3.5(2000) Potenzreihen

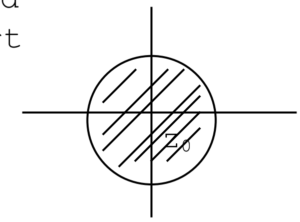
D3.5.1(2000) Sei $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C}$

eine <u>Potenzreihe</u>(PR)<u>um</u> Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Bsp:1.) Das Polynom $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist PR mit $z_0=0$ und $a_k=0 \;\forall\; k>n$.

2.) Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine wichtige

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0=0$ und den Koeffizienten $a_k=1 \;\forall\; k \in \mathbb{N}_0$; konvergiert $\forall\; z:|z-0|<1$ und divergiert $\forall\; z:|z-0|\geq 1$



3.) Expotentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$.

S3.5.1(2000) Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Dann gilt:

a) Die Reihe konvergiert trivialerweise für $z=z_0$ und ihr Wert ist gleich $a_0(z_0-z_0)=a_0 0^0=a_0$

b) Ist die Reihe für ein $z=z_1 \neq z_0$ konvergent, so ist sie absolut konvergent $\forall\; z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<|z_1-z_0|$

*//**S3.1.2**(1602)Rechenregeln und Konvergenzkriterien für unendliche Reihen*

//Vor:Seien $(z_\nu),(w_\nu) \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu, \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.//

//Beh:Notwendiges Konvergenzkriterium 2.) $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$//

*//**D1.3.1**(500)Sei $(K,<)$ angeordneter Körper $T \subset K$, $T \neq \emptyset$//*

//Bem:1.) $T \subset K$ ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists\; c \in K$ mit $|t| \leq c \;\forall\; t \in T$//

*//**S3.2.2** (1700)Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ $n \in \mathbb{N}_0$.//*

//4.) $\exists\; 0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q \;\forall\; n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent.//

Bew: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_1-z_0)^k$ konvergent $\underset{S3.1.2\ 2.)}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty}(a_k(z_1-z_0)^k)=0 \underset{D1.3.1 Bem:1.)}{\Rightarrow}$

$a_k(z_1-z_0)^k$ beschränkt $\underset{D1.3.1 Bem:1.)}{\Rightarrow} \exists\; K>0$: $|a_k||z_1-z_0)^k|<K \in \mathbb{R}_+ \;\forall\; k \geq 0 \Rightarrow$

$$|a_k| \leq K|z_1-z_0|^{-k} \;\forall\; k \geq 0 \;\overbrace{\underset{|z-z_0|<|z_1-z_0|}{\Rightarrow}}^{S3.2.2\ 4.}\; \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} \leq \sqrt[k]{|a_k||(z-z_0)^k|} =$$

$$|z-z_0|\sqrt[k]{|a_k|} \leq |z-z_0|\sqrt[k]{|z_1-z_0|^{-k}}\sqrt[k]{K} = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\sqrt[k]{K} < 1 \;\forall\; k \geq 0.$$

Wegen $\sqrt[k]{K} \to 1 (k\to\infty)$ ist die rechte Seite kleiner als $1-\varepsilon$ für ein genügend kleines $\varepsilon>0$ und jedes $k \geq k_0$. Mit dem Wurzelkriterium folgt deshalb die Beh.

S3.5.2(2001) Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ $\exists$ genau eine Zahl R mit $0\le R\le\infty$, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der Eigenschaft:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \textit{konvergiert absolut } \forall\ z\in C \textit{ mit } |z-z_0|<R \\ \textit{divergiert } \quad \forall\ z\in C \textit{ mit } |z-z_0|>R \end{cases}$$

Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard),

wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$

Bem:1.) $|z-z_0|=\infty$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}$ bedeutet $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, $1/0:=\infty$

$|z-z_0|=0$ bedeutet hier Konvergenz nur in z_0 gegen a_0.

