.h. β ist HW, d.h. $\beta\in H$, d.h. $\beta=\max H$.

Bem:1.)Ist (a_n) $a_n\in\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, so $\exists$ eine
Teilfolge von der Gesamtfolge (a_n) mit $a_{\nu_n}\ \underbrace{\to}_{n\to\infty}\ \infty$,

$\forall\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ \nu_n$ mit $a_{\nu_n}>n$, $\nu_{n+1}>\nu_n\Rightarrow a_{\nu_n}\ \underbrace{\to}_{n\to\infty}\ \infty$

2.)Ist $H=\emptyset$ und $a_n\in\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so gilt
$a_n\ \underbrace{\to}_{n\to\infty}\ -\infty$

Beh:$\forall\ \underbrace{k}_{\text{noch so große}}>0\ \exists\ n_0(k)\in\mathbb{N}$, $a_n\le -k\ \forall\ n\ge n_0(k)$

Ann:$a_n\ \underset{nicht}{\to}\ -\infty\ldots\exists\ k_0>0:\ \forall\ n_0\in\mathbb{N}\ \exists\ n>n_0,\ a_n\ge -k_0\Rightarrow$
$\exists\ \nu_n<\nu_{n+1},\ a_{\nu_n}>-k_0\Rightarrow\exists\ \nu_k<\nu_{n+1},\ a_{\nu_n}>-k_0\Rightarrow$
$(a_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkte Teilfolge von $a_n\ \underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1}$
$(a_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ hat HW $\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow H\ne\emptyset\Rightarrow$ Widerspruch zu Vor. $H=\emptyset$

Andere Formulierung:
Ann:$a_n\ \underset{nicht}{\to}\ -\infty\ldots\exists\ k\le 0$ und Teilfolge (n_k) von (n) mit
$a_{n_k}\ge k\ \forall\ k$ d.h.(a_{n_k}) ist beschränkt, hat also HW, d.h.
$H\ne\emptyset\Rightarrow$ Widerspruch zu Vor. $H=\emptyset$

In **D2.4.2′** und **D2.4.2′′** wird definiert.
Beginn mit **D2.4.2′**: **D2.4.2′′** wird mit Hilfe von **D2.4.2′** wie ein Satz bewiesen.
Beginn mit **D2.4.2′′**: **D2.4.2′** wird mit Hilfe von **D2.4.2′′** wie ein Satz bewiesen.

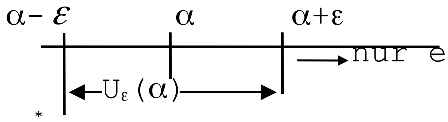
D2.4.2′(1507)
Für eine Folge $(x_n)\subset\mathbb{R}$ heißt

$$\overset{*}{x} := \begin{cases} \max H, falls(x_n) nach\ oben\ beschränkt\ und\ H\neq\emptyset \\ \infty, falls(a_n)\ nach\ oben\ unbeschränkt \\ -\infty, falls(a_n) nach\ oben\ beschränkt\ und\ H=\emptyset \end{cases}$$

der limes superior der Folge (x_n), $\overset{*}{x} = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$

$$\underset{*}{x} := \begin{cases} \min H, falls(x_n)\ nach\ unten\ beschränkt\ und\ H\neq\emptyset \\ -\infty, falls(a_n) nach\ unten\ unbeschränkt \\ \infty, falls(a_n) nach\ unten\ beschränkt\ und\ H=\emptyset \end{cases}$$

der limes inferior der Folge (x_n), $\underset{*}{x} = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n$



nur endlich viele $x_n>\alpha+\varepsilon$

$\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon>0\ x_n\in U_\varepsilon(\overset{*}{x})$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ und

$x_n>\overset{*}{x}+\varepsilon$ für endlich viele $n\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$

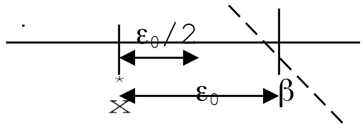
$\forall\varepsilon>0$ gilt $x_n>\overset{*}{x}-\varepsilon$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ und $x_n<\overset{*}{x}+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ (#es fehlen nur die endlich vielen $x_n>\overset{*}{x}+\varepsilon$)

*//**D2.4.1′′**(1501)*
// Sei $(z_n)\subset\mathbb{R}$. Ein $z\in\mathbb{R}$ heißt Häufungswert (HW) von (z_n): $\Leftrightarrow$//
// $\forall\ \varepsilon>0$ gilt $|z_n-z|<\varepsilon$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ //
*//**D2.4.2′′**(1507)//*
//Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $\overset{*}{x}$ heißt dann der größte//
//HW oder limes superior der Folge (x_n), wenn gilt://

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt $\begin{cases} x_n\leq\overset{*}{x}+\varepsilon\ für\ fast\ alle\ n \\ x_n\geq\overset{*}{x}-\varepsilon\ für\ \infty\ viele\ n \end{cases}$,#d.h. auch für $\varepsilon_0/2$//

Bew: $\underset{D2.4.2''\Rightarrow D2.4.2'}{\underbrace{\Rightarrow}}$ Es gilt also $|x_n-\overset{*}{x}|<\varepsilon$ für ∞ viele n $\underset{D2.4.1}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\overset{*}{x}$ ist HW.

Annahme $\beta=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n>\overset{*}{x}$.



$\beta-\overset{*}{x}:=\varepsilon_0$ $\underset{Vor}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $x_n<\overset{*}{x}+\varepsilon_0/2$ ∞ oft, Widerspruch # $x_n>\overset{*}{x}+\varepsilon_0/2$ nur
#für endlich viele x_n $\Rightarrow$
#$x_n>\beta+\varepsilon_0/2$ nur für endlich viele x_n $\Rightarrow$ β kein HW

D2.4.2''(1508)

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $\overset{*}{x}$ heißt dann der größte HW oder limes superior der Folge (x_n), wenn gilt:

$$\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt: } \begin{cases} x_n \geq \overset{*}{x}+\varepsilon \text{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases},$$

oder gleichbedeutend

$$\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt } \begin{cases} x_n \leq \overset{*}{x}+\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$$

wir schreiben auch $\overset{*}{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.

Offenbar ist $\overset{*}{x}$ ein HW von (x_n) und ein $x>\overset{*}{x}$ ist kein HW von (x_n). Insbesondere folgt aus der Existenz eines limes superior, dass die Folge nach oben beschränkt sein muß.

