S3.5.5(2050) Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ & $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ haben KR R bzw ρ

1.)dann besitzen die „differenzierte" Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

und die „integrierte" Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)}(z-z_0)^{n+1}$ <u>denselben</u> KR R

//**A2.1.8**(1207) c)Beh: $\forall$ $p\in\mathbb{N}$ gilt $0 \le x_n=\sqrt[n]{n^p}-1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$//

Bew: $\sqrt[n]{n|a_n|}=\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}$, $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}} \underset{A2.1.8a)}{=} \frac{1}{1*\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$,

$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} \underset{A2.1.8a)}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}_{\to 1}\sqrt[n]{|a_n|}$, $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

2.)Mit $c_n:=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $\forall$ $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<\min\{R,\rho\}$:

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k)$ (Cauchy- Produkt),

wobei alle 3 Reihen absolut konvergieren.

Der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ ist daher $\ge\min\{R, \rho\}$

Bez:Die Folge (c_n) nennt man Faltung der Folgen (a_n) und (b_n)

*//**S3.2.12**(1782) Cauchy-Produktsatz//*

//Vor:Seien $(z_n),(w_n)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}|w_n|<\infty$.//

//Beh:Ordnet man alle Produkte z_jw_k, $j,k\in\mathbb{N}_0$ in einer Folge //
// $(P_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ an, so gilt//

// 1.) $\sum_{\ell=0}^{\infty}|P_\ell|=(\sum_{j=0}^{\infty}|z_j|)(\sum_{k=0}^{\infty}|w_k|)$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty}P_\ell=(\sum_{j=0}^{\infty}z_j)(\sum_{k=0}^{\infty}w_k)$//

// 2.)Speziell gilt//

// $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n}z_jw_{n-j})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n}z_j)(\sum_{k=0}^{n}w_k)=(\sum_{j=0}^{\infty}z_j)(\sum_{k=0}^{\infty}w_k)$.//

Bew: $|z-z_0|<\min\{R,\rho\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||z-z_0|^n<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n||z-z_0|^n<\infty \underset{S3.2.12}{\Rightarrow}$

$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu b_{n-\nu}(z-z_0)^{n-\nu}=$

$a_0(z-z_0)^0b_n(z-z_0)^n+a_1(z-z_0)^1b_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+a_2(z-z_0)^2b_{n-2}(z-z_0)^{n-2}+...$
$+a_n(z-z_0)^nb_0(z-z_0)^0=$

$(z-z_0)^n(a_0(z-z_0)^0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+...a_nb_0=$

$(z-z_0)^n\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} \underset{S3.2.12}{\Rightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\underbrace{\left(\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu b_{n-\nu}\right)}_{c_n}=(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n)(\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k)$

A3.5.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n \text{ für } k\in\mathbb{N}\text{(fest), } R=?$$

Lös:1.Möglichkeit:Wegen $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \underset{\alpha-n+1=(\alpha+1)-(n+1)+1}{=}$

$$\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\ldots((\alpha+1)-(n+1)+1)(n+1)}{(n+1)!(\alpha+1)} = \binom{\alpha+1}{n+1}\frac{n+1}{\alpha+1} \quad \forall\ \alpha\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{n+1+k-1}{n+1}} = \frac{\binom{n+1+k-1}{n+1}\frac{n+1}{n+k-1+1}}{\binom{n+1+k-1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+k} = \frac{1+1/n}{1+k/n} \underset{(n\to\infty)}{\to} \frac{1+0}{1+0} = 1 \underset{S3.5.4}{\Rightarrow} R=1$$

2.Möglkeit mit Hilfe des R der differenzierten Reihe,

Induktion nach k: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n$ hat R=1

//**A2.1.8**(1207) c)Beh: $\forall\ p\in\mathbb{N}$ gilt $0 \le x_n = \sqrt[n]{n^p} - 1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$//

k=1: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+1-1}{n}}_{1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ geometrische Reihe R=1

#k=2: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+1}{n}}_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ hat R=1 ($\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} = 1$, **A2.1.8 c)**)

$k\mapsto k+1$ $(k\ge 1)$: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k-1}{n}}_{a_n} z^n$ hat nach Induktionsvoraussetzung R=1 $\underset{S3.5.6\ 1.)}{\Rightarrow}$

Die differenzierte Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$

hat R=1.

