D3.2.2(1750)

1.) Sei $(z_\nu) \subset \mathbb{C}$, dann heißt $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ eine Umordnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$: $\Leftrightarrow$

$\exists$ eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $w_\nu = z_{\varphi(\nu)}$ $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Andere Formulierung:

Für jede bijektive Abbildung $\Phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\Phi(k)}$ eine Umordnung der

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

2.) Eine Reihe heißt unbedingt konvergent, falls jede ihrer Umordnungen gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.
Ist eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent, so heißt sie bedingt konvergent.

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist bedingt konvergent, #da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2k}$ =?

Andere Formulierung 1.) für reelle Zahlen:

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(a'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 2 Folgen reeller Zahlen. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ eine

Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn $a'_\ell = a_{k_\ell}$ $\forall$ $\ell \in \mathbb{N}$,

$\underbrace{k}_{eineFunktion}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k(\ell) = k_\ell$ bijektiv, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \underset{UmordnungderGlieder}{\rightrightarrows} \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$

S3.2.5(1750) Absolut konvergente Reihen sind auch unbedingt konvergent

Vor: Sei $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| \underset{\nu\to\infty}{\rightrightarrows} S < \infty$.

Aussage: Für jede Umordnung $\sum_{\varphi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)}$ von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ gilt $\sum_{\varphi(\nu)=0}^{\infty} |z_{\phi(\nu)}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| = \overline{S} < \infty$

und $S = \sum_{\varphi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.//*

//Beh: 1.) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent//

// $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.//

*//**S3.1.2** (1602) Vor: $(z_\nu) \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//*

//5.) Für den Reihenrest $R_m := \sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu = (\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu \to S} - \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m}) \overset{m\to\infty}{\to} 0$, $m \in \mathbb{N}_0$, gilt $\lim_{m\to\infty}$ //

// $R_m = 0$

//Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen.
// (S3.1.2 5.)) //

// Sei $(z_n)\subset \mathbf{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert $\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ mit //

// $|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$. (d.h. $|S_n-S_m)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$.//

Bew: $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergent $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2}$ $S_m:=\sum_{k=0}^{m} z_k$; $S'_m:=\sum_{\phi(k)=0}^{m} z_{\phi(k)}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2}$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ K(\varepsilon):|z_{K+1}|+\ldots+|z_{K+p}|<\varepsilon\ \ \forall\ p\in\mathbf{N}\ \Rightarrow$

Zu $K(\varepsilon)\ \exists\ n_1(\varepsilon):M(\varepsilon)=\{0,1,2,\ldots K(\varepsilon)\}\subset\{\phi(0),\phi(1)\ldots\ \phi(n_1(\varepsilon))\}\ \underbrace{\Rightarrow}_{trivial}\ n_1\geq K(\varepsilon)$