2.) Das Konvergenzverhalten der PR für $|z-z_0|=R$ muss im Spezialfall untersucht werden.

*//**S3.2.2** (1703) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 6.) $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, $z_k\neq 0$ $\forall$ $n\ge n_0$: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}<1$,//*

//so ist sie absolut konvergent.//

//**A2.4.9** (1514) $a_n,b_n\ge 0$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a) $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_nb_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n * \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$//

Bew: Wir betrachten $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}\le|z-z_0|\sqrt[n]{|a_n|}$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}\right)\begin{cases} <1, & \textit{falls } |z-z_0|<R\ \forall z \textit{ und } \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}>0 \textit{ oder, falls } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0 \\ >1, \textit{falls } |z-z_0|>R \textit{ und } \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty \textit{ oder, falls } \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty \textit{ und } z\neq z_0 \end{cases}$$

nach dem Wurzelkriterium

$$\# \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|}\le|z-z_0|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<R\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}*1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$$

Andere Formulierung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ konvergent } \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2,A2.4.9} \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z-z_0|^n|a_n|}<1 \Leftrightarrow |z-z_0|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$

$$\Leftrightarrow |z-z_0|<\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=R \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n<\infty$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z-z_0|^n|a_n|}>1 \Leftrightarrow |z-z_0|>\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=R \Rightarrow (z-z_0)^n a_n \overset{\rightarrow}{\text{nicht}}\ 0$$

Andere Formulierung:

Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gegeben, und sei $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ ihr Konvergenzradius. Dann ist die Reihe absolut konvergent $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<R$ und divergent $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|>R$, wobei für $R=0$ die erste und für $R=\infty$ die 2. Menge leer ist.

Bew:#$R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$. Wurzelkriterium $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z-z_0|^n|a_n|}<1 \Leftrightarrow |z-z_0|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<1$

#$\Leftrightarrow$ $|z-z_0|<\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=R.$

Falls $R>0$, sei ein z mit $|z-z_0|<R \Rightarrow R^{-1}|z-z_0|<1$ betrachtet. Dann gibt es ein $\rho>1/R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ so, daß $\rho|z-z_0|<1$ und nach Def von $\overline{\lim_{n\to\infty}}$ $\exists\ k_0\in\mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|}\le\rho\ \forall\ k\ge k_0$. Daraus folgt die Existenz von $c>0$ mit $|a_k|\le c\rho^k\ \forall\ k\ge 0$

*//**S2.1.2** (1250) $(z_n)\in C$, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z\in C$ 13.) Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in N_0$ mit $z\in U_1(0)$//*

// gilt $z_n\to\frac{1}{1-\underset{\neq 1}{z}}$ $(n\to\infty)$//

#$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(z-z_0)^k|\le\sum_{k=0}^{\infty}|a_k||(z-z_0)^k|\le\sum_{k=0}^{\infty}|c\rho^k||(z-z_0)^k|\le$

#$\sum_{k=0}^{\infty}|c||\underbrace{\rho(z-z_0)}_{<1}|^k\underbrace{<=}_{S2.1.2}\infty$

und deshalb ist die Potenzreihe absolut konvergent für dieses z. Daraus folgt der 1. Teil der Beh.

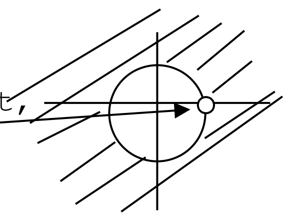
Falls $R<\infty$, sei ein z mit $R^{-1}|z-z_0|>1$ betrachtet. Dann gibt es ein $\rho<R^{-1}$ so, dass $\rho|z-z_0|\ge 1$ und nach Def $\overline{\lim_{n\to\infty}}$ gilt dann $\sqrt[k]{|a_k|}\ge\rho$ für unendlich viele $k\ge 0$. Für diese k ist dann $|a_k(z-z_0)^k|\ge 1$ und somit kann die Reihe nicht konvergieren.