Eine Zahl $\underset{*}{x}$ heißt entsprechend der kleinste HW oder limes inferior der Folge (x_n), wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon>0: \begin{cases} x_n \leq \underset{*}{x}-\varepsilon \text{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \leq \underset{*}{x}+\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases},$$

oder gleichbedeutend

$$\underset{*}{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt } \begin{cases} x_n \geq \underset{*}{x}-\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \leq \underset{*}{x}+\epsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$$

wir schreiben auch $\underset{*}{x} = \liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n$.

Auch $\underset{*}{x}$ ist ein HW von (x_n) und jedes $x<\underset{*}{x}$ ist kein HW von (x_n), und der limes inferior kann nur existieren, wenn die Folge nach unten beschränkt ist.

*//**D2.4.2'**(1505)Für eine Folge $(x_n)\subset\mathbb{R}$ heißt*

$$// \overset{*}{x} = \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \begin{cases} \max H, \text{ falls } (x_n) \text{ nach oben beschränkt und } H\neq\emptyset \\ \infty, \text{ falls } (a_n) \text{ nach oben unbeschränkt} \\ -\infty, \text{ falls } (a_n) \text{ nach oben beschränkt und } H=\emptyset \end{cases} //$$

*//**S2.4.1**(1502) Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ beschränkt Beh:(a_n) hat einen HW $a\in\mathbb{R}$//*
//und eine gegen a konvergente Teilfolge. $(-k\leq a_n\leq k\ \ \forall\ n\in\mathbb{N})$//

Bew: $\underset{D2.4.2'\Rightarrow D2.4.2''}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ $\underset{D2.4.2'}{\underbrace{\Rightarrow}}$

(x_n) nach oben beschränkt $\wedge$ $H\neq\emptyset$ $\wedge$ $\overset{*}{x}$ ist HW $\Rightarrow$

$\exists$ Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} \overset{*}{x}$ $\Rightarrow$ $x_{n_k} > \overset{*}{x}-\varepsilon$ für fast alle k $\Rightarrow$

$x_n > \overset{*}{x}-\varepsilon$ für ∞ viele n.

Ann.: $\exists\ \varepsilon_0>0$: $x_n\geq \overset{*}{x}+\varepsilon_0$ für ∞ viele n, d.h. $\exists$ Teilfolge $x_{n_k} \geq \overset{*}{x}+\varepsilon_0$ nach oben beschränkt, d.h. hat konvergente Teilfolge (S2.4.1) mit HW $\overset{*}{\tilde{x}} \geq \overset{*}{x}+\varepsilon_0$ und $\overset{*}{\tilde{x}}\in H$ $\Rightarrow$

Widerspruch, weil $\overset{*}{x}$=max H, d.h. Gegenteil der Annahme ist richtig:

$x_n\geq \overset{*}{x}+\varepsilon_0$ für endlich viele x_n, d.h. $x_n< \overset{*}{x}+\varepsilon_0$ für fast alle x_n.

S2.4.3(1509) Eine beschränkte Folge $(a_n)\subset \mathbb{R}$ $|a|\le k$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ ist genau dann konvergent, wenn $|H|=1$, d.h. $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |H|=1 \Leftrightarrow$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_n$, $a_n\in\mathbb{R}$

Andere Formulierung (auch für komplexe Zahlen):

$(z_n)\subset \mathbb{C}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ (z_n) ist beschränkt (d.h. $\exists$ $K>0$ mit $|z_n|\le K$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$) und hat höchstens einen HW.

(Bew wie bei $\mathbb{R}$)

//***S2.2.1*** *(1301) Vor:z_n konvergent mit $z_n\to z(n\to\infty)$//*

//Beh:Jede Teilfolge (z_{ν_n}) von (z_n),Umordnung und triviale//

// Abänderung ist konvergent mit $z_{\nu_n}\to z(n\to\infty)$//

//***S2.4.1****(1502)Bolzano Weierstrass (BW)//*

//Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ beschränkt//

//Beh:(a_n) hat einen HW $a\in\mathbb{R}$ und eine gegen a konvergente//

// Teilfolge.$(-k\le a_n\le k$ $\forall$ $n\in\mathbb{N})$//

//***D2.1.1****(1200)$(z_n)=(z_n)_n^\infty$ aus K konvergent $\Leftrightarrow$ $\exists$ $z\in K$://*

// $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z|<\varepsilon$ $\forall$ $n\ge n_0$.//

Bew:"$\Rightarrow$"$\exists$ $z:=\lim_{n\to\infty} z_n\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $|H|\ge 1$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.1}$ $|H|=1$

"$\Leftarrow$"$|H|=1$ $\Rightarrow$ $\exists$ (z_{ν_n})Teilfolge (z_n): $z_{\nu_n}\to z\in H$...

Z.z. $\lim_{n\to\infty} z_n=z$.

(falsche)Annahme $z_n \underset{nicht}{\to} z(n\to\infty)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{Negation\ D2.1.1}$

$\exists$ $\varepsilon_0>0$ $\forall$ $n_0(\varepsilon_0)\in\mathbb{N}$ $\exists$ $n>n_0$:$|z_n-z|\ge\varepsilon_0$ $\Rightarrow$

zu $n_0=1,2,3,...$ $\exists$ $\nu_1>1,\nu_2>2..$ $\nu_n>n$ mit $\nu_n>\nu_{n+1}$ und $|z_n-z|\ge\varepsilon_0$,

$(z_{\nu_n})_{n=1}^\infty$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.1}$ $\exists$ $(z_{\nu_{n_k}})_{k=1}^\infty$: $(z_{\nu_{n_k}})\to\beta\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\beta\in H$ und

$|\beta-a|\ge\varepsilon_0$ $\Rightarrow$ $\beta\ne a$ $\Rightarrow$ $|H|\ge 2$..k Widerspruch zu $|H|=1$

Andere Formulierung zu "$\Leftarrow$"

//D2.4.2''(1507) $\underset{*}{x}=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n\ge \underset{*}{x}-\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n\le \underset{*}{x}+\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n\end{cases}$

// $\overset{*}{x}=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n\le \overset{*}{x}+\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n\ge \overset{*}{x}-\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n\end{cases}$

\# $z_n-\alpha\ge-\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\alpha-z_n\le\varepsilon$, $z_n-\alpha\le\varepsilon$

z_n reell, $|H|=1$ und (z_n) beschränkt nach Vor. $H=\{\alpha\}$.

$\overline{\lim}_{n\to\infty} z_n=\underline{\lim}_{n\to\infty} z_n$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.4.}$ $|z_n-\alpha|<\varepsilon$ für fast alle n $(\varepsilon>0)$, d.h.