\# Induktion
\# ϕ bijektiv $\Rightarrow\ \forall\ n\in N\ \exists$ genau ein $n'\in\mathbf{N}$: $n=\phi(n')$
\# $M(\varepsilon)=\{0=K(\varepsilon)\}$: $\underbrace{\Rightarrow}_{\Phi\ bijektiv}\exists\ n_0$: $\phi(n_0)=K(\varepsilon)=0$
\# 1.Fall $n_0=0=K(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \{\phi(0)\}=\{0\}$,
\# 2.Fall $n_0\neq 0\ \Rightarrow\ \{0\}\in\{\phi(0),\phi(1)\ldots\ \phi(n_0)\}\ \Rightarrow$
\# $\{0\}\subset\{\phi(0),\phi(1)\ldots\ \phi(n_0)\}\wedge\ n_0>0$
\#I.H. $M(\varepsilon)=\{0,1,2,\ldots,K(\varepsilon)\}:\{0,1,2,\ldots K(\varepsilon)\}\subset\{\phi(0),\phi(1)\ldots\ \phi(n_k)\}$
$\wedge\ n_k\geq K(\varepsilon)$
\# $M(\varepsilon)=\{0,1,2,\ldots,K(\varepsilon)+1\}$: $\underbrace{\Rightarrow}_{\Phi\ bijektiv}\exists$: $\{\phi(n_\mu)\}=\{K(\varepsilon)+1\}$
\# 1.Fall $0\leq n_\mu\leq n_k\Rightarrow$
\#$\{0,1,2,\ldots K(\varepsilon)\}\cup\{K(\varepsilon)+1\}\subset\{\phi(0),\phi(1)\ldots\phi(n_k)\}\cup\{\phi(n_\mu)\}=\{\phi(0),\phi(1)\ldots\phi(n_k)\}$
\# $\Rightarrow\ \{0,1,2,\ldots,K(\varepsilon)+1\}\underbrace{\subseteq}_{n_{k+1}>n_k+1\geq K(\varepsilon)+1}\{\phi(0),\phi(1)\ldots\phi(n_{k+1})\}$
\# 2.Fall $n_\mu>n_k\Rightarrow$
\#$\{0,1,2,\ldots K(\varepsilon)\}\cup\{K(\varepsilon)+1\}\subset\{\phi(0),\phi(1)\ldots\phi(n_k)\}\cup\{\phi(n_\mu)\}=$
\# $\{\phi(0),\phi(1)\ldots\phi(n_k)\ldots\ \phi(n_\mu)\}$
\# $\Rightarrow\ \{0,1,2,\ldots,K(\varepsilon)+1\}\underbrace{\subseteq}_{n_\mu=n_{k+1}>n_k}\{\phi(0),\phi(1)\ldots\phi(n_{k+1})\}\wedge\ n_{k+1}>n_k\geq K(\varepsilon)\ \Rightarrow$
\# $n_{k+1}\geq K(\varepsilon)+1$

Sei $S_m:=z_0+z_1+\ldots+z_m$, $S'_m:=z_{\phi(0)}+z_{\phi(1)}+\ldots+z_{\phi(m)}$ und $m>n_1\ \Rightarrow$
$z_0,z_1,\ldots,z_K\in S_m$ <u>und</u> $z_0,z_1,\ldots,z_K\in S'_m\ \Rightarrow\ z_0,z_1,\ldots,z_K\notin S_m-S'_m$
(da alle $z_{0\ldots K}$ in S_m und S'_m vorkommen)
$S_m-S'_m$ hat die Form $\delta_{K+1}z_{K+1}+\delta_{K+2}z_{K+2}+\ldots+\delta_{K+p}z_{K+p}$, $\delta_j\in\{-1,0,1\}\ \Rightarrow$
$|S_m-S'_m|\underbrace{\leq}_{wegen\ ||}|z_{K+1}|+\ldots+|z_{K+p}|<\varepsilon\ \Rightarrow\ (S_m-S'_m)\underbrace{\rightarrow}_{m\to\infty}0\underbrace{\Rightarrow}_{S_m\to S}\ S'_m=(S'_m-S_m)+S_m\to S\ \Rightarrow$

$\sum_{\phi(k)=0}^{\infty} z_{\phi(k)}=\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu=S$.

Bem: 1.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|<\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} |Re a_\nu|<\infty$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |Im a_\nu|<\infty$

2.) $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|=\infty$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent,

$a_\nu^+=\frac{1}{2}(|a_\nu|+a_\nu)$, $a_\nu^-=\frac{1}{2}(|a_\nu|-a_\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow$

$a_\nu=a_\nu^+-a_\nu^-$ & $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^-=\infty$

$\forall$ $S\in\mathbb{R}_+\cup\pm\infty$ $\exists$ Umordnung $b_\nu=a_{\phi(\nu)}$, $\nu\in\mathbb{N}_0$:

$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu=S$ (bzw $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu=S_2\geq S_1=\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu$)

Bew andere Formulierung:

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und sei a der Wert der Reihe.