Wegen $(n+1)\underbrace{a_{n+1}}_{\binom{n+k}{n+1}} = (n+1)\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots k}{(n+1)!} =$

$\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)}{n!}k = \binom{n+k}{n}k$ folgt

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1/k(n+1)a_{n+1}z^n$ hat R=1.

A3.5.4 Berechne den Konvergenzradius folgender Potenzreihen :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

//**S3.5.4** *(2003)* Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $a_n\neq 0\ \forall\ n\ge n_0$ (fast alle), $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

// Beh:In S3.5.2 gilt $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$//

Lös: $a_n = \frac{n^n}{n!} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e} \underset{S3.5.4}{\Rightarrow} R=\frac{1}{e}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\binom{2k}{k} z^{2k}$

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$ $\forall$ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$: 2.)* $\binom{n}{m} = \begin{cases} 0 \text{ falls } n < m \\ \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n \geq m \end{cases}$//

Lös: $a_n=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \underbrace{=}_{S1.7.4\,2.)} \frac{\frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!\,n!}}{\frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)2(n+1)} =$

$\frac{2n+2}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ besitzt Konvergenzradius 1 $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ konvergiert für $|z^2|<1$ und divergiert für $|z^2|>1 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ konvergiert für $|z|<1$ und divergiert für $|z|>1 \Rightarrow R=1$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2} z^k$

Lös: $a_n=(1+1/n)^{-n^2} \Rightarrow R=(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}=(\overline{\lim_{n\to\infty}}(1+1/n)^{-n})^{-1}=e$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\log k}{k}} z^{2k}$.

Lös: $a_n=n^{\frac{\log n}{n}}= \exp(\log (n^{\frac{\log n}{n}}))=\exp(\log n*\log (n^{\frac{1}{n}}))=\exp(\log n*\frac{1}{n}\log n)=$

$\exp(\frac{(\log n)^2}{n}) \Rightarrow (\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}=(\overline{\lim_{n\to\infty}} a^{1/n})^{-1}= (\overline{\lim_{n\to\infty}}\exp(\underbrace{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2}_{\to 0 (n\to\infty)}))^{-1}=1 \Rightarrow$