$z_n \overset{n\to\infty}{\to} \alpha$ (komplex: in Im und Re zerlegen)

Wir setzen noch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n=\begin{cases}\infty \text{ wenn } (x_n) \text{ nach oben unbeschränkt } \textit{ist} \\ -\infty \text{ wenn } (x_n) \text{ uneigentlich gegen } -\infty\ \textit{konvergiert}\end{cases},$$

und analog

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} -\infty \text{ wenn } (x_n) \text{ nach unten unbeschränkt } \textit{ist} \\ \infty \text{ wenn } (x_n) \text{ uneigentlich gegen } \infty \textit{ konvergiert} \end{cases}.$$

In diesen Fällen bezeichnet man $\pm\infty$ auch als uneigentliche HW der Folge.

Andere Formulierung:

"⇒" Sei $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $a_n, a\in\mathbb{R}$, $(a_{n_K})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ $a_{n_K} \underset{k\to\infty}{\to} a$ $\Rightarrow$

$H=\{a\} \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a$

"⇐" Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = z$, $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, N_1, N_2\in\mathbb{N}$: $a_n<a+\varepsilon\ \forall\, n\geq N_1$, $a_n>a+\varepsilon\ \forall\, n\geq N_2$

$\Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon\ \forall\, n\geq N=\max\{N_1,N_2\} \Rightarrow a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Bem:

1.) Es gilt stets $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{k\geq n} x_k)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{k\geq n} x_k)$

2.) $(x_n)\subset\mathbb{R} \wedge \alpha\in\mathbb{R}$:

$\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ gilt $x_n\in U_\varepsilon(\alpha)$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n\geq\alpha+\varepsilon$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}$
(sonst gäbe es einen HW $\beta\geq\alpha+\varepsilon$)

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt $x_n>\alpha-\varepsilon$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n<\alpha+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

$\alpha = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt $x_n\in U_\varepsilon(\alpha)$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n\leq\alpha+\varepsilon$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}$
(sonst gäbe es einen HW $\beta\geq\alpha-\varepsilon$)

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt $x_n<\alpha+\varepsilon$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ $\wedge$
$x_n>\alpha+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

3.) (siehe auch 1.)) Eine Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ besitzt immer einen größten und einen kleinsten HW und diese sind eindeutig bestimmt. Es gilt immer $\varliminf_{n\to\infty} x_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$, und das = gilt genau dann, wenn die Folge konvergiert oder bestimmt divergiert. In diesem Fall ist dieser gemeinsame Wert gleich dem Grenzwert der Folge.

Bew: Betrachte die Menge A* aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung $x_n > x$ höchstens für endlich viele n richtig ist. Falls diese Menge leer ist, muß die Folge (x_n) nach oben unbeschränkt sein und dann existiert $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \infty$. Falls $A^* = \mathbb{R}$ ist, muß die Folge bestimmt divergieren gegen $-\infty$, was dann per Def gleich $\varlimsup_{n\to\infty}$ ist. In jedem anderen Fall ist A* nach unten beschränkt und aus der Def des $\varlimsup_{n\to\infty}$ folgt $\inf A^* = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$. Also gibt es immer einen $\varlimsup_{n\to\infty}$. Genau so zeigt man die Existenz des $\varliminf_{n\to\infty}$. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus der Def. Falls beide gleich ∞ oder $-\infty$ sind, schließt man aus der Def auf die bestimmte Divergenz und falls beide gleich derselben endlichen Zahl sind, folgt die Konvergenz gegen diesen Wert. Die Umkehrung dieser Aussage folgt ebenfalls leicht aus der Def.

4.)Es gilt stets $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

//D2.4.2'' *(1507)* $\underset{*}{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n \ge \underset{*}{x} - \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \le \underset{*}{x} + \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$ *//*

*//**D2.4.1'**(1500)Sei* $(z_n)\subset \mathbb{C}$. *Eine komplexe Zahl* $z\in\mathbb{C}$ *heißt HW von* (z_n)*//*
//   falls eine konvergente Teilfolge (z_{v_n}) *mit Grenzwert z existiert.//*
//   Bem:Falls $z_n\to z$, *d.h.konvergent, so besitzt sie nur 1 HW.//*

Bew:Sei bel $(a_n)\subset\mathbb{R}$ beschränkt, $\alpha=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $\beta=\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots a_n}{n}$.

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ m:\ a_n \underbrace{>}_{D2.4.2''} \alpha-\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n>m \Rightarrow \frac{a_{m+1}+\ldots a_n}{n-m} > \alpha-\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n>m \Rightarrow$

$\frac{a_{m+1}+\ldots a_n}{n} > \frac{n-m}{n}\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \alpha-\frac{\varepsilon}{2}$

$\frac{a_1+\ldots a_m}{n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \#\exists\ n_0:\# \ \frac{a_1+\ldots a_m}{n} > -\frac{\varepsilon}{2}\ \ \#\forall\ n>n_0\# \Rightarrow$

$\exists\ n_1>n_0:\ \frac{a_1+\ldots+a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n}{n} > \alpha-\varepsilon\ \ \forall\ n>n_1 \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots a_n}{n} \underbrace{¿}_{???} \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

$a_n>0,\ \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n>0 \Rightarrow (\ln a_n)$ beschränkt $\Rightarrow$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} (\ln a_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln a_1+\ldots+\ln a_n}{n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} (\ln \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n})$

Wähle Teilfoge $(\ln a_{n_k})\ \underset{D2.4.1'}{\vdots}\ \beta:=\underline{\lim}_{n\to\infty}(\ln a_n) \Rightarrow \alpha_{n_k} \underbrace{\to}_{k\to\infty} e^\beta \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le e^\beta$

$\Rightarrow\ \gamma:=\ln(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n) \le \beta$.

