2.5 Doppelfolgen

Bezeichnung
$Z^2=\{(m,n)|n,m\in Z)\}$: Menge der ganzzahligen Gitterpunkte im R^2.
$(n,m)\in Z^2$ werden oft als Indizes verwendet und heißen dann Doppelindices.
Auch $N^2=\{(m,n)|n,m\in N)$, $N_0{}^2=\{(m,n)|m,n\in N_0)\}$.

D2.5.1(1550) Doppelfolge reeller Zahlen
Abbildung a: $N^2 \mapsto R$: $(n,m) \mapsto a_{nm}$, $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$

D2.5.2(1550)
$(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ heißt konvergent:
$\exists\ a\in R$ sodass $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in N$ mit $|a_{nm}-a|<\varepsilon\ \forall\ n,m\in N,\ n,m\geq N$
Bem: Limes oder Doppellimes a ist eindeutig bestimmt.
$a=\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}$ oder $a_{nm} \underbrace{\to}_{n,m\to\infty} a$
Bew entsprechend Bew zu *//**D2.1.1**(1200) Bem: 3.)//*

S2.5.1(1550) Cauchysches Konvergenzkriterium
$(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in N$ mit $|a_{n'm'}-a_{nm}|<\varepsilon\ \forall\ n,n',m,m'\geq N$ oder
$\forall\ n'\geq n\geq N$ und $m'\geq m\geq N$

*//**D2.1.3**(1250) Eine Folge (z_n) in K heißt Cauchyfolge, wenn gilt://*
// $\forall\varepsilon>0\ \exists\ N\in R_+\ \forall n,m\in N: n,m\geq N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$//
*//**S2.1.2 2.)**(1503)//*
//Eine Folge in K ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.//
//$(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist konvergent $\Leftrightarrow (z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$//
// $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N\ \forall n,m\in N: n,m\geq n_0(\varepsilon)\in N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$.//
Bew: „$\Leftarrow$“ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in N$: $|a_{n'm'}-a_{nm}|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n,n',m,m'\geq N \Rightarrow$

$|a_{n'n'}-a_{nn}|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n,n'\geq N \underbrace{\Rightarrow}_{D2.1.3} (b_n)_{n\in N}:=a_{nn}$, ist Cauchyfolge $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2}$

$(b_n)_{n\in N}$ ist konvergent $\Rightarrow \exists\ a\in R,\ N'\in N$: $|a_{nn}-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\geq N' \Rightarrow$

$\forall\ n,m\geq\max\{N,N'\}$: $|a_{nm}-a|\leq|a_{nm}-a_{nn}|+|a_{nn}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

\# „$\Rightarrow$“ $\exists\ N=N(\varepsilon)\in N$: $|a_{nm}-a|<\varepsilon/2\ \wedge|a_{n'm'}-a|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n,m\in N,\ n,m,n'm'\geq N \Rightarrow$
\# $|a_{nm}-a|<\varepsilon/2\ \wedge|a_{n'm'}-a|=|a-a_{n'm'}|=<\varepsilon/2 \Rightarrow \varepsilon/2+\varepsilon/2>|a_{nm}-a|+|a-a_{n'm'}|\geq$
\# $|a_{nm}-a+a-a_{n'm'}|=|a_{nm}-a_{n'm'}|$

Bsp:
● $a_n\in R$, $(a_n)_{n\in N}$ ist konvergent $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.2}$ a_{nm}: $a_n-a_m \underbrace{\to}_{n,m\to\infty} 0$

●● $a_{nm}:=\frac{m}{n+m}=\frac{1}{1+\frac{n}{m}}$

Teilfolgen: $n=m \Rightarrow a_{nm}=\frac{1}{2}$,

$n=m^2 \Rightarrow a_{nm}=\frac{1}{1+m} \underbrace{\to}_{m\to\infty} 0$,

festes $n\in N \Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}=1$

festes $m\in N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})=1\neq0=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$

●●● $a_{nm} := \frac{1}{2(n-m)+1}$

∀ n,m∈N: $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{nm}) = 0 = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{nm})$ aber es existieren Teilfolgen

n=m: $a_{nm}=1$, n=m+1: $a_{nm}=\frac{1}{3}$

●●●● $a_{nm} := \frac{(-1)^n}{m}$,n,m∈N , Doppellimes $\lim_{n,m\to\infty} a_{nm}=0$

