3.3(1800) **Dual- und Dezimalzahlen**

Im Folgenden sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fest gegeben.

D3.3.1(1800) Die Zahl g heiße im Weiteren die Basis(für die g-adische Zahldarstellung). Die ganzen Zahlen 0,1,...,g-1 heißen die Ziffern der Darstellung.

Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$ heißt die g-adische Reihe, falls die z_k Ziffern sind (also $z_k \in \{0,1,...,g-1\}\ \forall\ k$) und falls $z_k < g-1$ für unendlich viele k gilt.

Offenbar ist jede g-adische Reihe konvergent, denn $\sum_{k=1}^{\infty} (g-1)/g^k$ ist eine konvergente Majorante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g}{g^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{g}\right)^k$$ konv., da geom Reihe.

Im Fall g=10 sprechen wir auch von Dezimalreihen, für g=2 von Dualreihen und für g=16 von Hexadezimalreihen.
#Sinn der Festlegung: $z_k < g-1$ für unendlich viele k siehe S3.3.1#

*//**S1.5.17** (762) (g-Adische Zahlendarstellung)//*
// Sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gibt es für $\forall\ n \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen//
// $p \in \mathbb{N}_0$ und $z_k \in \{0,1,...,g-1\}$ mit $0 \le k \le p$, sodass $n = z_0 + z_1 g + ... z_p g^p$, $z_p \neq 0$.//

Eine beliebige reelle Zahl x läßt sich eindeutig zerlegen als $x = p + \xi$, mit $p = [x] \in \mathbb{Z}$ und $0 \le \xi < 1$. Nach **S1.5.17** besitzt p eine g-adische Zahldarstellung und wir wollen jetzt zeigen, dass ξ sich als g-adische Reihe schreiben lässt:

S3.3.1(1801) g-adische Zahldarstellung reeller Zahlen (siehe auch **A3.3.4**)
Jedes $\xi\in[0,1)$ besitzt eine eindeutige Darstellung als g-adische Reihe, d.h. es gibt eindeutig bestimmte $z_k\in\{0,1,,...,g-1\}$ mit $z_k<g-1$ (siehe Bem 2.) unten) für unendlich viele $k\in\mathbb{N}$, sodass $\xi=\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$.

*//**S1.5.15**(759)//*
//1.) $\forall\ a\in R\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in Z$ mit //
// $[a]\le a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in Z\ |n\le a\}$//

Bew: # $\bullet\ z_k=g-1\ \forall\ k\ge n+1 \Rightarrow z_n<g-1$, $\xi=\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k=\sum_{k=1}^{n} z_k/g^k+\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^k$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(g-1)g^{-k}=(g-1)g^{-n-1}+(g-1)g^{-n-2}+...$$
$$g\sum_{k=n+1}^{\infty}(g-1)g^{-k}=(g-1)g^{-n}+(g-1)g^{-n-1}+...$$
$$(g-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}g^{-k}=(g-1)g^{-n} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty}g^{-k}=g^{-n} \Rightarrow$$
$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}z_kg^{-k}=\sum_{k=1}^{n}z_kg^{-k}+g^{-n}=\sum_{k=1}^{n-1}z_kg^{-k}+\underbrace{(z_n+1)}_{<g}g^{-n}$$

$\bullet\bullet\ z_k\ne g-1\ \forall\ k\ge n+1$. Annahme zu $\xi=\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$, schon gezeigt: $\xi_n=\sum_{k=1}^{n} z_k/g^k \nearrow$ und für $r_n=\xi-\xi_n$ gilt dann

$$0\le r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}z_k/g^k<(g-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}1/g^k=\underbrace{\frac{g}{g^{n+1}}}_{\frac{1}{g^n}}-\frac{1}{g^{n+1}}+\underbrace{\frac{g}{g^{n+2}}}_{\frac{1}{g^{n+1}}}-\frac{1}{g^{n+2}}+-..=1/g^n \Rightarrow g^nr_n<g^n1/g^n=1$$

denn für mindestens ein $k\ge n+1$ ist $z_k<g-1 \Rightarrow$

$$0\le g^nr_n=g^n\sum_{k=n+1}^{\infty}z_k/g^k=g^n\sum_{k=n}^{\infty}z_k/g^k-g^n\frac{z_n}{g^n}=g^nr_{n-1}-\underbrace{z_n}_{\in\{0,1,..,g-1\}\subset Z}<1 \Rightarrow g^nr_{n-1}<\underbrace{z_n}_{\in\{0,1,..,g-1\}\subset Z}+1$$