Wähle Teilfoge $a_{n_l} \underbrace{\to}_{\ell\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \ln a_{n_l} \underbrace{\to}_{\ell\to\infty} \gamma \Rightarrow \beta \underbrace{\le}_{\beta \text{ kleinster HW}} \gamma \Rightarrow$

$\beta=\gamma$

$\forall\ (\alpha_n):\ 0<r_1\le a_n\le r_2 \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty}(\ln a_n)=\ln(\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n) \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n}$

Entsprechend $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n$,

$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n}$ nach Def $\underline{\lim}_{n\to\infty}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1*\ldots*a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n \underbrace{\Rightarrow}_{a_n:=\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, α_1 durch 1 ersetzt:

endlich viele Änderungen ändern $\underline{\lim}_{n\to\infty}$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ nicht

$\#\ \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_1*\ldots*\alpha_n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\underbrace{1}_{\alpha_0}*\alpha_1¿\ldots*\alpha_{n-1}} \underbrace{=}_{a_n:=\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}} \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha_1}{1}*\frac{\alpha_2}{\alpha_1}*\ldots\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}$

Andere Formulierung:

$$0\le \underbrace{\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{=\alpha} \le \underbrace{\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}_{=\alpha'} \le \underbrace{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}_{\beta'} \le \underbrace{\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{\beta} \le\infty:$$

$\alpha>0$, $\beta<\infty$, ε beliebig klein, $\varepsilon<\alpha$:

$$\alpha-\varepsilon<\frac{a_{k+1}}{a_k}<\beta+\varepsilon \quad \forall\ k\ge m \Rightarrow \alpha-\varepsilon<\frac{a_{m+1}}{a_m}<\beta+\varepsilon,\ \alpha-\varepsilon<\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}<\beta+\varepsilon\ldots\ \alpha-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\beta+\varepsilon \Rightarrow$$

$$(\alpha-\varepsilon)^{n-m}<\frac{a_{m+1}}{a_m}*\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}*\ldots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}*\frac{a_n}{a_{n-1}}<(\beta+\varepsilon)^{n-m}\quad\forall\ k\ge m$$

(Bsp $\underset{2}{m}$ +1=3, 4, 5, 6=n $\Rightarrow$ n-(m+1)+1=n-m=6-3+1=6-2=4 Faktoren) $\Rightarrow$

$$(\alpha-\varepsilon)^{n-m}<\frac{a_n}{a_m}<(\beta+\varepsilon)^{n-m}\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{a_m}}_{\substack{\to 1\\ n\to\infty}}\,(\alpha-\varepsilon)^{\overbrace{1-\frac{m}{n}}^{\substack{n\to\infty\\ \to 1}}}<\sqrt[n]{a_n}<\underbrace{\sqrt[n]{a_m}}_{\substack{\to 1\\ n\to\infty}}\,(\beta+\varepsilon)^{\overbrace{1-\frac{m}{n}}^{\substack{n\to\infty\\ \to 1}}}\Rightarrow$$

$$\alpha-\varepsilon\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\ \text{ und }\ \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\beta+\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{\varepsilon\text{ beliebig klein}} \alpha\le\alpha',\ \beta'\le\beta$$?????????????

? weil $\exists\ \alpha-\varepsilon<\alpha''<\alpha$

Andere Formulierung:

Vor: $\{z_n\}_{n\in N}\subset C$, $z_n\neq 0\ \forall\ n\in N$

Beh: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|z_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\frac{z_{n+1}}{z_n}|$

*//**D2.4.2''**(1507)//*

*//Sei (x_n) eine Folge in **R**. Eine Zahl $\overset{*}{x}$ heißt dann der größte*
//HW oder limes superior der Folge (x_n), wenn gilt:

// $\overset{*}{x}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$ $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ gilt:¿¿ ,

//oder gleichbedeutend

// $\overset{*}{x}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$ $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ gilt $\begin{cases} x_n\leq\overset{*}{x}+\varepsilon\text{ für fast alle } n\\ x_n\geq\overset{*}{x}-\varepsilon\text{ für }\infty\text{ viele } n\end{cases}$ //

//wir schreiben auch $\overset{*}{x}=\limsup_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$.//

//Bem://
*//3.)(siehe auch 1.))Eine Folge (x_n) aus **R** besitzt immer //*
// einen größten und einen kleinsten HW und diese sind //
// eindeutig bestimmt. Es gilt immer $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n$, und //
// das = gilt genau dann, wenn die Folge konvergiert oder //
// bestimmt divergiert. In diesem Fall ist dieser //
// gemeinsame Wert gleich dem Grenzwert der Folge.//

Bew: $r:=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|z_n|}$, $t:=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\frac{z_{n+1}}{z_n}|$, Annahme $r>t$ $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|z_n|}>\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\frac{z_{n+1}}{z_n}|\right)$ $\Rightarrow$

$\exists\ \underbrace{\overset{<r}{\overbrace{q}}}_{\in R}\in(t,r):\ |\frac{z_{n+1}}{z_n}|\leq\underbrace{q}_{\#=r+\varepsilon}$ q $\forall\ n\geq n_0\ \Rightarrow$

$|\frac{z_n}{z_{n_0}}|=|\frac{z_{n_0+1}}{z_{n_0}}|\ |\frac{z_{n_0+2}}{z_{n_0+1}}|\ \ldots\ |\frac{z_n}{z_{n-1}}|=\prod_{k=n_0}^{n-1}\ |\frac{z_{k+1}}{z_k}|\leq\prod_{k=n_0}^{n-1}$ q$=q^{n-n_0}$ $\Rightarrow$

$|z_n|\leq|z_{n_0}|\ q^{n-n_0}=(|z_{n_0}|\ q^{n_0})q^n=cq^n$ $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{|z_n|}\leq\underbrace{\sqrt[n]{c}}_{\underset{n\to\infty}{\to 1}}*q$ $\forall\ n\geq n_0$ $\Rightarrow$

$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|z_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \left(\underbrace{\overset{konvergent}{\overbrace{\sqrt[n]{c}}}}_{\underset{n\to\infty}{\to 1}}*q\right)\underbrace{=}_{¿D2.4.2\ Bem\ 3.)}=q*\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{c}}_{\underset{n\to\infty}{\to 1}}=q$ $\Rightarrow$

Widerspruch zur Annahme $r>t$

Andere Formulierung:

Vor: $(c_n)_{n\in N}$, $c_n \in R_+$

Beh: (.) $\sqrt[n]{|c_n|}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{c_{n+1}}{c_n}$ (..) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{c_{n+1}}{c_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}$

*//**S2.3.21**(1459)Wichtige Grenzwerte 1.)* $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$ *//*

Bew: Sei $\beta := \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{c_{n+1}}{c_n} < +\infty \Rightarrow \forall\ q>\beta\ \exists\ N(q)\in N$: $\frac{c_{n+1}}{c_n} \le q\ \ \forall\ n\ge N \Rightarrow$

$$\frac{c_{n+\ell}}{c_n} \#= \frac{c_{n+1}}{c_n}\ \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \dots \frac{c_{n+\ell}}{c_{n+\ell-1}} \# \le q \quad \forall \quad \in N \Rightarrow c_{\underbrace{m}_{=N+\ell}} \le c_{\underbrace{N}_{=n}}\ q^{\overbrace{m-N}^{=\ell}} = \left(\frac{c_N}{q^N}\right) q^m\ \forall\ m>N \Rightarrow$$

$$\sqrt[m]{c_m} \le \sqrt[m]{\frac{c_N}{q^N}}\ q \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.21\ 1.):\ \lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{c_N}{q^N}}=1} \sqrt[k]{c_k}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \le q\ \ \forall\ q>\beta$$

(..) analog, bzw betrachte $\left(\frac{1}{c_n}\right)_{n\in N}$.