S2.5.2(1552) Iterierter Limes

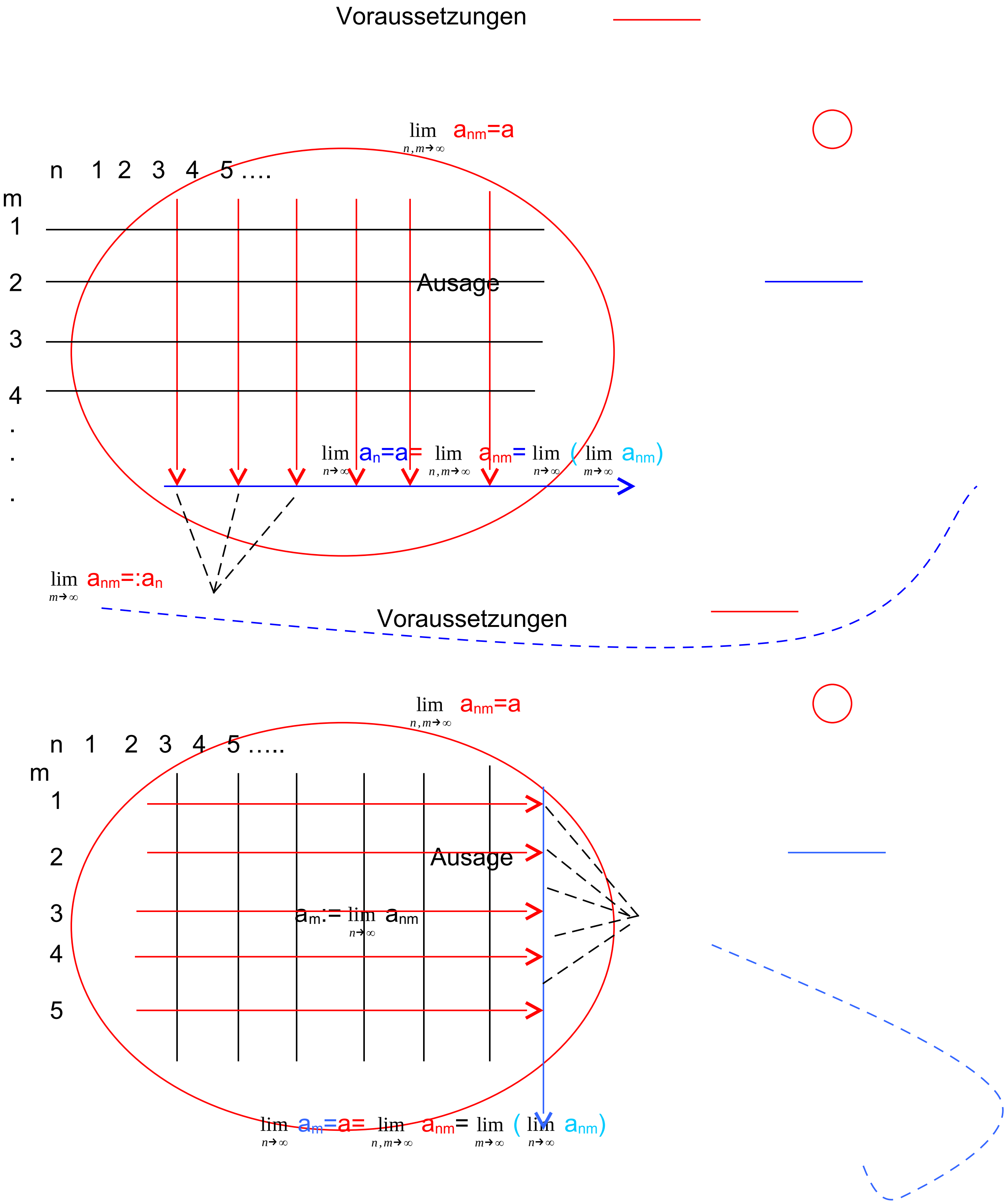
Vor: (a_{nm}) konvergent, $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a$,

- $\forall n\in N\ \exists\ a_n := \lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$
- • $\forall m\in N\ \exists\ a_m := \lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$

Aussage: • $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$: $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}\right)$

• • $\exists \lim\limits_{m\to\infty} a_m$: $a=\lim\limits_{m\to\infty} a_m$ bzw $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}\right)$