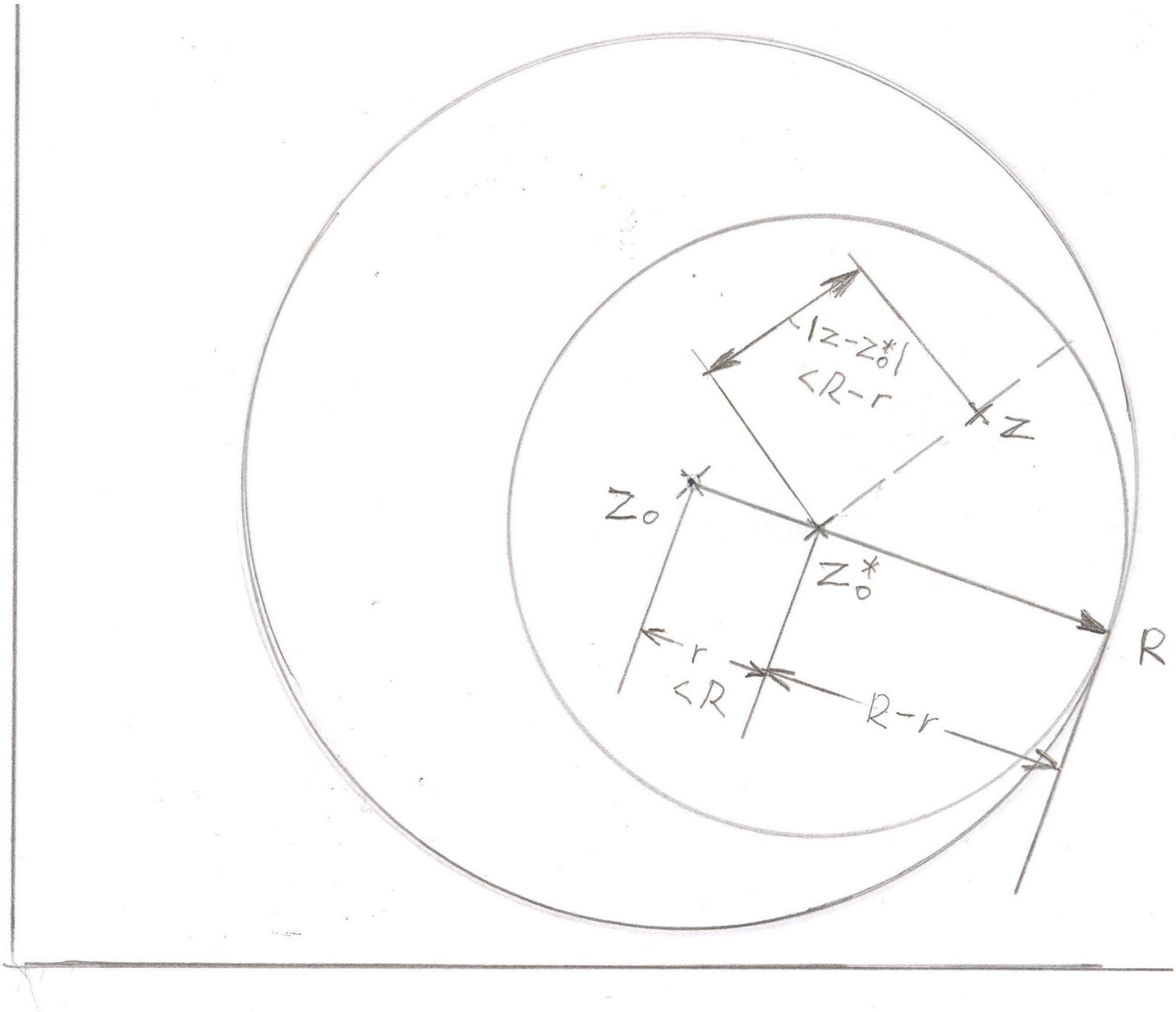
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ hat R=1 $\underbrace{\Rightarrow}_{b)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ hat R=1

*//**S2.3.20** (1452) 6.)(.) $1-1/x\leq\log x\leq x-1$ $\forall$ $x>0$.*

Beachte, dass $\frac{\log n}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, denn es gilt $\log n\leq n-1$,

$\nu=\frac{\log n}{n}=\frac{2\log\sqrt{n}}{n}\leq\frac{2(\sqrt{n}-1)}{n}\leq\frac{2(\sqrt{n})}{n}=\frac{2}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

S3.5.7(2053**)** (Umentwicklung einer PR)



Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR R>0. Sei z_0^* mit $|z_0-z_0^*|=r<R$ fest gewählt.

Beh: $\forall$ $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0^*|<R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^k$,

wobei $\forall$ $k\in\mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert

//Idenditäten(900):9.) $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$

*//**S3.2.10**(1775) Doppelreihensatz//*

//Vor:Seien $a_{jk}\in\mathbb{C}$ *für* $j,k\in\mathbb{N}_0$. $\exists$ $M\in\mathbb{R}$ *mit* $\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}|a_{jk}|\le M$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.*//*

//Beh:1.) $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{jk}|=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a_{jk}|=:A\in\mathbb{R}$.*//*

// 2.)Ordnet man alle a_{jk}, $j,k\in\mathbb{N}_0$, *in einer Folge* $(b_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ *an, so gilt//*