Bsp:1.) $a_n = 1/n + (-1)^n$, $n\in N$, $a_{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \to 1$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 1 \to -1 \Rightarrow$

$H = \{-1, 1\}$

2.) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $H = \{e, 1/e\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = e$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = e^{-1}$.

3.) $a_n = (1+1/n)^{(-1)^n n}$, $a_{2n} = (1+\frac{1}{2n})^{2n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e$,

$$a_{2n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1/e,\ H = \{e, 1/e\}$$

4.) $a_n = (-1)^n \cdot n$, $H = \emptyset$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = \infty$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = -\infty$

5.) $a_n = 1/n + (-1)^n \cdot n$, $n\in N$,

$a_{2n} = \frac{1}{2n} + 2n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - (2n+1) \underbrace{\to}_{n\to\infty} -\infty$,

$H = \emptyset$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = \infty$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n = -\infty$

6.) $a_n = \sum_{v=0}^{\infty} z^v = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $z\in C$, $z\ne 1$, $n\in N$

$z=1$: $a_n = n+1 \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$, $|z|<1$: $|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{1}{1-z}$

$a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a \Rightarrow a_n - a_{n-1} = z^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a - a = 0 \Leftrightarrow |z|<1$

7.) $b_n = z^n$, $|z|<1 \Rightarrow b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, $|z|>1 \Rightarrow b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$

$|z|=1$, Annahme $\exists\ b := \lim_{n\to\infty} b_n$, $|b_n| = 1 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b \ne 0 \Rightarrow$

$$z = \frac{z^{n+1}}{z^n} = \frac{b^{n+1}}{b^n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{b}{b} = 1$$

A2.4.4 Berechne $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ der Folge $(x_n=[2+(-1)^n]^{-n})$

Lös: Teilfolgen $x_{2n}=3^{-2n}=(1/3)^{2n}=(1/9)^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \wedge x_{2n+1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$

und jedes Glied Element einer Teilfolge. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}=1 \wedge \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}=0$

A2.4.5 Zeige: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (-x_n)$

A2.4.6 Zeige $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n$. Finde ein Bsp zweier Folgen, für die das < Zeichen gilt

Lös: $x_n=(-1)^n$, $H=\{+1,-1\}$

$y_n=(-1)^{n+1}$, $H=\{+1,-1\}$, $x_n+y_n=0=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ (x_n+y_n)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ x_n=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ y_n=1$

A2.4.7 Beweise, dass für jede beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gilt:

(.) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$ (..) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$

*//**D2.4.2''**(1507)* $\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n \leq \overset{*}{x}+\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$ *//*

Bew: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt $\Rightarrow \exists\, g>0,\ |a_n|\leq g\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

(.) Sei $b_n := \underbrace{\sup}_{k\geq n} a_k,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow |b_n|\leq g\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$

b_n beschränkt, $b_n \searrow$, da $b_{n+1} = \underbrace{\sup}_{k\geq n+1} a_k \leq \underbrace{\sup}_{k\geq n} a_k = b_n\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

#($\underbrace{\sup}_{k\geq n+1}$) fehlt a_n. War a_n der größte Wert, so wird $\underbrace{\sup}_{k\geq n+1} a_k$

#kleiner, andernfalls bleibt $\underbrace{\sup}_{k\geq n+1} a_k$ gleich.

$\{a_k: k>n+1\}$ enthält weniger Werte als $\{a_k: k>n\} \Rightarrow b_n$ konvergiert.

Sei $b := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$. ($(a_n)$ beschränkt $\Rightarrow \exists\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \in \mathbb{R}$)

Z.z. $b = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$.

Beweismethode:

Aus $\forall\, \varepsilon>0$ gilt $a_n > b-\varepsilon$ für ∞ viele $n\in\mathbb{N}$ & $a_n < b+\varepsilon$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

folgt $b = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$

sei $\varepsilon>0$ baf. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}: |b-b_n|<\varepsilon\ \forall\, n\geq n_0$ (da $b = \lim_{n\to\infty} b_n$), denn

α) $\underbrace{\sup a_k}_{k\geq n} = b_n \underbrace{<}_{b_n \text{ mon fallend}} b+\varepsilon\ \forall\, n\geq n_0 \Rightarrow \underbrace{a_n}_{n\geq m} \leq \underbrace{\sup a_k}_{k\geq m} < b+\varepsilon \Rightarrow$

$a_n < b+\varepsilon\ \forall\, n\geq n_0$ (für fast alle n)

β) Annahme $a_n > b-\varepsilon$ nur für endlich viele $n \Rightarrow$

$\exists\, n_1\in\mathbb{N}: a_n \leq b-\varepsilon\ \forall\, n\geq n_1$ (fast alle) $\Rightarrow b_n = \underbrace{\sup}_{k\geq n} a_k \leq b-\varepsilon\ \forall\, n\geq n_1 \Rightarrow$

$\varepsilon \leq b-b_n\ \forall\, n\geq n_1$ Widerspruch zu $|b_n-b|<\varepsilon\ \forall\, n\geq n_0$ Also gilt

$a_n > b-\varepsilon$ für unendlich viele n

oder

Definiere $b_n := \underbrace{\sup}_{k\geq n} a_k$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ und $a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$.