Bsp:1.) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $R=1$, $|z-z_0|<1$ absolut konvergent. $z_0=0$, $|z-z_0|\ge 1$ Divergenz

2.) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$, $R=\infty$, da $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{1/n!}=0$, $\forall$ z konvergent.

3.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$, $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ da $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[k]{1/k^2}=1$, $|z-0|\le 1$ absolut konvergent, $|z|>1$ divergent

4.) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}$, $R=1$,
$|z|<1$ absolut konvergent, $|z|>1$ Divergent,
$z=1$ divergent (harm Reihe)
kvgt, nicht abs konv (auf dem Kreis#?#)
für $|z|=1$, $z\neq 1$



$\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{n}\log(n+1)}}\to 1/e^0=1$, $R=1$, $|z|=1$, 5.) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}$, $z_0=0$, $a_k=\begin{cases} 2^n \text{ für } k=2n \\ 0 \text{ für } k=2n+1 \end{cases}$,

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} (2^n)^{1/(2n)} = \sqrt{2}$.

Absolut konvergent für $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}/2$, divergent für $|z|\geq\sqrt{2}/2$

//S2.3.18(1409) 5.) $\forall\ x\in R\ \exists\ exp(x)=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$, $exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$ //

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} \underbrace{z}_{z_{0=0}}{}^{n}$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2/n} =$

$(1-\frac{1}{n})^n \underbrace{\overset{S2.3.18\ 5.)}{\overbrace{\rightarrow}}}_{n\to\infty} \frac{1}{e} \Rightarrow R=e,\ z_0=0$

7.) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{3n}$, $w=z^3$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n w^n$, $\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[n]{2^n}=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n w^n$ hat

KonvRadius $R=1/2=2^{-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{3n}$, kvgt für $|z|^3<1/2 \Leftrightarrow$

$|z|<(1/2)^{1/3}=2^{-1/3}=R$

8.)#7.)Sandwhichsatz

\# Seien (x_n^+),(x_n^-)und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

\# $\lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = x$ und $x_n^- \leq y_n \leq x_n^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = x$.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k+2}}$, $a_k=\frac{1}{\sqrt{k+2}}$, $1\leq \sqrt[k]{\sqrt{k+2}} = \sqrt[2k]{k+2} \underset{k>2}{\leqslant} \sqrt[2k]{2k} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 1 \underset{7.)}{\Rightarrow}$

$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{k+2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{k+2}}} = 1 = \frac{1}{R}$, $R=1 \Rightarrow$ Konvergenz für $|x|<1$

9.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^{3k}$

$a_k=\begin{cases} \frac{2^k}{k} \text{ für } n=3k \\ 0 \text{ für } n\neq 3k \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[3k]{\frac{2^k}{k}} \text{ für } n=3k \\ 0 \text{ für } n\neq 3k \end{cases}$, $\sqrt[3k]{\frac{2^k}{k}} = \left(\frac{2^k}{k}\right)^{\frac{1}{3k}} = \sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt[k]{k}}} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \sqrt[3]{2} = \alpha = \frac{1}{R} \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \underset{Konvergenz}{=} \sqrt[3]{2} = \frac{1}{R} \Rightarrow R=1/\sqrt[3]{2}$

10.) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

//**S3.1.4**(1607) Leibniz Kriterium

//Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$, $a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$.

// Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0-a_1+a_2-a_3+-\ldots$ ist konvergent.

$(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0 \underset{S3.1.4}{\Rightarrow}$ konvergent

Potenzreihen sind Spezialfälle von Funktionenreihen. Deshalb ist es sinnvoll, die Frage nach der gleichmäßigen Konvergenz zu stellen:

S3.5.3(2004)Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen

Sei eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit einem Konvergenzradius $R>0$ gegeben und sei $0<r<R \Rightarrow \frac{1}{R}<\frac{1}{r}$. Dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig für alle z mit $|z-z_0| \underset{!}{\leq} r$.