$\Rightarrow \#\ z_n\le g^nr_{n-1}<z_n+1 \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.1.5}\#\ z_n=[g^nr_{n-1}]$ und $r_n=r_{n-1}-z_n/g^n$ ($r_{n-1}=\sum_{k=n}^{\infty}z_k/g^k$) $\Rightarrow$
z_n eindeutig (wenn man schon vorher $z_1,...,z_{n-1}$ gefunden hat).
Definiert man umgekehrt die Folgen (z_n) und (r_n) durch die Vorschrift $r_0=\xi$ und $z_n=[g^nr_{n-1}]$,

$$r_n=\xi-\sum_{k=1}^{n}z_k/g^k=\sum_{k=n+1}^{\infty}z_k/g^k=\sum_{k=n}^{\infty}z_k/g^k-z_n/g^n=r_{n-1}-z_n/g^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow g^nr_n=g^nr_{n-1}-z_n \underbrace{\Rightarrow}_{induktiv}$$

$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}z_k/g^k<(g-1)\sum_{k=n}^{\infty}(1/g)^k,\ \xi=\sum_{k=1}^{n}z_k/g^k+r_n \Rightarrow g^n\xi=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}z_kg^{n-k}}_{\text{ganze Zahl}}+\underbrace{g^nr_n}_{<1}$$

$$0\le g^nr_n=g^nr_{n-1}-z_n<1 \Rightarrow z_n=[g^nr_{n-1}],\ \text{falls}\ r_n\underbrace{\to}_{n\to\infty}0\ldots.:\ \xi=\sum_{k=1}^{\infty}z_k/g^k$$

$$z_n\in\{0,1,...,g-1\}\ \text{und}\ 0\le r_n<1/g^n,\ \text{also}\ r_n\underbrace{\to}_{n\to\infty}0.$$

Eigene Betrachtungen:

//**S2.1.2**(1250) Vor:$z\in\mathbb{C}$ 13.) $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in\mathbb{N}_0$ mit $z\in U_1(0)$: $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1-\underset{\neq 1}{z}}$ //

Bew: $r_0=\sum_{k=1}^{\infty} z_k g^{-k}<\sum_{k=1}^{\infty} (g-1)g^{-k}=(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k-1}=(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{g})^{k+1}=(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{g})^{k}(\frac{1}{g})=$

$=(g-1)(\frac{1}{g})\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{g})^{k}=(g-1)(\frac{1}{g})\frac{1}{1-1/g}=(\frac{1}{g})\frac{g-1}{(g-1)/g}=1$

Sei $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^k$, $\xi=r_0=\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k<1$.

Vor siehe oben $z_k<g-1$ für unendlich viele z_k

Zu beweisen $z_n=[g^n r_{n-1}]\in\{0,1,...,g-1\}$, $r_n<g^{-n}$ d.h. $r_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

z_1: $[g*r_0]=[g\sum_{k=0+1}^{\infty} z_k g^{-k}]=[\sum_{k=1}^{\infty} z_k g^{-k+1}]=[z_1 g^{-1+1}+\sum_{k=2}^{\infty} z_k g^{-k+1}]=[z_1+\sum_{k=0}^{\infty} z_{k+2}g^{-k-1}]=z_1$

da $g^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} z_{k+2}g^{-k}<g^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} (g-1)g^{-k}=\frac{g-1}{g}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} \underset{S2.1.2}{=} \frac{g-1}{g}\frac{1}{1-g^{-1}}=\frac{g-1}{g}\frac{g}{g-1}=1$

z_2: $[g^2*r_1]=[\sum_{k=1+1}^{\infty} z_k g^{-k+2}]=[z_2 g^0+\sum_{k=3}^{\infty} z_k g^{-k+2}]=[z_2+\sum_{k=0}^{\infty} z_{k+3}g^{-k-1}]=z_2$

da $\sum_{k=0}^{\infty} z_{k+3}g^{-k-1}<\frac{(g-1)}{g}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} \underset{S2.1.2}{=} \frac{(g-1)g}{g(g-1)}=1$

$r_1=\sum_{k=1+1}^{\infty} z_k g^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty} z_{k+2}g^{-k-2}=g^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} z_{k+2}g^{-k}<g^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} (g-1)g^{-k}=\frac{(g-1)}{g^2}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} \underset{S2.1.2}{=}$