Skizze zur Gedächtnisstütze



Bew: $\varepsilon>0$: $\exists$ N$\in$N: $|a_{nm}-a|<\varepsilon$ $\forall$ n,m$\geq$N $\Rightarrow$
$\forall$ festes n$\geq$N: $|a_n-a|=|\lim_{m\to\infty} a_{nm}-a| \underbrace{\leq}_{*} \varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{**} \lim_{n\to\infty} a_n=a$

#* Warum hier $\leq$ und nicht < ? Beispiel:
$a_{nm}:=1-\frac{m}{(m+1)n} \underbrace{\to}_{n,m\to\infty} 1=a$, $\varepsilon=\frac{1}{3}$, N=3, $-\varepsilon=-\frac{1}{3}<(a_{nm}-a)<\frac{1}{3}=\varepsilon$ $\forall$ n,m$\geq$N=3,
n,m=3, $-\varepsilon=-\frac{1}{3}<(a_{33}-a)<\frac{1}{3}=\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon=-\frac{1}{3}<(1-\frac{3}{(3+1)3}-1)<\frac{1}{3}=\varepsilon \Rightarrow$
$-\varepsilon=-\underbrace{<}_{!}\frac{1}{3}\ (1-\frac{1}{4}-1)\ <\frac{1}{3}=\varepsilon$
n, m>3 $\Rightarrow$ $|1-\underbrace{\lim_{m\to\infty} a_{3m}}_{=1-\frac{1}{3}}-1|<\frac{1}{3}=\varepsilon$
$\lim_{m\to\infty} a_{nm}=\lim_{m\to\infty}(1-\frac{m}{(m+1)n}) \underbrace{=}_{n=3,m\to\infty} 1-\frac{1}{3}$, $-\varepsilon=-\underbrace{\leq}_{!}\frac{1}{3}\ (\underbrace{\lim_{m\to\infty} a_{3m}}_{=1-\frac{1}{3}}-1)\leq\frac{1}{3}=\varepsilon$ $\forall$ m,n$\geq$3 $\Rightarrow$
$|\underbrace{\lim_{m\to\infty} a_{3m}}_{a_{n=3}}-a| \underbrace{=}_{!!!} \varepsilon$

# n	m 1	2	3	4	
#					
# 1	$1-\frac{1}{(1+1)1}$	$1-\frac{2}{(2+1)1}$	$1-\frac{3}{(3+1)1}$	$1-\frac{4}{(4+1)1}$	$\lim_{m\to\infty}(1-\frac{m}{(1+m)1})=1-1=0$
# 2	$1-\frac{1}{(1+1)2}$	$1-\frac{2}{(2+1)2}$	$1-\frac{3}{(3+1)2}$	$1-\frac{4}{(4+1)2}$	$\lim_{m\to\infty}(1-\frac{m}{(1+m)2})=1-\frac{1}{2}$
# 3	$1-\frac{1}{(1+1)3}$	$1-\frac{2}{(2+1)3}$	$1-\frac{3}{(3+1)3}$	$1-\frac{4}{(4+1)3}$	$\lim_{m\to\infty}(1-\frac{m}{(1+m)3})=1-\frac{1}{3}$
# 4	$1-\frac{1}{(1+1)4}$	$1-\frac{2}{(2+1)4}$	$1-\frac{3}{(3+1)4}$	$1-\frac{4}{(4+1)4}$	$\lim_{m\to\infty}(1-\frac{m}{(1+m)4})=1\underbrace{-\frac{1}{4}}_{-\frac{1}{3}}$

usw
Resumme: Wenn es ein Doppelfolge gibt mit $\lim_{m\to\infty}|a_{nm}-a|<\varepsilon$, so ist nicht
auszuschließen, dass es Teilfolgen
$(a_{cm})_{n,m=1}^{\infty}$ oder $(a_{nc})_{n,m=1}^{\infty}$, c$\geq$N fest, von $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ gibt wie folgt
$\exists$ m:$|\lim_{m\to\infty} a_{cm}-a|=\varepsilon$ bzw $\exists$ n: $\lim_{n\to\infty} a_{nc}-a|=\varepsilon$, denn es ist möglich, dass $\lim_{n\to\infty}$
erst für ein gewisses N>c mit (m>N <u>und</u> n>N) gilt $|a_{nm}-a|<\varepsilon$.
#** • $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ N=N(ε): $\forall$ n$\geq$N gilt $|a_n-a|\leq\varepsilon$?
Sei $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{*}$ $\forall$ $\varepsilon'>0$ $\exists$ N'=N'(ε'): $\forall$ n$\geq$N' gilt $|a_n-a|\leq\varepsilon'<\varepsilon$