Andere Formulierung aus wikiversity:

Es sei $(c_n)_{n\in N}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a\in C$.

Die Potenzreihe $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ sei für eine komplexe Zahl $z=b$, $b\neq a$, konvergent (d.h. $|z-z_0|<R$ mit $R=1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$)

Dann ist für jeden reellen Radius r mit $0<r<|b-a|$ die Potenzreihe f(z) auf der abgeschlossenen Kreisscheibe B(a,r) punktweise absolut und gleichmäßig konvergent

*//**D2.4.2''**(1507)* $\overset{*}{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0$ *gilt* $\begin{cases} x_n \leq \overset{*}{x}+\varepsilon \text{ für fast alle } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n \end{cases}$

*//**S3.2.2** (1700)**Vor:*** $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$, $b_n\geq 0$, $n\in N_0$.*//*

//2.) $|z_n|\leq b_n$, $\forall\, n\geq n_0$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ *konvergent*

Bew:# $|z-z_0|<\frac{1}{\underbrace{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}_{R}}$ ($\frac{1}{R}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergent

$0<\varepsilon<1/r-1/R \Rightarrow 1/R+\varepsilon<1/r \underset{D2.4.2''}{\Rightarrow} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/R+\varepsilon<1/r \;\; \forall\, n\geq n_0 \underset{|z-z_0|\leq r}{\Rightarrow}$

$|a_n|\leq(\frac{1}{R}+\varepsilon)^n$, $|z-z_0|^n|a_n| \leq r^n(\varepsilon+1/R)^n=(r(\frac{1}{R}+\varepsilon))^n<(r\frac{1}{r})^n=1$

geom Reihe $\forall\, n\geq n_0 \Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz.

Andere Formulierung:

Sei $0<\delta<1/r-1/R$. Nach Def $\overline{\lim_{n\to\infty}}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|}\leq\delta+(1/R)<1/r$ $\forall$ $n\geq n_0$, woraus Für $|z-z_0|\leq r$ folgt, dass $|z-z_0||a_n|\leq r^n(\delta+1/R)^n$ $\forall$ $n\geq n_0$. Wegen $r(\delta+1/R)<1$ folgt Beh mit dem Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz.

//**S3.5.2**(2000) *Zu jeder Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ $\exists$ *genau eine Zahl R mit//*

// $0\leq R\leq\infty$, der ***Konvergenzradius*** *(KR) der PR, mit der Eigenschaft://*

$$// \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut } \forall z\in C \text{ mit } |z-z_0|<R \\ \text{divergiert} \quad \forall z\in C \text{ mit } |z-z_0|>R \end{cases} //$$

//   Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ *(Formel von Cauchy-Hadamard),//*

//   wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$*//*

//Bem:1.) $|z-z_0|=\infty$ $\forall$ $z\in C$ *bedeutet* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, $1/0:=\infty$*//*

// $|z-z_0|=0$ bedeutet hier Konvergenz nur in z_0 gegen a_0.//

//   2.)Das Konvergenzverhalten der PR für $|z-z_0|=R$ muss im //

//   Spezialfall untersucht werden.//

S3.5.4(2005) Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset C$, $a_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$ (fast alle), $\exists$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Beh:In **S3.5.2** gilt $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

*//**S3.2.2** (1700)Vor:$(z_n)_{n=0}^{\infty}$ 5.) $z_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$ und $\exists$ $0<q<1$ mit//*

$$// \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq q \;\; \forall\; n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty. \quad \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\geq 1 \;\; \forall\; n\geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|=\infty//$$

Bew: $\underbrace{\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right|}_{¿0} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z-z_0|$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z-z_0|<1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{S3.2.2\,5.)}$ abs konv

$$\Leftrightarrow \quad |z-z_0|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\alpha,$$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z-z_0|>1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{S3.2.2\,5.)} |z-z_0|>\alpha$, $a_n(z-z_0) \overset{n\to\infty}{\not\to} 0$ divergent,