$\frac{(g-1)*g}{g^2(g-1)}=\frac{1}{g}$

Sei nun $z_1,...,z_n$ und $r_0,...,r_n$ ermittelt und gelte

$1\le k\le n$, $z_n=[g^n*r_{n-1}]$ $(\xi=\sum_{k=1}^{n} z_k g^{-k}+\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{-k}=\sum_{k=1}^{n} z_k g^{-k}+r_n)$

Induktionsschritt:

Zu beweisen $z_{n+1}=[g^{n+1}r_n]<g$, $z_{n+1}\in\{0,1,..g-1\}$ und $r_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

z_{n+1}: $[g^{n+1}r_n]=[g^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{-k}]=[g^{n+1}z_{n+1}g^{-n-1}+g^{n+1}\sum_{k=n+2}^{\infty} z_k g^{-k}]=$

$[z_{n+1}+g^{n+1}\sum_{k=n+2}^{\infty} z_k g^{-k}]=z_{n+1}$

da $g^{n+1}\sum_{k=n+2}^{\infty} z_k g^{-k}<g^{n+1}\sum_{k=n+2}^{\infty} (g-1)g^{-k}=g^{n+1}(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k-n-2}=$

$g^{n+1}(g-1)g^{-n-2}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} \underset{S2.1.2}{=} \frac{g-1}{g}\frac{g}{g-1}=1$

$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{-k}<(g-1)\sum_{k=n+1}^{\infty} g^{-k}=(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k-n-1}=(g-1)g^{-n-1}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k} \underset{S2.1.2}{=}$

$\frac{g-1}{g^{n+1}}\frac{g}{g-1}=g^{-n}$

$r_n=r_0-\sum_{k=1}^{n-1} z_k g^{-k} <g^{-n} \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$.

Annahme: $\exists$ 2 solche Darstellungen, d.h.

$\exists\ z_k, \tilde{z}_k \in \{0,1,..g-1\}\quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ z_j = \tilde{z}_j,\ 1 \le j \le n_0,\ z_{n_0+1} \ne \tilde{z}_{n_0+1}$, (oBdA $z_{n_0+1} > \tilde{z}_{n_0+1}$)

$$0 = r_0 - r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k/g^k = \underbrace{z_{n_0+1}/g^{n_0+1} - \tilde{z}_{n_0+1}/g^{n_0+1}}_{\ge \frac{1}{g^{n_0+1}} > 0} + \underbrace{\underbrace{r_{n_0+1}}_{< \frac{1}{g^{n_0+2}}} - \underbrace{\tilde{r}_{n_0+1}}_{< \frac{1}{g^{n_0+2}}}}_{< \frac{1}{g^{n_0+1}}} > 0 \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Zusammenfassung:

$r_0 \in [0,1)$, $g \ge 2$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$, ∞ viele $z_k < g-1$: $r_{k_0} = \sum_{k_0+1}^{\infty} z_k/g^k < g^{-k_0}\ \ \forall\ k_0 \in \mathbb{N}$.

Bem: 1.) Diese Darstellung heißt Dezimalbruchentwicklung, falls $g=10$, Dualbruchentwicklung, falls $g=2$.

2.) Verlangt man nur $z_k \le g-1$, so geht die Eindeutigkeit verloren: $\underbrace{g^{-k_0+1} = \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \frac{g-1}{g^{\nu}}}_{\text{2 Darstellungen für die gleiche Zahl}}$

\# Bsp: $g=10$, $k_0=3$,

\# $g^{-k_0+1} = 10^{-3+1} = 0{,}01 = \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{9}{10^{\nu}} = 0{,}00999... = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{9}{10^{\nu+3}} = \frac{9}{10^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{10^{\nu}} =$

\# $\frac{9}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 0{,}01$

S3.3.2(1803) Das Intervall $[0,1)$ ist überabzählbar

*//**D1.5.3** (750)//*
//Sei M eine beliebige Menge, dann heißt//
//3.)M abzählbar: $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to M$ //
//(d.h. $M = \{a_n := f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$)//
//4.)Eine Menge heißt abzählbar unendlich, falls es eine //
// bij Abb $f: \mathbb{N} \to M$ gibt//
//5.)M höchstens abzählbar: $\Leftrightarrow$ M ist endlich oder abzählbar unendlich//
//6.)M überabzählbar: $\Leftrightarrow$ $|M| = \infty$ und M ist nicht höchstens abzählbar//
*//**S1.5.13**(752)Falls A mindestens 2 Elemente hat, also etwa {0,1}, dann//*
// ist die Menge aller Folgen in A überabzählbar.//

Bew: Aus S1.5.13 folgt, dass die Menge aller Ziffernfolgen (z_k) überabzählbar ist. Die Menge der Folgen, für die alle z_k ab einer Stelle gleich $g-1$ sind, ist abzählbar unendlich. Folglich ist die Menge aller g-adischen Reihen überabzählbar und daraus folgt die Beh.