Bsp:$(a_{k,l})_{k,l=1}^{\infty}=\frac{k+l^2}{kl^2}$
//**S2.1.3** 3.)$a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle n$\in$N und a=b $\Rightarrow$ $c_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$, $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$, $b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} b=a$

$0\leq a_{k,l}=\frac{k+l^2}{kl^2}=\frac{1}{l^2}+\frac{1}{k} \underbrace{\to}_{k,l\to\infty} 0 \underset{S2.1.3}{\Rightarrow} \lim_{k,l\to\infty}\frac{k+l^2}{kl^2}=0$

Für festes k$\in$N gilt $\frac{k+l^2}{kl^2}=\frac{1}{l^2}+\frac{1}{k} \underbrace{\to}_{l\to\infty} \frac{1}{k}$ $\qquad \frac{1}{l^2}+\frac{1}{k} \underbrace{\to}_{k\to\infty} \frac{1}{l^2}$

Iterierte Grenzwerte

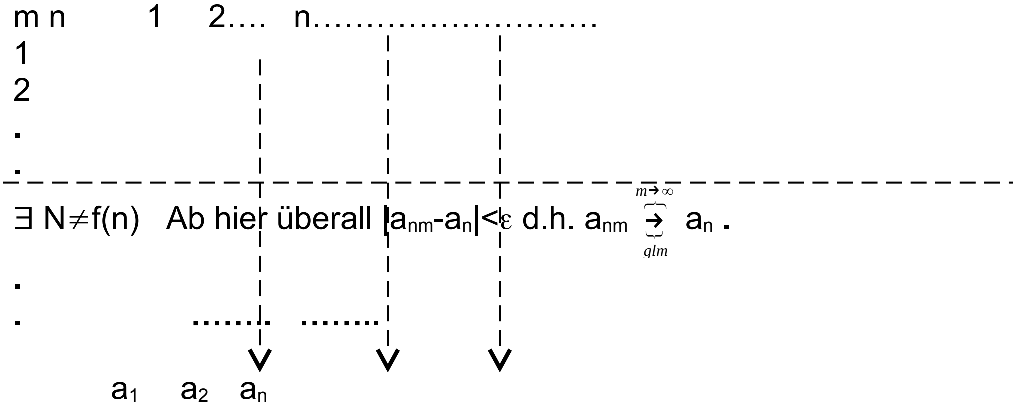
$$\lim_{l\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k+l^2}{kl^2}\right)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l^2}=0=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty}\frac{k+l^2}{kl^2}\right)=\lim_{k,\ll\to\infty}\frac{k+l^2}{kl^2}$$

D2.5.3(1554) Gleichmäßige Konvergenz in n von $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon),\ N\neq f(n)$: $|a_{nm}-a_n|<\varepsilon\ \forall\ m\in N,\ m\geq N$

Andere Schreibweisen:

$a_n=\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}\ \forall\ n$ oder $a_{nm} \underset{glm}{\overset{m\to\infty}{\rightarrow}} a_n$



S2.5.3(1555)