$R=\alpha \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$

Andere Formulierung:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \Rightarrow \forall\; \varepsilon>0\; \exists\; K\geq k_0$: $\rho-\varepsilon\leq\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\leq\rho+\varepsilon$ $\forall$ $k\geq K$ äquivalent zu

$\frac{|a_n|}{\rho+\varepsilon}\leq|a_{n+1}|\leq\frac{|a_n|}{\rho-\varepsilon}$ $\forall$ $k\geq K \underbrace{\Rightarrow}_{Induktion} \exists\; c_\pm$: $\frac{c_-}{(\rho+\varepsilon)^n}\leq|a_n|\leq\frac{c_+}{(\rho-\varepsilon)^n}$ $\forall$ $k\geq K \Rightarrow$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\in[\frac{1}{\rho+\varepsilon},\frac{1}{\rho-\varepsilon}] \Rightarrow$ Beh $|R-\rho|<\varepsilon$

Bsp:1.) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$. $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=k+1\overset{k\to\infty}{\to}\infty$

2.) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n,\ \alpha\in\mathbb{C}$

1.Fall $\alpha\in\mathbb{N}_0$: $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!},\ \alpha\in\mathbb{N}_0\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n$ Polynom, $(n>\alpha\Rightarrow\binom{\alpha}{n}=0)$

2.Fall $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}_0$: $a_n=\binom{\alpha}{n}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)n!}=\frac{n+1}{\alpha-n}$

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n+1}{|\alpha-n|}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}1,\ R=1$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right||z|^n<\infty\ \forall\ |z|<1,\ \sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right||z|^n=\infty\ \forall\ |z|>1$

A3.5.1 Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihen

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$

//S3.5.4 Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $a_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0$ (fast alle), $\exists\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

// Beh:In S3.5.2 gilt $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

//S2.3.18(1408) 11.)(1412)Für $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ gilt immer $e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$ //

Lös:$a_n=n!\ \Rightarrow\ \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}0\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4}$ $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=0$ konvergent für $z=0$

(oder mit Cauchy Hadamar $R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=1/\infty=0$, Da nach **S2.3.18** 11.)

gilt #1 $\underbrace{\leftarrow}_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}<\frac{e}{n}\sqrt[n]{n!}<\sqrt[n]{ne}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}1$# $\Rightarrow\ \frac{e}{n}\sqrt[n]{n!}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}1$, also $\sqrt[n]{n!}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\infty$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\log n}{n}} z^n$

*//**S2.3.8** (1402)$x\in\mathbb{R}$ ¿ $x\neq 0$ ˅ $n>-x$ ˅ $x_n=(1+x/n)^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$: $(x_n)\uparrow$ //*

*//**S2.3.21**(1459)Wichtige Grenzwerte 3.) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^{\alpha}}=0,\ \alpha>0$//*

Lös:$a_n=n^{\frac{\log n}{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{|a_n|}=n^{\frac{\log n}{n^2}}=\exp(\log n^{\frac{\log n}{n^2}})=\exp(\frac{\log n}{n^2}\log n)=$

$\exp((\frac{\log n}{n})^2)\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\exp(0^2)\underbrace{=}_{n\to\infty}1.$

Da $\frac{\log n}{n}\overbrace{\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}}^{S2.3.21\ 3.)}0$ und exp ist monoton (**S2.3.8**) $\Rightarrow$ $R=\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=1/1=1$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n}$ $\#= \underbrace{3^0}_{a_0} \underbrace{z^{k=4*0=0}}_{z^0} + \underbrace{0}_{a_1} * z^{k=1} + \underbrace{0}_{a_2} * z^{k=2} + \underbrace{0}_{a_3} * z^{k=3} + \underbrace{3^1}_{a_4} z^{k=4*1} + \ldots \#$

//**S3.5.2**(2001) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \textit{konvergiert absolut } \forall z \in C \textit{ mit } |z-z_0| < R \\ \textit{divergiert} \quad \forall z \in C \textit{ mit } |z-z_0| > R \end{cases}$, $R = 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$
//

Lös:= $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \begin{cases} 3^k \text{ falls } n = 4k \text{ mit } k \in N_0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$.