D3.3.2(1803) Wir nennen manchmal eine g-adische Reihe auch g-adische Entwicklung einer Zahl und schreiben $\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k = 0{,}z_1 z_2 z_3...$

Für $g=10$ bzw $g=2$ bzw $g=16$ sprechen wir auch von einer dezimalen bzw dualen bzw hexadezimalen Darstellung einer Zahl.

Eine solche Entwicklung heißt periodisch, falls es $k_0, p \in \mathbb{N}$ gibt, für welche $z_{k+p} = z_k\ \forall\ k \ge k_0$. Das kleinste p mit dieser Eigenschaft heißt auch die Periodenlänge der Entwicklung.

A3.3.1 Zeige, dass eine reelle Zahl $x \in (0,1)$ rational ist, wenn ihre Dezimalbruchentwicklung periodisch ist.(Periode 9 darf nicht auftreten)

Lös:Zu $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $a_{n+p}=a_n$ $\forall$ $n \geq n_0$ $\Rightarrow$

$$x=\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+\nu p+j} 10^{-n_0-\nu p-j}=\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j} 10^{-n_0-\nu p-j}=$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j} 10^{-n_0-j}\sum_{\nu=0}^{\infty} 10^{-\nu p}=\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}+\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j} 10^{-n_0-j}\sum_{\nu=0}^{\infty} (10^{-\nu})^{p} \underset{S2.1.2}{=}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{n_0} a_n 10^{-n}}_{\in Q}+\underbrace{\sum_{j=1}^{p} a_{n_0+j} 10^{-n_0-j}\frac{1}{1-10^{-p}}}_{\in Q} \in \mathbb{Q}.$$

S3.3.3(1805) Die g-adische Entwicklung einer Zahl $\xi\in[0,1)$ ist genau dann periodisch, wenn $\xi\in\mathbb{Q}$ ist.

Bew: „⇒" k_0 und p wie in der D3.3.2 ⇒ $z_{np+j+k_0}=\tilde{z}_j$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ und $0\le j\le p-1$ ⇒

$$\xi=\underbrace{\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{z_k}{g^k}}_{r_1\ rational}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\tilde{z}_j}{g^{np+j+k_0}}=r_1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(g^p)^n}\underbrace{\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\tilde{z}_j}{g^{j+k_0}}}_{r_2}=r_1+r_2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{g^p}\right)^n=r_1+r_2\frac{1}{1-\frac{1}{g^p}}$$

$=r_1+r_2\frac{g^p}{g^p-1}$ mit $r_1=\sum_{k=1}^{k_0-1} z_k/g^k$, $r_2=\sum_{j=0}^{p-1}\tilde{z}_j/g^{j+k_0}$ ⇒ ξ rational

„⇐" $\xi\in\mathbb{Q}$, d.h. $\xi=\frac{\nu}{\mu}$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, $\mu\in\mathbb{N}$ und $\nu<\mu$.

Mit den Bezeichnungen aus S3.3.1 $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^k=z_{n+1}/g^{n+1}+z_{n+2}/g^{n+2}+\dots$ sei

$0\le R_n=g^n r_n=g^n\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^k=\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{n-k}=z_{n+1}/g^1+z_{n+2}/g^2+\dots\underbrace{<}_{siehe\ Bew\ S3.3.1}1.$

$\overbrace{\underbrace{g^n}_{\in N}\underbrace{\nu}_{\in N}}^{\in N}=\mu g^n\xi=\mu g^n\left(\sum_{k=1}^{n} z_k/g^k+\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^k\right)=$

$\underbrace{\mu}_{\in N}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} z_k g^{n-k}}_{\in N}+\left(\mu\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^{n-k}\right)\in\mathbb{N}$, $\left(\mu\underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{n-k}}_{=R_n}\right)\in\mathbb{N}\underbrace{\Rightarrow}_{0\le R_n<1}0\le\mu R_n<\mu\underbrace{\Rightarrow}_{\mu R_n\in N}$