Sei weiter $\Phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijektiv. Zu $\varepsilon>0$ gibt es dann ein $N\in\mathbb{R}_+$

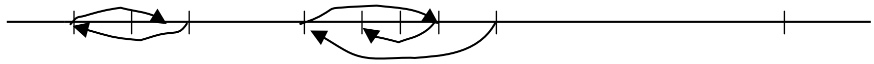
so, dass $\forall$ $n\geq N$ gilt $|a-\sum_{k=1}^{n} a_k| \underset{S3.2.2}{\leq} \varepsilon$. Dann ist also für diese n:

$|a-\sum_{k=1}^{n} a_{\Phi(k)}| \leq |a-\sum_{k=1}^{n} a_k|+|\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} a_{\Phi(k)}|<\varepsilon+\sum_{j\in J_n} |a_j|$, wobei J_n die Menge der Indizes j bezeichnet, welche entweder in $\{1,2,...n\}$ oder in $\{\Phi(1), \Phi(2), ... \Phi(n)\}$ (aber nicht in beiden gleichzeitig) enthalten sind. Falls diese Menge nicht zufällig leer ist, hat sie ein Minimum m(n), S1.5.5, und in diesem Fall ist $\sum_{j\in J_n} |a_j| \leq \sum_{k=m(n)}^{\infty} |a_k|$. Falls J_n leer sein sollte, setzen wir der Einfachheit halber m(n)=n und sehen, dass dieselbe Abschätzung trivialerweise gilt, weil die linke Summe dann leer ist, also den Wert 0 hat. Aus der Injektivität von Φ folgt, daß $m(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ gilt. Daher können wir immer ein $N_1\in\mathbb{R}_+$ finden, so dass aus $n\geq N_1$ folgt $\sum_{j\in J_n} |a_j| \leq \sum_{k=m(n)}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$. Daher ist $|a-\sum_{k=1}^{n} a_{\Phi(k)}|<2\varepsilon$ $\forall$ $n\geq\max\{N,N_1\}$ und deshalb gilt die Beh.

S3.2.6(1753) Riemannscher Umordnungssatz

Sei eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ gegeben, welche konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Sei weiter $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\Phi(k)}$, welche konvergiert bzw bestimmt divergiert und den Wert a hat.

Bew:Wir beschränken uns auf den Fall $a \in \mathbb{R}$, die Fälle $a=\pm\infty$ werden ähnlich behandelt- siehe dazu auch die untenstehenden Übungen.



a m 2m oder m+1

Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergiert, müssen unendlich viele der Glieder positiv bzw negativ sein.

\# Annahme: $\exists$ nur endlich viele positive $a_k \Rightarrow$

\# $S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\sum_{a_k>0} a_k+\sum_{a_k<0} a_k=S_+ + S_- \Rightarrow S_{abs}=\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|=S_+ - S_- \Rightarrow$

\# $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow$ Widerspreuch zur Vorraussetzung

Daher können wir die Folge (a_k) in 2 Teilfolgen $(a_{f(k)})$ bzw $(a_{g(k)})$ zerlegen, sodass $(a_{f(k)}) \geq 0$ bzw $(a_{g(k)})<0 \ \forall\ k \geq 1$ ist. Der Einfachheit halber schreiben wir $b_k=a_{f(k)}$, $c_k=-a_{g(k)}\ \forall\ k\geq 1$. Wir sehen dann, dass zu jedem $n\in\mathbb{N}$ natürliche Zahlen $m_n^{\pm} \leq n$ existieren, für welche

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{m_n^+} b_k-\sum_{k=1}^{m_n^-} c_k$ gilt.Daraus folgt wegen der Konvergenz der Partialsummenfolge (S_n): Wäre eine der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ bzw $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, so müsste auch die 2. konvergieren und dann wäre $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sogar absolut konvergent, was ausgeschlossen ist.

Daher folgt (*) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k=\sum_{k=1}^{\infty} c_k=\infty$. Wir definieren nun eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auf folgende Weise: Wir bestimmen das minimale k_1^+ derart, dass $\sum_{k=1}^{k_1^+} b_k>a$. Danach bestimmen wir das minimale k_1^- so, dass $\sum_{k=1}^{k_1^+} b_k-\sum_{k=1}^{k_1^-} c_k<a$. Anschließend suchen wir das minimale $k_2^+>k_1$, für welches $\sum_{k=1}^{k_1^+} b_k-\sum_{k=1}^{k_1^-} c_k+\sum_{k=k_1+1}^{k_2^+} b_k>a$, usw.