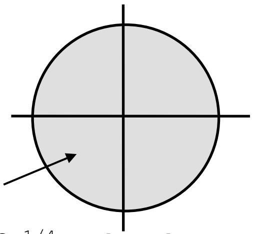
1.Möglichkeit mit Cauchy Hadamard:

$\sqrt[4k]{|a_{4k}|} = (3^k)^{1/4k} = 3^{1/4}$ und $\sqrt[4k+1]{|a_{4k+1}|} = \sqrt[4k+2]{|a_{4k+2}|} = \sqrt[4k+3]{|a_{4k+3}|} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt[n]{|a_n|}$ hat genau die Häufungswerte $3^{1/4}$ und $0 \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 3^{1/4} \Rightarrow$

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{3^{1/4}} = 3^{-1/4}$ Cauchy Hadamard **S3.5.2**

2.Möglichkeit geom. Reihe



$3^{-1/4}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (3z^4)^n \Leftrightarrow$

konvergiert absolut $|3z^4| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3^{-1/4}$

und div $\Leftrightarrow |z| > 3^{-1/4} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n}$ hat $R = 3^{-1/4}$ abs konv

3.Möglichkeit:mit Substitution $w = z^4$.Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n w^n$

hat nach Cauchy Hadamard KR=1/3, d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n w^n$ konvergiert

absolut für $|w| < 1/3$ und divergiert für $|w| > 1/3 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \underbrace{z^{4n}}_{(z^4)^n}$

konvergiert absolut für $|z^4| < 1/3$ d.h. $|z| < 3^{-1/4}$ und div für $|z^4| > 1/3$ d.h. $|z| > 3^{-1/4} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n z^{4n}$ hat KR $3^{-1/4}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n$

*//**S2.1.3** (1254)* $(a_n),(b_n),(c_n)$ *Folgen aus R:* $a_n \to a, b_n \to b, (n\to\infty)$ *und* $\alpha \in R$*//*
//3.) $a_n \le c_n \le b_n$ *für fast alle* $n \in N$ *und* $a=b \Rightarrow c_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a,\ a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a,\ b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} b=a$*//*

*//**S3.2.2** (1700) Vor:* $(z_n)_{n=0}^{\infty}$, $b_n \ge 0$, $n \in N_0$.*//*

//2.) $|z_n| \le b_n,\ \forall\ n \ge n_0$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent* $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ *konvergent//*

Lös: $a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ $(=\cosh(n))$

1.Möglk: $\underbrace{\frac{e}{\sqrt[n]{2}}}_{\to \frac{e}{1} (n\to\infty)} = \sqrt[n]{\frac{e^n}{2}} \le \sqrt[n]{|a_n|} \underbrace{<=}_{da\ -n\ge 0,\ e^{-n} \le e^n} \sqrt[n]{\frac{e^n + e^n}{2}} = e \overbrace{\Rightarrow}^{S2.1.3\ 3.)} \sqrt[n]{|a_n|} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1/e$

2. Möglk: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{2} z^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{\sqrt[n]{2}} = e \Rightarrow$ R=1/e? und

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n}}{2} z^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e^{-1}}{\sqrt[n]{2}} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1/e \Rightarrow R=e$?

$\Rightarrow$ hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n \ldots R \ge 1/e$?, $\sqrt[n]{\frac{e^n + e^{-n}}{2}} \ge \sqrt[n]{\frac{e^n}{2}}$

obige 2 Reihen abs konv für $|z|<1/e$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut für $|z|<1/e$.