$\mu R_n\in\{0,1,\dots,\mu-1\}$

n=0: $\underbrace{\mu R_0}_{\in N}=\mu g^0\sum_{k=0+1}^{\infty} z_k/g^k=\mu\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k<\mu\sum_{k=1}^{\infty}(g-1)/g^k=\mu(g-1)\sum_{k=1}^{\infty} g^{-k}=$

$\mu(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} g^{-(k+1)}=\mu(g-1)g^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k}=\mu(g-1)g^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k}=\mu\frac{(g-1)g}{g(g-1)}=\mu$ ⇒

$\mu R_0\in\{0,1,\dots,\mu-1\}$

n: siehe oben

n+1: $\mu R_{n+1}=\mu g^{n+1}\sum_{k=(n+1)+1}^{\infty} z_k g^{-k}=\mu g^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{-k}-\mu g^{n+1}z_{n+1}g^{-(n+1)}=$

$\mu g^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k g^{-k}-\mu z_{n+1}=\left(\underbrace{g}_{\in N}\underbrace{\mu R_n}_{\in\{0,1,..,g-1\}\subset N}-\underbrace{\mu}_{\in N}\underbrace{z_{n+1}}_{\in N}\right)\in\mathbb{N}$ und

$\mu g^{n+1}\sum_{k=(n+1)+1}^{\infty} z_k g^{-k}<\mu g^{n+1}\sum_{k=(n+1)+1}^{\infty}(g-1)g^{-k}=\mu g^{n+1}(g-1)\sum_{k=n+2}^{\infty} g^{-k}=$

$\mu g^{n+1}(g-1)\sum_{k=0}^{\infty} g^{-(k+n+2)}=\mu g^{n+1}(g-1)g^{-n-2}\sum_{k=0}^{\infty} g^{-k}=\frac{\mu(g-1)}{g}\frac{g}{g-1}=\mu$ ⇒

$\mu R_{n+1}=\in\{0,1,\dots,\mu-1\}$

Dann folgt induktiv, dass $\mu R_n\in\{0,1,\dots,\mu-1\}$ ist und somit kann R_n nur endlich viele verschiedene Werte annehmen.
Wegen $z_n=[g^n r_{n-1}]$ aus S3.3.1 und $R_n=g^n r_n$ gelten die Rekursionen

$z_n=[gR_{n-1}]$ da $[g^n r_{n-1}]=[gg^{n-1}r_{n-1}]=[g^n\sum_{k=n}^{\infty} z_k g^{-k}]=[\sum_{k=n}^{\infty} z_k g^{n-k}]=[z_n g^0+z_{n+1}g^{-1}+\dots]=z_n$

und

$R_n=gR_{n-1}-z_n$ da $g\underbrace{g^{n-1}r_{n-1}}_{=R_{n-1}}-z_n=g^n r_{n-1}-z_n=\sum_{k=n}^{\infty} z_k/g^{n-k}-z_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^{n-k}+z_n/g^{n-n}-z_n=$

$\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k/g^{n-k}=g^n r_n=R_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$,

und deshalb ist klar, dass sich die Werte der Ziffern z_n wiederholen, sobald R_{n-1} einen Wert annimmt, der schon vorher von einem R_j angenommen wurde. Dies muss aber eintreten, da der Wertevorrat für die R_n eine endliche Menge ist.

A3.3.2 Zeige, dass die Menge der Folgen von Ziffern $z_k \in \{0,1,...,g-1\}$ für die alle z_k ab einer gewissen Stelle gleich g-1 sind, abzählbar unendlich ist.

A3.3.3 Finde die dezimalen, dualen und hexadezimalen Darstellungen folgender rationaler Zahlen: ½, 1/7, 1/9, 1/3

A3.3.4

a) Es sei b eine natürliche Zahl≥2. Zeige: Jede reelle Zahl x≥0 besitzt eine Darstellung der Gestalt

$$x=\sum_{n=m}^{\infty} a_n b^{-n} \text{ mit } -m\in\mathbb{N}_0,\ a_n\in\{0,...,b-1\},\ \forall\ n\geq m.$$

Mit den Zusatzforderungen $a_m\neq 0$, falls m<0, und $a_n\neq b-1$ für unendlich viele n≥m ist diese Darstellung eindeutig. (Diese Darstellung heißt b-Bruchentwicklung oder b-Bruchdarstellung von x. Im Falle b=10, b=16, b=8, b=2 spricht man auch von der Dezimal-, Hexadezimal-, Oktal-, Binärentwicklung oder -Darstellung von x)

Hinweis zur Existenz der Darstellung: Definiere die a_n folgendermaßen rekursiv:

$x_m:=xb^m$ mit $m:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+\mu}\}$, und

$a_n:=[x_n]$, $x_{n+1}:=b(x_n-a_n)$ für n≥m.