Wegen (*) ist es tatsächlich möglich, die $k_j^{\pm}$ wie angegeben zu bestimmen. Die Zahlen $b_1,\ldots b_{k_1^+},-c_1,\ldots,c_{k_1^-},b_{k_1^+ +1},\ldots,b_{k_2^+},\ldots$ sind aber nichts anderes als die Zahlen a_k in anderer Reihenfolge. Deshalb entsteht bei dieser Konstruktion eine Umordnung der Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Da wir die Zahlen $k_j^{\pm}$ jeweils minimal bestimmen, unterscheiden sich die Partialsummen dieser Umordnung von dem Wert a um weniger als ein entsprechendes Glied der Folge (a_k). Da dies die Glieder einer konvergenten Reihe sind, müssen sie gegen 0 konvergieren und daraus folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe gegen den Wert a.

Andere Formulierung

Vor: $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ nicht konvergent

Aussage: $\exists$ Umordnung $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$: von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: $S=\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ für S beliebige Zahl,

d.h. die Reihensumme ändert sich beim Umordnen, ist also nicht unbedingt konvergent.

Bew:

Sei o.B.d.A. $a_k \neq 0 \ \forall\ a_k$ und

$$a_k^+ := \frac{|a_k| + a_k}{2} = \begin{cases} a_k, \text{falls } a_k > 0 \\ 0, \text{falls } a_k < 0 \end{cases},$$

$$a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2} = \begin{cases} 0, \text{falls } a_k > 0 \\ -a_k, \text{falls } a_k < 0 \end{cases},$$

$\Rightarrow$ Alle a_k^+ und a_k^- sind ≥ 0 und $a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ $\forall$ k.

Annahme $\sum a_k^+$ oder $\sum a_k^-$ konvergent

$$\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}}}_{a_k^+ = a_k + a_k^-,\ a_k^- = a_k^+ - a_k} \sum a_k^+ \text{ und } \sum a_k^- \text{ konvergent } \underbrace{\Rightarrow}_{|a_k| = a_k^+ + a_k^-} \sum |a_k| \text{ konvergent} \Rightarrow$$

Widerspruch $\Rightarrow$ $\sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ divergent

Streichen wir aus der Folge (a_k^+) alle Nullen, so erhalten wir gerade die Teilfolge (p_k) aller positiven Glieder von (a_k)

Streichen wir aus der Folge (a_k^-) alle Nullen, so erhalten wir gerade die Folge $(q_k) \Rightarrow (-q_k)$ ist Teilfolge aller negativen Glieder von (a_k).

Da vorraussetzungsgemäß alle $a_k \neq 0$, tritt jedes Glied von (a_k) in einer und nur in einer der Teilfolgen (p_k) und $(-q_k)$ auf.

$\sum p_k$, $\sum q_k$ divergent: $\sum_{k=0}^{n} p_k \overset{n\to\infty}{\rightarrow} +\infty$, $\sum_{k=0}^{n} q_k \overset{n\to\infty}{\rightarrow} +\infty$, $\sum_{k=0}^{n} (-q_k) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} -\infty \Rightarrow$

$\exists$ kleinste Indices n_0, n_1, n_2:

$\sum_{k=0}^{n_0} p_k > S$, d.h. mit p_{n_0} wird S erstmals um max p_{n_0} überschritten

$\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) < S$, d.h mit p_{n_1} wir S erstmals um max p_{n_1} unterschritten

$\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} (p_k) > S$ p_{n_2} wir S erstmals um max p_{n_2} überschritten..$\Rightarrow$

$p_0 + \ldots + p_{n_0} + (-q_0) + \ldots + (-q_{n_1}) + (p_{n_0+1}) + \ldots + p_{n_2} + \ldots$ ist Umordnung der Ausgangsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Mit Hilfe der Minimaleigenschaft der Indices $n_1, n_2, \ldots$ sieht man, dass man den Unterschied zwischen S und den Teilsummen spätestens ab der Teilsumme $p_0 + \ldots + p_{n_0} + (-q_0) + \ldots + (-q_{n_1})$ betragsmäßig durch die Zahlen $q_{n_1}, p_{n_2}, q_{n_3}, p_{n_4}, \ldots$ nach oben abschätzen kann.