Sei nun $\varepsilon>0$ bel fest $\Rightarrow$

$\exists\, n_0$ mit $a_n < a+\varepsilon \wedge a_n > a-\varepsilon\ \forall\, n\geq n_0 \Rightarrow$

$a-\varepsilon \leq b_n \leq a+\varepsilon\ \forall\, n\geq n_0 \Rightarrow a-\varepsilon \leq b \leq a+\varepsilon \Rightarrow |a-b|\leq\varepsilon \Rightarrow a=b.$

(..) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\inf a_n}_{k\geq n}\right)$ wird analog gezeigt oder

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n) \underbrace{=}_{(.)} -\lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{\sup}_{k\geq n}(-a_k)}_{=-\underbrace{\inf}_{k\geq n} a_k} = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\inf a_n}_{k\geq n}\right)$

A2.4.8 Bestimme jeweils die Menge der Häufungswerte, sowie Limes superior und Limes inferior der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

a) $a_n=2+\frac{(-1)^n n}{n+1}$

Lös: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\underbrace{\frac{2n}{2n+1}}_{\frac{2}{2+1/n}})=2+1=3.$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\underbrace{\frac{-(2n+1)}{(2n+1)+1}}_{\to -1})=$

$2-1=1 \Rightarrow H=\{1,3\}$ (Menge der Häufigkeitswerte von a_n). $\Rightarrow$
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=3$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=1$ (da max H=3, min H=1).

Sei $\alpha\in H \Rightarrow \exists$ Teilfolge (a_{ν_n}) von (a_n) mit $a_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$,
$\exists$ unendlich viele ν_n der Form 2k oder 2k+1 $k\in\mathbb{N}$. Diese Indizes seien $\nu_{\mu n}$, dann ist $(a_{\nu_{\mu n}})$ eine Teilfolge von (a_{2n}) oder $(a_{2n+1}) \Rightarrow a_{\nu_{\mu n}}\to 1$ oder $a_{\nu_{\mu n}}\to 3$. Wegen $a_{\nu_{\mu n}}\to\alpha$ folgt $\alpha=1$ oder 3 $\Rightarrow H\subseteq\{1,3\}$

b) $a_n=n+(-1)^n\sqrt{n^2+n}$

*//**A2.1.4** (1205) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.//*

// Beweise, dass dann $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ gilt.//

Lös: $a_{2n}=2n+\sqrt{(2n)^2+(2n)}\geq 2n\ \ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ nicht nach oben beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def limsup } H\neq 0}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\infty$.

$(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ ist Teilfolge von $(n-\sqrt{n^2+n})_{n=1}^{\infty}$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+1/n}}\underbrace{=}_{\text{A2.1.14 Stet } \sqrt{\ } \text{ Funktion}}\frac{-1}{1+\sqrt{1+0}}=-1/2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{S2.1.5}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=-1/2 \Rightarrow H=\{-1/2\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=-1/2$

c) $a_n=n/m-[n/m]$ mit einem festen $m\in\mathbb{N}$.

Lös: #Bsp m=3.. $\frac{1}{3}-[\frac{1}{3}]=\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}-[\frac{2}{3}]=\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}-[\frac{3}{3}]=0$,

\# $\frac{4}{3}-[\frac{4}{3}]=\frac{3*1+1}{3}-[\frac{3*1+1}{3}]=\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}-[\frac{5}{3}]=\frac{3*1+2}{3}-[\frac{3*1+2}{3}]=\frac{2}{3}$, $\frac{3*2}{3}-[\frac{3*2}{3}]=0$,

\# $\frac{7}{3}-[\frac{7}{3}]=\frac{3*2+1}{3}-[\frac{3*2+1}{3}]=\frac{1}{3}$, $\frac{8}{3}-[\frac{8}{3}]=\frac{3*2+2}{3}-[\frac{3*2+2}{3}]=\frac{2}{3}$, $\frac{3*3}{3}-[\frac{3*3}{3}]=0$,

\# u.a. $\frac{3*2+1}{3}-[\frac{3*2+1}{3}]=\frac{3*2+1}{3}-[\underbrace{\frac{3*2}{3}}_{\in N}+\frac{1}{3}]=\frac{3*2+1}{3}-\frac{3*2}{3}=\frac{1}{3}$

Für $\nu=0,1,...,m-1$, $a_{m\,n+\nu}=\underbrace{\frac{mn+\nu}{m}}_{n+\frac{\nu}{m}}-[\underbrace{\underbrace{\frac{mn+\nu}{m}}_{n+\frac{\nu}{m}\in[0,1]}}_{=n}]=(n+\nu/m)-\underbrace{\left[\frac{n}{m}\right]}_{=n}=\nu/m \Rightarrow$

$H=\{\nu/m:\nu=0,1,..,m-1\}=\{0,1/m,2/m,..,\frac{m-1}{m}\} \Rightarrow$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ a_n=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$

d) $a_n=2+\dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$

Lös: $a_{2n}=2+\dfrac{(2n)^2}{(2n)^2+1}=2+\dfrac{4}{4+\frac{1}{n^2}}\overset{n\to\infty}{\to}3$,

$$a_{2n+1}=2-\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1}=2-\frac{(2+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}}\overset{n\to\infty}{\to}1 \Rightarrow H=\{1,3\}$$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=3$. Es sei $(a_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Dann enthält die Folge $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ der Indizes ∞ viele gerade oder ∞ viele ungerade Folgeglieder. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{\tilde{n}_k})_{k=1}^{\infty}$ von $(a_{n_k})_{n=1}^{\infty}$, die nur gerade bzw nur ungerade (was den Index angeht) Folgeglieder enthält $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{\tilde{n}_k}=3$ oder $\lim_{k\to\infty} a_{\tilde{n}_k}=1 \Rightarrow a_{n_k}\lim_{k\to\infty}=3$ oder $a_{n_k}\lim_{k\to\infty}=1$. Daraus folgt, dass keine weiteren HW existieren.

e) $a_n=\dfrac{n}{3}-\left[\dfrac{n}{3}\right]$

Lös: $a_{3k+\nu}=\dfrac{3k+\nu}{3}-\left[\dfrac{3k+\nu}{3}\right]=k+\dfrac{\nu}{3}-\left[k+\dfrac{\nu}{3}\right]=k+\dfrac{\nu}{3}-k\dfrac{\nu}{3}$ für $\nu=0,1,2$.