Verdeutlichung an einem Beispiel:

* $x=\sqrt{151}=12{,}288...$ als Dezimalbruch darstellen:

$10^1=10=\sqrt{100}<\underbrace{\sqrt{151}}_{=x}<\sqrt{10000}=100=10^2=10^{1+1} \Rightarrow m=-1.$

$x_{-1}=x\cdot 10^{-1} \Rightarrow a_{-1}=[x_{-1}]=[x\cdot 10^{-1}]=1$

$(\text{denn } 1=\sqrt{\frac{100}{100}}\leq\sqrt{151}\cdot 10^{-1}=\underbrace{\sqrt{\frac{151}{100}}}_{x_{-1}}<\sqrt{\frac{400}{100}}=2) \Rightarrow$

$x_0=10(\underbrace{x\cdot 10^{-1}}_{=x_{-1}}-\underbrace{1}_{a_{-1}})=10(12{,}288...\cdot 10^{-1}-1)=$

$10(1{,}2288...-1)=10\cdot 0{,}2288..=2{,}288.. \Rightarrow a_0=[x_0]=2 \Rightarrow$

$x_1=10(x_0-2) \Rightarrow a_1=2 \Rightarrow$

$x_2=10(x_1-2) \Rightarrow a_2=8$ usw

$\sqrt{151}=12{,}288$ $(x_{-1}=1{,}228..\quad x_0=2{,}28..\quad x_1=2{,}8..\ x_2=8{,}8...$usw)

$\sqrt{151}=\sum_{\nu=m=-1}^{1} a_\nu 10^{-\nu}+x_2 10^{-2}=\underbrace{a_{-1}}_{1}10^{-(-1)}+\underbrace{a_0}_{2}\cdot 10^0+\underbrace{a_1}_{2}10^{-1}+8.8...\cdot 10^{-2}=$

$=12{,}2+8{,}8...\cdot 10^{-2}$

#siehe Anlage P33

Lös:#teilweise selbst in Anlehnung an Aufschrieb ergänzt#

Behauptung

(●) $\forall\ x\in\mathbb{R}$ mit $x\geq 0$ $\exists$ $m\in\mathbb{Z}$, $m\leq 0$ und $\forall\ n\geq m$ $\exists$ $a_n\in\{0,1,..,g-1\}$,

sodass $x=\sum_{n=m}^{\infty} a_n b^{-n}$.

(● ●) Mit der Zusatzforderung $a_m\neq 0$ falls $m<0$ und nicht ($a_n=b-1$ für fast alle $n\geq m$), (d.h. $\forall\ n_0\geq m$ $\exists$ $n\geq n_0$: $a_n\neq b-1$, d.h. $a_n\neq b-1$ für unendlich viele $n\geq m$) ist die Darstellung aus (●) eindeutig.

*//**S1.5.5**(706) Wohlordnungssatz//*

//Vor:$M\subset\mathbb{N}$ und $M\neq\emptyset$ Beh: $\exists$ minM//

*//**S2.1.3** (1255)(a_n),(b_n),(c_n) Folgen aus R: $a_n\to a$, $b_n\to b$, $(n\to\infty)$//*

//3.)$a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b$ $\Rightarrow$ $c_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} a$, $a_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} b=a$//

Bew:Sei $x\geq 0$ fest.

(●) Definiere $m:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}\}$;

(beachte $g^{1+\mu} \underset{\mu\to\infty}{\underbrace{\to}} \infty \Rightarrow \{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}\}\neq\emptyset \underset{S1.5.5}{\underbrace{\Rightarrow}} \exists\ \min\{\mu\in\mathbb{N}_0:\ x<b^{1+\mu}\} \Rightarrow m\in\mathbb{Z},\ m\leq 0$

(und $b^{-m}\leq x<b^{1-m}$ *siehe später).

Z.B: 0 b^2 b^3 x b^4 hier m=-3

Definiere jetzt rekursiv: $x_m:=xb^m$, $a_n:=[x_n]$, $x_{n+1}:=b(x_n-z_n)$ ür $n\geq m$.