Annahme: $R>1/e \Rightarrow \exists\ \tilde{z} \in \mathbb{C}$: $1/e < |\tilde{z}| < e$ so, dass

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{z}^n$ absolut konvergiert $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^n}{2}}_{a_n - \frac{e^{-n}}{2}} \tilde{z}^n$ abs konvergent, da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-n}}{2}}_{\frac{e^n + e^{-n}}{2} - \frac{e^n}{2}} \tilde{z}^n$ konvergiert,

Widerspruch, weil $|\tilde{z}| > 1/e$... $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{e^n}{2}}_{a_n - \frac{e^{-n}}{2}} \tilde{z}^n$ R=1/e hat

Genauer: Annahme $\exists\ z^* \in \mathbb{C}$, $|z^*| > 1/e$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^{-n}}{2} (z^*)^n$ konv abs

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{z}^n$ konvergiert absolut $\forall\ |\tilde{z}| \le |z^*|$, insbesondere

$\exists\ \tilde{z} \in \mathbb{C}: 1/e < |\tilde{z}| < e$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} + e^{-n}}{2} \tilde{z}^n$ konv abs

e) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$ für $a\in\mathbb{C}$ (fest)

//**S3.5.4**(2004) Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $a_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0$ (fast alle), $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

// Beh:In **S3.5.2** gilt $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

Lös:$a_n=a^{n^2}$ mit $a\in\mathbb{C}$ fest. $\sqrt[n]{|a_n|}=|a|^n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \begin{cases}0, \text{ falls } |a|<1\\ 1, \text{ falls } |a|=1\\ \infty, \text{ falls } |a|>1\end{cases} \Rightarrow$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}=\begin{cases}\infty, \text{ falls } |a|<1\\ 1/1=1, \text{ falls } |a|=1\\ 0, \text{ falls } |a|>1\end{cases}$$ oder mit **S3.5.4**

1.Fall:$a=0$, $R=\infty$, klar, da $a_n=0\ \forall\ n$

2.Fall:$a\neq 0$: $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{a^{n^2}}{a^{(n+1)^2}}\right|=|a|^{-2n-1}\underbrace{\to}_{n\to\infty}\begin{cases}\infty, \text{ falls } |a|<1\\ 1, \text{ falls } |a|=1\\ 0, \text{ falls } |a|>1\end{cases}\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4}$

$$R=\begin{cases}\infty, \text{ falls } |a|<1\\ 1/1=1, \text{ falls } |a|=1\\ 0, \text{ falls } |a|>1\end{cases}$$

f) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}2^{-n}z^n$

Lös:$a_n=(-1)^n\binom{1/2}{n}2^{-n}$. $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{\binom{1/2}{n}2^{-n}}{\binom{1/2}{n+1}2^{-n-1}}\right|\underbrace{=}_{*}\frac{n+1}{\left|\frac{1}{2}-n\right|}\frac{1}{2^{-1}}=2\frac{n+1}{n-\frac{1}{2}}\underbrace{\to}_{n\to\infty}2$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4}$ $R=2$

$$*\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n+1}{\alpha-n}=\binom{\alpha}{n+1}\frac{n+1}{\alpha-n}$$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!}z^n$.

Lös:$a_n=\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!}$ $\Rightarrow$ $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{(2n-1)^{2n-1}\cdot 2^{2n+2}(2n+2)!}{2^{2n}(2n)!(2n+1)^{2n+1}}=$

$$\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n}2^2\underbrace{\frac{2n+2}{2n-1}}_{\to 1}=4\underbrace{\frac{(1-\frac{1}{2n})^{2n}}{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}}_{\to\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}}\to 4e^{-2}\quad\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4}}^{n\to\infty}\quad R=4e^{-2}$$

(Formeln (1) $1/R=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (2) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $a_n\neq 0$, $n\geq m$)

2009

h) $\sum_{n=0}^{\infty}$ $\log(n+1)x^n$

Lös: (2) $\dfrac{\log(n)}{\log(\underbrace{n+1}_{n(1+1/n)})} = \dfrac{\log(n)}{\log(n)+\underbrace{\log(1+1/n)}_{beschränkt}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\log(1+1/n)}{\log(n)}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}$ $(1+3(-1)^n)^{-n}x^n$. Lös: (1) 1

i) $\sum_{n=0}^{\infty}$ $(1+½+\ldots+1/n)x^n$. Lös: (2) 1

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(4+(-1)^n)^{3n}}$

Lös: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^n}{a_n} \le 0$. $1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R_x = \sqrt{R_y}$

$3\sqrt{3} = \sqrt{3^3}$ ... $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{y^n}{a_n} \le 0$ ...