Wie in a) zeigt man, dass keine weiteren HW existieren können ⇒ $H=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}$

f) $a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n(-1)^{b_n}}$, wobei $b_n=3\left(\frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right]\right)$

Lös:

n	$\frac{(-1)^n}{n}$	b_n (siehe a)	$(-1)^{b_n}$	$n(-1)^{b_n}$
1	$\frac{-1}{1}=-1$	$3*\frac{1}{3}=1$	$(-1)^1=-1$	$1*(-1)^1=-1$
2	$\frac{(-1)^2}{2}=+\frac{1}{2}$	$3*\frac{2}{3}=2$	$(-1)^2=1$	$2*(-1)^2=2$
3	$\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3}$	$3*0=0$	$(-1)^0=1$	$3*(-1)^1=-3$
4	$\frac{(-1)^4}{4}=+\frac{1}{4}$	$3*\frac{1}{3}=1$	$(-1)^1=-1$	$4*(-1)^{-1}=-4$
5	$\frac{(-1)^5}{5}=-\frac{1}{5}$	$3*\frac{2}{3}=2$	$(-1)^2=1$	$5*(-1)^1=5$
6	$\frac{(-1)^6}{6}=+\frac{1}{6}$	$3*0=0$	$(-1)^0=1$	$6*(-1)^1=-6$
7	$\frac{(-1)^7}{7}=-\frac{1}{7}$	$3*\frac{1}{3}=1$	$(-1)^1=-1$	$7*(-1)^{-1}=-7$ usw

$b_{3k+\nu}=\nu$, $(-1)^{b_{3k+\nu}}=\begin{cases}1, \nu=0,2\\ -1, \nu=1\end{cases}$. Wir betrachten Teilfolgen $a_{6k+\nu?}$:

$\left(1+\frac{1}{6k+\nu}\right)^{6k+\nu}\xrightarrow{k\to\infty} e$, $\nu=0,2$ $\qquad$ $\left(1-\frac{1}{6k+\nu}\right)^{-6k+\nu}\xrightarrow{k\to\infty} e$, $\nu=1$

$\left(1-\frac{1}{6k+\nu}\right)^{6k+\nu}\xrightarrow{k\to\infty} 1/e$, $\nu=3,5$ $\qquad$ $\left(1+\frac{1}{6k+\nu}\right)^{-(6k+\nu)}\xrightarrow{k\to\infty} 1/e$, $\nu=4$

Wie vorher folgt $H=\{\frac{1}{e}, e\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=1/e$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=e$

g) $a_n=\frac{1}{(((-1)^{n+1}-2))^n}$

- a_n beschränkt? … 2 Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$.
  $a_{2k}=\frac{1}{(((-1)^{2k}-2))^{2k-1}}=-1$, $a_{2k+1}=\frac{1}{(((-1)^{2k+1}-2))^{2k}}=\frac{1}{9^k}=(\frac{1}{9})^k \Rightarrow a_1=-1\le a_n\le\frac{1}{9}=a_n$
  $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt
- sup, inf, min, max?
  $a_n=-1=\min\{a_n|n\in\mathbb{N}|\}=\inf\{a_n|n\in\mathbb{N}|\}$
  $a_2=\frac{1}{9}=\max\{a_n|n\in\mathbb{N}|\}=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}|\}$
- Häufungswerte (HW)?
  $a_{2k-1}=-1$ ist HW
  Jeder Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt zwischen -1 und $\frac{1}{9}$ $\Rightarrow$
  $-1=H$ ist kleinstmöglicher HW $\Rightarrow -1\le\min H\le\frac{1}{9}\Rightarrow -1\in H\Rightarrow -1=\min H=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

A2.4.9 (1514) Gegeben seien zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Zeige:

a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n {}^* \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$ mit $a_n, b_n \ge 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

//D2.4.2'' (1507)

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt: $\begin{cases} x_n \ge \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ höchstens für endlich viele } n \\ x_n \ge \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$,

// $\overset{*}{x} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ gilt $\begin{cases} x_n \le \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \ge \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$

Bew: $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b \ge 0$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n \le ab$?...

Z.z. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n b_n \le ab + \varepsilon\ \forall\ n \ge n_0$. Daraus folgt Beh.

Sei dazu $\varepsilon>0$ baf, $\tilde{e}>0$ Lösung von

$(a+b)\tilde{e} + \tilde{e}^2 = \varepsilon$ $\left(\tilde{e} = \underbrace{-\frac{a+b}{2} + \sqrt{e + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}_{>0}\right)$

NR: $\left(\tilde{e} + \frac{a+b}{2}\right)^2 = \tilde{\varepsilon}^2 + (a+b)\tilde{e} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \varepsilon + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\tilde{e} = \underbrace{-\frac{a+b}{2} + \sqrt{e + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}}_{>0}$)

$a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.2''} \exists\ n_1 \in \mathbb{N}$: $\underbrace{a_n \le a + \tilde{e}}_{\text{fast alle unterhalb....}}\ \forall\ n \ge n_1$

$b = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n \underbrace{\Rightarrow}_{D2.4.2''} \exists\ n_2 \in \mathbb{N}$: $b_n \le b + \tilde{e}\ \forall\ n \ge n_2$

Sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow a_n b_n \underbrace{\le}_{n \ge n_1 \wedge n \ge n_2} (a+\tilde{e})(b+\tilde{e}) = (a+b)\tilde{e} + \tilde{e}^2 = \varepsilon\ \forall\ n \ge n_0$

b) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \ge 0$, so gilt: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n = a * \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

mit $\underbrace{a_n}_{(a_n) \text{ beschränkt}}$, $\underbrace{b_n}_{(b_n) \text{ beschränkt}} \ge 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Bew: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = b \Rightarrow \exists$ Teilfolge (b_{v_n}) von (b_n) mit $b_{v_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} b$,

(a_{v_n}) Teilfolge von $(a_n) \Rightarrow a_{v_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} a \underbrace{\Rightarrow}_{GW \text{ Regeln}} a_{v_n} b_{v_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} ab$

$\Rightarrow ab$ ist HW von $(a_n b_n) \Rightarrow ab \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n b_n \underbrace{\le}_{a)} ab \Rightarrow ab = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, (a_n b_n)$

c) $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Bew: ● $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$

Es sei $a=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$. $\underbrace{\left(b_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}}_{Vor.\ beschränkt} \Rightarrow \exists$ eine konvergente Teilfolge $(b_{\tilde{n}_k})_{k=1}^{\infty}$.