$(q_{n_1}, q_{n_3}, \ldots)$ und $(p_{n_2}, p_{n_4}, \ldots) \to 0 \Rightarrow$

Umordnung $p_0 + \ldots + p_{n_0} + (-q_0) + \ldots + (-q_{n_1}) + (p_{n_0+1}) + \ldots + p_{n_2} + \ldots$ von $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergiert gegen S

Die Sätze 3.2.5 und 3.2.6 sagen gemeinsam aus:

S3.2.5&6 (1756)
Absolut konvergente Reihen - und nur diese - sind auch unbedingt konvergent
Bem:

1.) Ist eine Doppelsumme $\sum_{\ell,k=1}^{\infty} a_{k_\ell}$ absolut konvergent, dann darf die Summationsreihenfolge vertauscht werden.

2.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|<\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathrm{Re}\ z_\nu|<\infty$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathrm{Im}\ z_\nu|<\infty$

3.) Sei $(a_\nu)\subset\mathbb{R}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|=\infty$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent.

Sei $a_\nu^+ := \frac{1}{2}(|a_\nu|+a_\nu) \wedge a_\nu^- := \frac{1}{2}(|a_\nu|-a_\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow$

$a_\nu = a_\nu^+ - a_\nu^-$, $|a_\nu| = a_\nu^+ + a_\nu^- \wedge \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+ = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^- = \infty$.

$\forall$ $S\in\mathbb{R}$ oder $S=\pm\infty$ $\exists$ eine Umordnung $b_\nu=a_{\varphi(\nu)}$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, mit

$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu=S$ (bzw $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu=S_2\geq S_1=\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$)

Bsp:1.) $S=1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+1/7-1/8+1/9-+\ldots$ nicht absolut konv

$\underline{+S/2=0+1/2+0\ \ -1/4+0\ \ +1/6+0\ \ -1/8+0\ \ +1/10\ldots}$

$3S/2=1\ \ +1/3-1/2+1/5\ \ +1/7-1/4+1/9\ldots$ Umordnung

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{(-1)^k-1}{2(k+1)}\right)$$

*//**S2.3.20** (1452) 6.) (.) $1-1/x\leq\log x\leq x-1$ $\forall$ $x>0$.//*

2.) $(1+1/k)^k<e<(1+1/k)^{k+1} \Rightarrow$

$$k\left(\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)<1<(k+1)\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{k+1}{k}\right)<\frac{1}{k}<\left(1+\frac{1}{k}\right)\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\Rightarrow$$

$$(*)\quad 0<\frac{1}{k}-\log\left(\frac{k+1}{k}\right)<\frac{1}{k}\log\left(\frac{k+1}{k}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 6.)} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)>1-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1} \Rightarrow$$

$$0<a_k:1/k-\log\left(\frac{k+1}{k}\right)<1/k-\frac{1}{k+1}\quad\forall\ k\in\mathbb{N} \Rightarrow$$

siehe Seite 1756

$$\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|=\sum_{k=1}^{n-1}\Big|\underbrace{\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}}_{(*):>0}\Big|<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1/k-\frac{1}{k+1}\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\left(1/k-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

$=1$

bei 1 beschränkt $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}|a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ konvergent $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \exists\ \gamma:=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}\right)}_{mon\ wachsend}\underbrace{=}_{S3.2.5}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\log\frac{2}{1}+\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}+\ldots\frac{1}{n-1}-\log\frac{n}{n-1}\right)=$$

$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+..-\log\frac{2*3*...*(n-1)*n}{1*2*3*(n-1)} \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\log n}_{mon\ wachsend} \right) \le 1 \right. \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k-\log n \right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \gamma=0{,}577...$ Eulersche Konstante

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k \Rightarrow \gamma+\log n$

3.) //***S3.1.4*** *(1605) Vor:* $(a_n) \subset R, a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$ *Beh:* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konvergent//*

$\underset{S3.1.4}{\Rightarrow} \quad s := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \log 2$ konvergent

Bew: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-..+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} =$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.. \quad \frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$

$-2*1 \qquad -2*\frac{1}{4},.. \qquad -2*\frac{1}{2n} =$

$\sum_{k=1}^{2n} 1/k-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} 1/k-\sum_{k=1}^{n} 1/k = \log 2n-\log n+\varepsilon_n =$

$\log 2+\varepsilon_n$ mit $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} 0$