● und ● ● wie in S2.5.2, neu

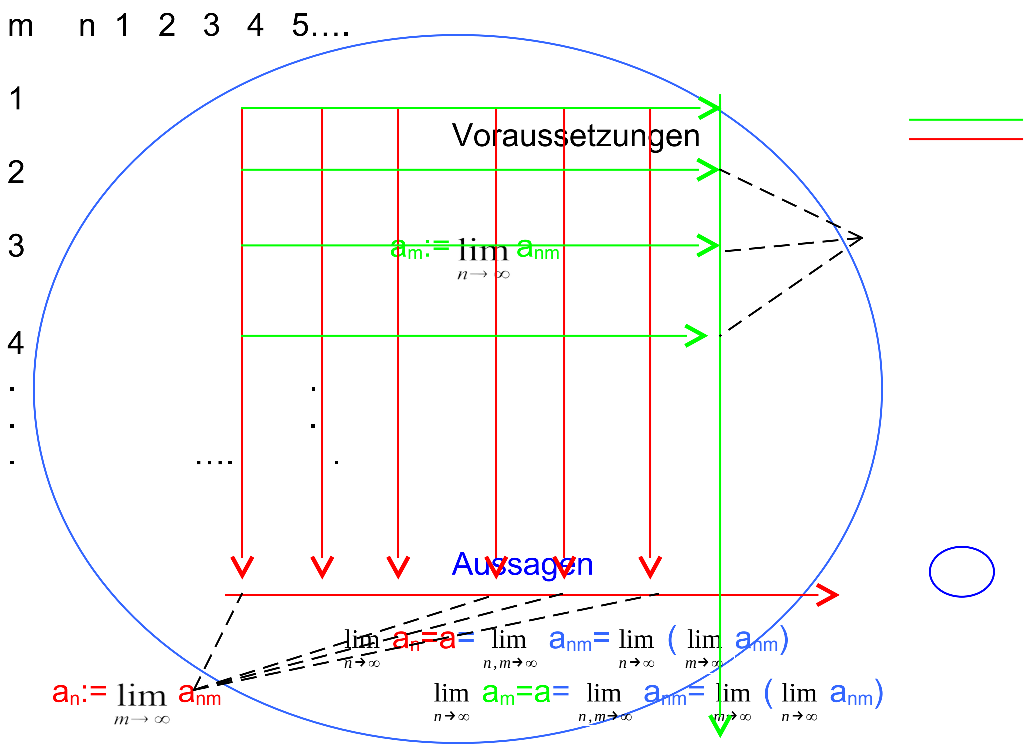
Vor: $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$, $a_{nm}\in R$, $\exists\ a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ● $\exists\ a_n=\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}\ \forall\ n\in N$

● ● $\exists\ a_m=\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}\ \forall\ m\in N$

Aussage: ● $\exists \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$

● ● $\exists \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$

(● und ● ● ...$\exists \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$)



Bew:● $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in N$: $|a_{nm}-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ für $n,m\in N\ m\geq N$, $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ für $n\in N\ n\geq N \Rightarrow$

$|a_{nm}-a|\leq|a_{nm}-a_n|+|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$

● und ●● **S2.5.2** $\Rightarrow \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$

Bsp: n,m∈N

- $a_{nm}:=\frac{m}{n(n+m)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\underset{glm}{\overset{m\to\infty}{\rightrightarrows}}\frac{1}{n}=a_n$, da $|a_{nm}-\frac{1}{n}|=\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n}\le\varepsilon$ für $m\ge N\underset{gewählt}{=}\frac{1}{\varepsilon}$, $\forall\ \varepsilon>0$

•• $\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}:=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{n+m}=1=a_n$, aber $a_{nm}=\frac{1}{2}$ für n=m ⇒ $|a_{nm}-a_n|=|\frac{1}{2}-1|=\frac{1}{2}$ ⇒
$\forall\ \varepsilon>0$ existiert kein N∈N mit $|a_{nm}-a_n|<\varepsilon\ \forall\ m\ge N$

••• $a_{nm}:=\frac{(-1)^n}{m}$, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\frac{(-1)^n}{m}=0$, für festes n ist $a_{nm}\underset{glm}{\overset{m\to\infty}{\rightrightarrows}}0$

$\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=0=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$
obwohl (-1)n keinen Grenzwert hat, daher Auflösung in umgekehrter Richtung nicht möglich

A2.5.1 Konvergenz?, Existenz Doppellımes?
Existenz Iτerierter Grenzwert?

a)$a_{kl}=\lim\limits_{l\to\infty}$ Lös: $\lim\limits_{l\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty} a_{kl})=\lim\limits_{l\to\infty}(0)=0=\lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{l\to\infty} a_{kl})$

b) $a_{kl}=\frac{k+l}{2(k^2+l^2)+3}$

Lös:• für k=l, $a_{kl}=\frac{2l}{3}\underset{kl\to\infty}{\to}\infty$

k=2l, $a_{kl}=\frac{l}{2l^2+1}\underset{kl\to\infty}{\to}0$

⇒ Doppellimes existiert nicht

- k fest , l→∞, $a_{kl}=\dfrac{\frac{k}{l^2}+\frac{1}{l}}{\frac{2k^2}{l^2}-2+\frac{3}{l^2}}\underset{l\to\infty}{\to}0$

l fest, k→∞, $a_{kl}=\dfrac{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}{2-\frac{2l^2}{k^2}+3\frac{1}{k^2}}\underset{k\to\infty}{\to}0$