Dann gilt, wie anschließend bewiesen, $\forall\ n\geq m$:

(α) $x=\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+x_n b^{-n} \Rightarrow x_n=(x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu})b^n$

(β) $0\leq x_n<b$

(γ) $a_n\in\{0,1,..,b-1\}$

siehe Bsp * oben

Bew zu (α)

Zu (α),(β)..Induktion nach n:

n=m: $x_m=xb^m \Rightarrow x=x_m b^{-m}=\underbrace{\sum_{\nu=m}^{m-1} a_\nu b^{-\nu}}_{=0}+x_m b^{-m}$ ...

Nach Def von m gilt $x<b^{1-m} \Rightarrow 0\leq x_m=\underbrace{x}_{\geq 0\ nachVor} b^m<b^{1-m}b^m=b$

$\underbrace{n\mapsto n+1}_{n\geq m}$: $x \underset{\text{IndHyp}}{\underbrace{=}} \sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+\underbrace{x_n}_{=a_n+x_{n+1}b^{-1}} b^{-n}=\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+(a_n+x_{n+1}b^{-1})b^{-n}=$

$x_{n+1}=b(x_n-z_n) \Rightarrow x_n=a_n+x_{n+1}b^{-1}$

$=\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu b^{-\nu}+x_{n+1}b^{-1}b^{-n}=\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu b^{-\nu}+x_{n+1}b^{-(n+1)}$

Bew zu(β): $\underbrace{0\leq x_n-a_n<1}_{da\ a_n=[x_n]} \Rightarrow 0\leq b(x_n-a_n)<b \Rightarrow 0\leq x_{n+1}=b(x_n-a_n)<b$

Bew zu (γ):folgt direkt aus (β)

Wegen $x_n b^{-n} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} 0$ (da $0\leq x_n b^{-n} \underset{(\beta)}{\underbrace{<}} b\cdot b^{-n} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\to}} 0$ & **S2.1.3 3.**)

und (α) folgt: $x=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$

(α) $x=\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}+x_n b^{-n} \Rightarrow x_n=(x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu})b^n$

Bem: (.) Es gilt $x_n b^{-n}=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$

(da nach (α) $x_n b^{-n}=x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$) $n\ge m$.

(..) Für obige a_n gilt nicht: $\{a_n=b-1$ für fast alle $n)\}$

Bew: Ann $a_n=b-1\ \forall\ n\ge n_0$ für ein $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\ge m \Rightarrow$

$$x_{n_0} b^{-n_0} \underbrace{=}_{\text{Bem}(.)} \sum_{\nu=n_0}^{\infty} \underbrace{a_\nu}_{=b-1} b^{-\nu}=(b-1)\underbrace{b^{-n_0}}_{ausgeklammert \Rightarrow \nu=0}\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}}_{\underbrace{=}_{geomReihe}\frac{1}{1-b^{-1}}}=$$

$$(b-1)\,b^{-n_0}\frac{b}{(b-1)}=b^{1-n_0} \Rightarrow x_{n_0}=b \text{ Widerspruch zu } \beta$$

(●●) Eindeutigkeit der Darstellung: Es seien m, a_n, x_n für $n\ge m$ wie in (●)

Sei $x=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}$ mit $-M\in\mathbb{N}_0$ und $b_\nu\in\{0,1,..,b-1\}\ \forall\ \nu\ge M$, sowie zusätzlich: $b_M\ne 0$, falls $M<0$ und nicht ($b_\nu=b-1$ für fast alle $\nu\ge m$).
Z.z. $M=m$ und $b_\nu=a_\nu\ \forall\ \nu\ge m$

Definiere für $n\ge M$ (siehe Bem (.)): $y_n:=b^n\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=n}^{\infty} \underbrace{b_\nu}_{\ge 0} b^{n-\nu}$

Wir wollen zeigen: $y_n=x_n\ \forall\ n\ge M$

$0\le y_n=\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{n-\nu} < \sum_{\nu=n}^{\infty} (b-1)b^{n-\nu}=(b-1)\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}}_{=\frac{1}{1-b^{-1}}=\frac{b}{b-1}}=g\ \forall\ n\ge M,$

$b_\nu\le b-1\ \forall\ \nu\ge n$ und $b_\nu\ne b-1$ für mindestens 1 $\nu\ge n$

d.h. $0\le y_n<b\ \forall\ n\ge M \Rightarrow x=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=b^{-M}b^M\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=y_M b^{-M}<bb^{-M}=b^{1-M}$