(1) $1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $R_x = \sqrt{R_y}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty}$ $(3\cdot 7^n+5\cdot 2^{2n+6})z^n$

l) $\sum_{n=0}^{\infty}$ $\binom{-1/2}{n}\pi^n z^{2n}$.

m) $\sum_{k=1}^{\infty}$ kx^{k-1}.

Lösung: $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k-1}_{a_k} x^k$, $|a_k|=k+1$, $\sqrt[k]{k+1} \underset{k\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow R = \dfrac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = 1/1 = 1$

n) $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^k}{k!} x^k$.

Lösung: $\sqrt[k]{\left|\dfrac{2^k}{k!}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt[k]{k!}} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 \Rightarrow R = +\infty$, d.h konvergent auf $\mathbb{R}$.

o) $\sum_{k=0}^{\infty}$ $a_k x^k$, $a_{2\ell-1}=0$, $a_{2\ell}=2^l$ für $\ell \in \mathbb{N}$.

Lösung: $\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \sqrt[2l]{2^l}, k=2l, l\in N \\ 0, k=2l-1, l\in N \end{cases}$, $\sqrt[2l]{2^l} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \underset{\sqrt[2l]{2^l}>0}{=} \lim_{l\to\infty} \sqrt[2l]{2^l} = \lim_{l\to\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

p) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\, x^k$.

***//S2.1.3**(1255)*

// Vor:Seien $(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus $\mathbb{R}$ mit $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} a$, $b_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} b$, $\alpha\in\mathbb{R}$

//Beh: 3.)$a_n\le c_n\le b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$ und $a=b \Rightarrow c_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} a$, $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} a$, $b_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} b=a$//

Lösung: $a_k=\sqrt{k}$, $1\le\sqrt[k]{|a_k|}$, $1\le\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{\underbrace{\sqrt{k}}_{monoton}}\le\sqrt[k]{k} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 1 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3} \sqrt[k]{|a_k|} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 1 \Rightarrow R=\dfrac{1}{\underbrace{\overline{\lim}}_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$ $=1$

o) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$

Lösung: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $a_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^l}{(2l)!}, & k=2l, l\in N\\ 0, & k=2l-1, l\in N\end{cases}$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[2l]{\left|\frac{(-1)^l}{(2l)!}\right|}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[2l]{\left|\frac{1}{(2l)!}\right|}=0, \text{ da } \sqrt[n]{n!} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \infty \Rightarrow R=\frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}}=+\infty$$

A3.5.2 Es sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gegeben mit $a_k\neq 0\ \forall\ k\ge k_0$

Beweise: Falls die Folge $\left(\dfrac{|a_k|}{|a_{k+1}|}\right)_{k=k_0}^{\infty}$ bestimmt divergiert, so ist der Konvergenzradius der Reihe gleich ∞.

Bew: $\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} \infty$: $\forall\ k\in\mathbb{R}_+\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ k>N\ \left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|>k$ also $|a_{k+1}|<1/k|a_k| \Rightarrow$

$|a_k|<(1/k)^{k-k_0}|a_{k_0}|\le(1/k)^k \star c$ $(c=|a_{k_0}|k^{k_0})$, $\sqrt[k]{|a_k|}\le 1/k\sqrt[k]{c}$,

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}\le 1/k\ \forall\ k\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=0 \Rightarrow R=\infty$