⇒ $\lim\limits_{l\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty} a_{kl})=\lim\limits_{l\to\infty}0=0,\ \lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{l\to\infty} a_{kl})=\lim\limits_{k\to\infty}0=0$

c) $a_{kl}=\frac{k^2-l^2}{k^2+l^2}$

Lös : Für k=l : $a_{kl}=0$, k=2l : $a_{kl}=\frac{3}{5}$ ⇒ Doppellimes eistiert nicht, denn $0\ne\frac{3}{5}$

k fest : $a_{kl}=\dfrac{\frac{k}{l^2}-1}{\frac{k^2}{l^2}+1}\underset{l\to\infty}{\to}-1$, l fest : $a_{kl}=\dfrac{1-\frac{l^2}{k^2}}{1+\frac{l^2}{k^2}}\underset{k\to\infty}{\to}1$

⇒ $\lim\limits_{l\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty} a_{kl})=\lim\limits_{l\to\infty}1=1\ne-1=\lim\limits_{k\to\infty}(-1)=\lim\limits_{k\to\infty}(\lim\limits_{l\to\infty} a_{kl})$

d) Beweise $\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \frac{1}{k^2+l^2}$ konvergiert für $k\in N$ gegen $-\frac{3}{4k^2}$

Hinweis : Betrachte $\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{k-l}+\frac{1}{k+l}\right)$.

Lös : $2k\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \frac{1}{k^2-l^2} = \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{k-l}{k^2-l^2}+\frac{k+l}{k^2-l^2}\right) = \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{k-l}{k^2-l^2}+\frac{k+l}{k^2-l^2}\right) = \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{k+l}+\frac{1}{k-l}\right)$.

Genügt zu zeigen, dass $\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{k+l}+\frac{1}{k-l}\right) \underbrace{\to}_{n\to\infty} -\frac{3}{4k^2}$:

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{k+l}+\frac{1}{k-l}\right. \underbrace{=}_{\text{oBdA } n\geq 2k,\, r:=k+l} \sum_{\substack{r=k+1\\n\neq 2k}}^{n+k} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{r} = \sum_{\substack{r=k+1\\n\neq 2k}}^{n+k} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{r}$$

$$\underbrace{=}_{n-k\geq k-1,\, n\geq 2k-1,\, n-k\geq 2k \Leftrightarrow n\geq 2k} \sum_{r=k+1}^{n+k} \frac{1}{r} + \frac{1}{2k} - \sum_{r=k}^{n-k} \frac{1}{r} = -\frac{1}{2k} - \frac{1}{k} + \sum_{r=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{r}$$

$$0\leq \sum_{r=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{r} \leq \frac{2k}{n-k+1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{k+l}+\frac{1}{k-l}\right) \underbrace{\to}_{n\to\infty} -\frac{1}{2k} - \frac{1}{k} = -\frac{3}{2k}$$

Nebenrechnung : $\sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \frac{1}{k-l} = \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \ldots \frac{1}{k-(k-1)} + \frac{1}{k-(k+1)} + \ldots \frac{1}{k-n} =$

$\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{r}$

e) Beweise: Sei $a_{kl} = \frac{1}{k^2-l^2}$ für $k\neq l$, $a_{kk}=0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) = -\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}\right) \neq 0$$

Lös : Für $l=0$, $k\neq 0$ ist $a_{kl} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} = \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{l=1\\l\neq k}}^{n} \frac{1}{k^2-l^2} \underbrace{=}_{a)} \frac{1}{4k^2}$

Für $k=0$, $l\neq 0$ ist $a_{kl} = -\frac{1}{l^2} \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$, $\sum_{l=1}^{\infty} -\frac{1}{l^2}$, konvergent nach Majorantenkriterium $\Rightarrow$

$$0<\left|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}\right| = \left|-\frac{3}{4}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} \underbrace{=}_{a_{lk}=-a_{kl}} -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}$$

f) Beweise mit Hilfe des Cauchyprodukts: sin(x+x')=sinxcosx'+cosxsinx' $\forall$ x,x'$\in$R.

Lös : sinxcosx'=$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\right)\underbrace{\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{a_k}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\right)\underbrace{\frac{(-1)^k (x')^{2k}}{(2k)!}}_{b_k}=\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{(-1)^k (x')^{2k}}{(2k)!}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{(x')^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}$

cosxsinx'=$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}_{b_k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k (x')^{2k+2}}{(2k+1)!}}_{a_k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty} d_n$,

$d_n=\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}=(-1)^k\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(x')^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!}$