A3.2.12 Absolute und bedingte Konvergenz?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

//***S3.1.4*** *(1605) Vor:* $(a_n) \subset R, a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$*. Beh:* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *ist konvergent//*

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \underset{S3.1.4}{\Rightarrow}$ Reihe konvergiert

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ konvergent? $\frac{1}{2k-1} \ge \frac{1}{2k} \quad \forall\ k\in N \underset{harmonische\ Reihe}{\Rightarrow}$

Reihe nicht absolut konvergent ⇒ Reihe bedingt konvergent

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ absolut konvergent, denn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$

//**S3.1.4**(1605) *Vor:* $(a_n)\subset \mathbb{R}, a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$. *Beh:* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ *ist konvergent*//

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$ absolut konvergent? $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}$ konvergent?

$$|(-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}| = \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5} \geq \frac{1}{10k} \underbrace{\Rightarrow}_{Vergleich\ mit\ harm\ R} \text{Reihe nicht abs konv}$$

$|(-1)^k \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}| = |\frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}|$

● k=1: $|\frac{1-4}{2+1-5}| = |\frac{1-4}{2+1-5}| = |\frac{-3}{-2}| = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3} = |\frac{1}{2+1}| = |\frac{k^2}{2k^3+k}|$

● ● k≥1: $|k^2-4k| \leq k^2 \wedge |2k^3+k-5| \geq 2k^3+k$

● ^● ● $|\frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}| \geq \frac{k^2}{2k^3+k} = \frac{k}{2k^2+1} \geq \frac{k}{2k^2} \geq \frac{1}{2k}$

$a_k' = \frac{k^2-4k}{2k^3+k-5} \searrow$ für k≥8 $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.4}$ Reihe konv ⇒ Reihe bedingt konv

$$\frac{\frac{(k+1)^2-4(k+1)}{2(k+1)^3+(k+1)-5}}{\frac{k^2-4k}{2k^3+k-5}} = \frac{(k^2+2k+1-4k-4)(2k^3+k-5)}{(2(k+1)^3+(k+1)-5)(k^2-4k)} = \frac{(k^2-2k-3)(2k^3+k-5)}{(2(k+1)^3+k-4)(k^2-4k)} =$$

$$\frac{2k^5+k^3-5k^2-4k^4-2k^2+10k-6k^3-3k+15}{(2k^3+6k^2+6k+2+k-4)(k^2-4k)} = \frac{2k^5-4k^4-5k^3-7k^2+7k+15}{(2k^3+6k^2+7k-2)(k^2-4k)} =$$

$$\frac{2k^5-4k^4-5k^3-7k^2+7k+15}{2k^5-8k^4+6k^4-24k^3+7k^3-28k^2-2k^2+8k} = \frac{2k^5-4k^4-5k^3-7k^2+7k+15}{2k^5-2k^4-17k^3-30k^2+8k} =$$

$$\frac{2k-4-\frac{5}{k}-\frac{7}{k^2}+\frac{7}{k^3}+\frac{15}{k^4}}{2k-2-\frac{17}{k}-\frac{30}{k^2}+\frac{8}{k^3}} \Rightarrow \exists\ k:\ |\frac{a}{k}+\frac{b}{k^2}+\frac{c}{k^3}+\frac{d}{k^4}| < 4-2=2$$

Test k=8: $\frac{65536-16384-2560-448+56+15}{65536-8192-8704-1920+64} = \frac{46215}{46784} < 1$

Für k>9 wird der Einfluß von $-4k^4$ nur noch größer

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}$

Lösung: $$|(-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}| = \frac{2^k+1}{3^k-4}\ \#\underbrace{=}_{k\geq 3} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{\overbrace{1+\frac{1}{2^k}}^{<5/4}}{\underbrace{1-\frac{4}{3^k}}_{<1,>1/2}}\ \# \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^k \text{für } k\geq 3 \Rightarrow$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}$ absolut konv wegen Vergleich mit geometrischer Reihe