Hieraus folgt: $M=m$, denn

1.Fall: $M=0$: $x<b \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def von } m} (m:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+\mu}=b^{1+0}\} \Rightarrow m=0$

2.Fall: $M\ne 0$ (d.h. $M<0$): $b^{-M} \underbrace{\le}_{b_M\ne 0,\, d.h.\, b_M\ge 1\, da\, M<0} b_M b^{-M}\le \sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=x<b^{1-M} \underbrace{\Rightarrow}_{siehe\ Seite\ 1806}$
$M:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+M}\}=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+m}\}=m.$

#3.Fall: $M\ne 0, M>0$: $x=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}<(b-1)b^{-M}\sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu}=\frac{(b-1)b}{b^M(b-1)}=b^{1+(-M)} \Rightarrow$
$M:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+(-M)}\}$, analog a_ν statt $b_\nu b$
$M:=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: x<b^{1+(-m)}\} \Rightarrow M=m$

$y_{n+1}=b^{n+1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=b^{n+1}(\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}-b_n b^{-n})=b(b^n\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}-b_n)=b(y_n-b_n) \Rightarrow$
$y_n=x_n\ \forall\ n\ge m$ nach folgendem Bew durch Induktion nach n:

$n=m$: $y_m=b^m\underbrace{\sum_{\nu=m}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}}_{=\sum_{\nu=M}^{\infty} b_\nu b^{-\nu}=x}=b^m x \underbrace{=}_{siehe\ Seite\ 1807} x_m$

$n\mapsto n+1$: $y_{n+1}\underbrace{=}_{s.o.} b(y_n-b_n)\underbrace{=}_{IndHyp} b(x_n-b_n)=x_{n+1}$.
Wegen $b_n=[y_n]\ \forall\ n\ge m$ folgt: $a_n=[x_n]=[y_n]=b_n\ \forall\ n\ge m$

da $y_n := \sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu+n} g^{n-\nu} = b_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu b^{n-\nu}$ und

$$0 \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu b^{n-\nu} < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (b-1) b^{n-\nu} = (b-1) b^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b^{-\nu} = (b-1) b^n \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-(\nu+n+1)} =$$

$$(b-1) \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-(\nu+1)} = (b-1) b^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} b^{-\nu} = (b-1) b^{-1} (b-1)^{-1} b = 1 \;\Rightarrow\; [y_n] = b_n$$

b) Berechne die Binärdarstellung der Dezimalzahl 5,2

Lös: $(5,2)_{10}$. $m=-\min\{\mu\in\mathbb{N}_0: 5,2<2^{1+\mu}\}=-2$, da $2^2\le 5,2<2^3$,

$x_{-2}=5,2\cdot 2^{-2}=1,3 \Rightarrow a_{-2}=[1,3]=1 \Rightarrow x_{-1}=2(1,3-1)=0,6 \Rightarrow a_{-1}=[0,6]=0 \Rightarrow$

$x_0=2(0,6-0)=1,2 \Rightarrow a_0=1 \Rightarrow x_1=2(1,2-1)=0,4 \Rightarrow a_1=0 \Rightarrow$

$x_2=2(0,4-0)=0,8 \Rightarrow a_2=0 \Rightarrow x_3=2(0,8-0)=1,6 \Rightarrow a_3=1 \Rightarrow$

$x_4=2(1,6-1)=\underbrace{1,2}_{=x_0} \Rightarrow a_4=1=a_0 \Rightarrow x_5=x_1,\ a_5=a_1 \Rightarrow x_6=x_2,\ a_6=a_2$ usw $\Rightarrow$

$(5,2)_{10}=(101,00110011\ldots)_2=(101,\underbrace{\overline{0011}}_{Periode})_2$

c) Berechne die 7-Bruchdarstellung der Dezimalzahl 2000

Lös: $x=(2000)_{10}$. $7^3=343<2000<2100<7^4 \Rightarrow m=-3$,

$x_{-3}=2000\cdot 7^{-3}\in[5,6) \Rightarrow a_{-3}=5 \Rightarrow x_{-2}=7(2000\cdot 7^{-3}-5)\in[5,6) \Rightarrow a_{-3}=5 \Rightarrow$

$x_{-1}=7(x_{-2}-5)\in[5,6) \Rightarrow a_{-1}=5 \Rightarrow x_0=5 \Rightarrow a_0=5$. Also $(2000)_{10}=(5555)_7$.