Beachte: $\lim_{k\to\infty} a_{\tilde{n}_k}=a$ # $(a_{\tilde{n}_k})$ Teilfolge von a_{n_k})#, dann gilt

$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \lim_{k\to\infty}(a_{\tilde{n}_k}+b_{\tilde{n}_k})=a+\underbrace{\lim_{k\to\infty} b_{\tilde{n}_k}}_{irgendein\ HW \le dem\ größten} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

● $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

$(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sei eine Teilfolge von $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{k\to\infty} b_{n_k}=\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Weiter sei $(a_{\tilde{n}_k})_{k=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

$\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ge \lim_{k\to\infty}(a_{\tilde{n}_k}+b_{\tilde{n}_k}) = \lim_{k\to\infty} a_{\tilde{n}_k} + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

d) $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$ baf, $\exists\ n_0(\varepsilon)$ mit $a_n<a+\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\ n\ge n_0(\varepsilon)$ und

$\exists\ n_1(\varepsilon)$ mit $b_n<b+\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall\ n\ge n_1(\varepsilon)$,

wobei $a=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $b=\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \Rightarrow a_n+b_n\le a+b+\varepsilon\ \forall\ n\ge\max\{n_0(\varepsilon),n_1(\varepsilon)\}$

$\Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)\le a+b$

A2.4.10 Bestimme alle Häufungswerte der Folge $(i^n)_{n=1}^{\infty}$

Lös: $i^n=\begin{cases} 1 \text{ falls } n=4k \\ i \text{ falls } n=4k+1 \\ -1 \text{ falls } n=4k+2 \\ -i \text{ falls } n=4k+3 \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$, nach A1.6.8 a)

Im Komplexen keine Anordnung $\Rightarrow$ kein $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ $\Rightarrow$

$H=\{1,i,-1,-i\}$

A2.4.11 $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ und alle HW für die Folgen (x_n)?

a) $x_n=((-1)^{n+1}-2)^{-n}$.

Lös: HW $-1,0$; $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=-1$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=0$

b) $x_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{4}}\frac{(-1)^n}{n}$

Lös: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ HW, $\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)=0$

c) $x_n=(2(-1)^n-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}})^n$.

Lös: $x_{4k}\to1$ HW, $x_{4k-1}\to-\infty=\underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)$, $x_{4k-2}\to+\infty=\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n)$, $x_{4k-3}\to-1$ HW

d) $a_n=$, $k\in\mathbb{N}$.

e) $a_n \begin{cases} 1+1/2^n, \text{falls } n=3k \\ 1+\frac{n+1}{n}, \text{falls } n=3k-1 \\ 2, \text{falls } n=3k-2 \end{cases} = (-1)^n \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

A2.4.12 Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

Zeige: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Bew fehlerhaft????!!!! Richtigen Bew suchen!!!

*//**D2.4.2''**(1507)* $\overset{*}{x} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n \le \overset{*}{x} + \varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \ge \overset{*}{x} - \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$ *//*

Bew:O.B.d.A. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R < \infty$. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le R+\varepsilon\ \ \forall\ n \ge n_0 \Rightarrow$

$\forall\ n>n_0$ gilt: $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} = a_{n_0} \prod_{v=0}^{n-n_0-1} \frac{a_{n_0+v+1}}{a_{n_0+v}} \le a_{n_0} (R+\varepsilon)^{n-n_0}$

$= \frac{a_{n_0}}{(R+\varepsilon)^{n_0}} (R+\varepsilon)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \underbrace{\le}_{\forall\ n>n_0} \overbrace{\sqrt[n]{\underbrace{\frac{a_{n_0}}{(R+\varepsilon)^{n_0}}}_{c}}}^{\to 1} (R+\varepsilon) \underbrace{\to}_{n\to\infty} (R+\varepsilon) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le R+\varepsilon$.

Da $\varepsilon>0$ baf, folgt $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le R$.

A2.4.13 $x_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$, $n \in \mathbb{N}$. Benutze die Monotonie von $(1/j)$ um zu zeigen, dass $x_{2n} - x_n > n/(2n) = 1/2$ ist.

Lös: $x_{2n} - x_n = \sum_{j=n+1}^{2n} 1/j \ge n \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2}$ ⇒ keine Cauchyfolge ⇒ nicht konvergent ⇒ bestimmt divergent

A2.4.14 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$, Konvergenz?

a) $a_n=n(-1)^n$

Lös: Annahme $\exists$ HW=ξ beliebig von (a_n). Wahl $n_0>|\xi|+1 \Rightarrow$

Für irgendein gerades $n>n_0$ ist dann $n>\xi \Rightarrow$

$|a_n-\xi|=|n-\xi|=n-\xi>1>n_0-\xi>1$

Für irgendein ungerades $n>n_0$ ist dann $n>\xi \Rightarrow$

$|a_n-\xi|=|-n-\xi|=n+\xi>1>n_0+\xi>1$

$\Rightarrow$ HW Bedingung $|a_n-\xi|<\varepsilon$ für $\varepsilon=1$ ab n_0 verletzt $\Rightarrow$

Nur endliche viele $n=1,2,3,\ldots, n_0$ können die Schranke einhalten $\Rightarrow$

Widerspruch zur Def des HW $\underbrace{\Rightarrow}_{\xi \text{ beliebig}}$

Hinweis: Strebt eine Teilfolge gegen ∞, eine andere gegen $-\infty$, so kann es trotzdem HW geben. Bsp mit HW 0:

$$a_n' = \begin{cases} n \text{ falls } n=1,4,7,10,.. \\ -n \text{ falls } n=2,5,8,11, ... \\ 0 \text{ falls } n=3,6,9,\ldots \end{cases}$$

b) $b_n=\frac{1}{n}(-1)^n$

Lös: $|b_n| \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow b_n$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n= \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n= \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$

c) $c_n=c(-1)^n$,$c\in\mathbb{R}$ konstant.

Lös: $|c_n|$ konvergiert, aber $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{c_{2n}}_{Teilfolge} =c$ & $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{c_{2n+1}}_{Teilfolge} =-c \Rightarrow$

c_n divergent, $=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} c_n=|c|$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} c_n=-|c|$

d) $d_n=\phi(n)$, ϕ irgendeine bijektive Abbildung: $\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$,

ϕ existiert, siehe Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.

*//**D2.4.1'**(1500)*

//1.)Sei $(z_n)\subset\mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl $z\in\mathbb{C}$ heißt HW von (z_n), falls eine

// konvergente Teilfolge (z_{v_n}) mit Grenzwert z existiert.

// $z\in\mathbb{C}$ ist HW von (z_n) $\Leftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge (z_{v_n})von (z_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_{v_n}=z$

// Bem:Falls $z_n\to z$, d.h.konvergent, so besitzt sie nur 1 HW.

#Lös: divergent, da jedes $q\in\mathbb{Q}$ ein HW ist

\# $\forall$ $x\in\mathbb{Q}$ $\exists$ $(q_{x_v})_{v=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{v\to\infty} q_{x_v}=x \Rightarrow \forall$ $x\in\mathbb{Q}$: x ist HW $\Rightarrow d_n$ (divergent