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$

*//**D3.2.2**(1750)//*
//2.)Ist eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent, so //
//heißt sie bedingt konvergent.//
*//**S3.2.5**(1750) Absolut konvergente Reihen – und nur diese - sind auch//*
// unbedingt konvergent//
//Eine absolut konvergente Reihe in K ist auch unbedingt konvergent und/ //jede ihrer Umordnungen hat denselben Wert.//
*//**S3.1.4**(1605) Leibniz Kriterium//*
//Vor: $(a_n)\subset R$, $a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$*.//*
//Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0-a_1+a_2-a_3+-\ldots$ *ist konvergent//*

Lösung: $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \searrow 0 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.4}$ Reihe konvergent. $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{k+1} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Vergleich mit harm Reihe}}$
Reihe nicht absolut konv $\Rightarrow$ Reihe ist bedingt konvergent

A3.2.15 Führe den Bew von S3.2.6 für den Fall a=∞

A3.2.16 Zeige, dass unter den Vor von S3.2.6 auch eine Umordnung existiert, welche weder konvergiert noch bestimmt divergiert.

A3.2.17 Finde eine Umordnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}$, welche uneigentlich gegen ∞ konvergiert.

Lös: $\forall\ n\in N$ gilt $\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+(2\nu-1)} \underbrace{>}_{2\nu-1<2\nu\leq 2\cdot 2^{n-1}} \sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+2\cdot 2^{n-1}} =$

$2^{n-1}\frac{1}{2^{n+1}}=1/4$. Damit gilt

$1-1/2+\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+(2\nu-1)} - \frac{1}{2n+2}\right) > 1/2+\sum_{n=1}^{N} \left(1/4-\frac{1}{2n+2}\right) >$

$1/2+0+1/4-1/6+\sum_{n=3}^{N} (1/4-1/8) =$

$1/2+1/4-1/6+(N-2)\cdot 1/8\to\infty$ für $N\to\infty$

Ausgeschrieben:
1-1/2+(1/3-1/4)+(1/5+1/7-1/6)+
(1/9+1/11+1/13+1/15-1/8)+(1/17+1/19+...+1/31-1/10)+
$\ldots \frac{1}{2^N+1}+\frac{1}{2^N+3}+\ldots+\frac{1}{2^{N+1}-1}-\frac{1}{2N+2} \Rightarrow$

$(n=N,\ \nu=1: \frac{1}{2^N+(2*1-1)} = \frac{1}{2^N+1}$

$\nu=2^{N-1}: \frac{1}{2^N+(2*2^{N-1}-1)} = \frac{1}{2^N+(2^N-1)} = \frac{1}{2^N(1+1)-1} = \frac{1}{2^N*2-1} = \frac{1}{2^{N+1}-1})$

$1-1/2+\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^n+(2\nu-1)} - \frac{1}{2n+2}\right) = \infty$ und diese Reihe ist

eine Umordnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots.$

A3.2.18 Bestimme den Wert der folgenden Reihen

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$

A3.2.19 Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4k}{3k}}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-3k-1}$

c) Für welche $\alpha \in R$ ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k))^{\alpha}}$ konvergent?

A3.2.20 Beweise: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Bew: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{ab\ s\ konv.\ da\ Glieder\ positiv} \underbrace{=}_{\text{andere Klammerung möglich}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$

(Glieder pos) $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

A3.2.21 Zeige mit Hilfe des Cauchykriteriums, dass $\sum_{k=1}^{¥} 1/k = \infty$. Die links stehende Reihe heißt die harmonische Reihe.

//(S1602)Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.//

// Sei $(z_n) \subset C$. $\sum_{v=0}^{¥} z_v$ *konvergiert* $\Leftrightarrow \forall e > 0\ \exists\ n_1(\varepsilon) \in N$ *mit //*

// $|\sum_{v=m+1}^{n} z_v| < \varepsilon\ \ \forall\ n > m \geq n_1(\varepsilon)$. (d.h. $|S_n - S_m)| < \varepsilon\ \ \forall\ n > m \geq n_1(\varepsilon)$)*.//*

A3.2.22 Zeige: Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

A3.2.23 Zeige die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{¥} k^n x^k$ für beliebiges $n \in Z$ und $\forall\ x \in K$ mit $|x| < 1$.

A3.2.24 Zeige mit Hilfe des Cauchyschen Verdichtungssatzes, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=p}^{¥} k^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert aber für α ¿ 1 divergiert.