// $\sum_{l=0}^{\infty}|b_\ell|=A$ *und* $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}$.*//*

// Speziell gilt $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k,k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_{j,k}=\sum_{\ell 1=0}^{\infty} b_\ell$.*//*

*///**S1.7.4** (906) 6.)* $\forall$ $a,b,z\in\mathbb{C}$ $n\in\mathbb{N}_0$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$,

Bew:Mit **S3.2.10** Zunächst Prüfung der Vor für **S3.2.10**

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(\underbrace{z-z_0^*}_{a<R}+\underbrace{z_0^*-z_0}_{b<R})^\nu \underset{S1.7.4\,6.)}{=} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(z-z_0^*)^k(z_0^*-z_0)^{\nu-k} \underset{0\le k\le\nu\le n}{=}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k}^{n}\binom{\nu}{k}a_\nu(z-z_0^*)^k(z_0^*-z_0)^{\nu-k}\Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k}^{n}\binom{\nu}{k}|a_\nu||z-z_0^*|^k|z_0^*-z_0|^{\nu-k}=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}|a_\nu||z-z_0^*|^k|z_0^*-z_0|^{\nu-k}=$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|(\underbrace{|z-z_0^*|}_{<R-r}+\underbrace{|z_0^*-z_0|}_{r})^\nu\le\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|(\underbrace{|z-z_0^*|+|z_0^*-z_0|}_{<R})^\nu=:M<\infty$$

Damit Vor Doppelreihensatz **3.2.10** erfüllt

Wende **S3.2.10** an auf $a_{\nu k}:=\binom{\nu}{k}a_\nu(z-z_0^*)^k(z_0^*-z_0)^{\nu-k}$,

$k=0,\dots,n$; $\nu=k,k+1,\dots,n$; $a_{\nu k}:=0$ für $k=0,\dots,n$; $\nu=0,\dots,k-1$ $\underset{S3.2.10}{\Rightarrow}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z-z_0)^\nu=\#\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k}^{n}\binom{\nu}{k}a_\nu(z-z_0^*)^k(z_0^*-z_0)^{\nu-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0^*)^k\sum_{\nu=k}^{n}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0^*)^kb_k$$

A3.5.5 Entwickle $\frac{1}{1-z}$ in eine Potenzreihe um -½ auf folgende zwei Arten:

a) Entwickle $\frac{1}{1-z}$ zuerst um den Punkt 0 und wende **S3.5.7** an.

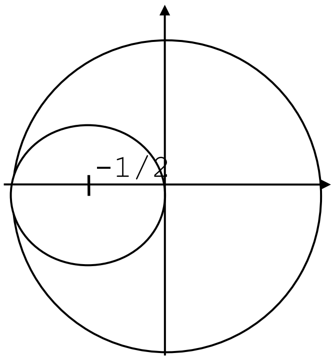
*//**S2.1.2**(1250) Vor: (z_n), z aus $\mathbb{C}$.//*

//Beh: 13.) Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in\mathbb{N}_0$ mit $z\in U_1(0)$ gilt $z_n \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} \frac{1}{1-\underbrace{z}_{\neq 1}}$, geom Reihe//

//**A3.2.22** (1789) Beweise für $x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$ und $k\in\mathbb{N}_0$: $\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n$//

*//**S1.7.4** (906) $n,m\in\mathbb{N}_0$: 3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$ falls $n\geq m$*

Lös: $\frac{1}{1-z} \underbrace{=}_{S2.1.2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{1}_{a_n} z^n$ für $|z|<1=:R$



Sei $z_0^*=-1/2$, $z_0=0 \Rightarrow r:=|z_0-z_0^*|=1/2<R \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.7}$

Für $|z-\underbrace{(-1/2)}_{z_0^*}|<\underbrace{R-r}_{=1/2}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-\underbrace{z_0^*}_{(-1/2)})^k \text{ mit}$$

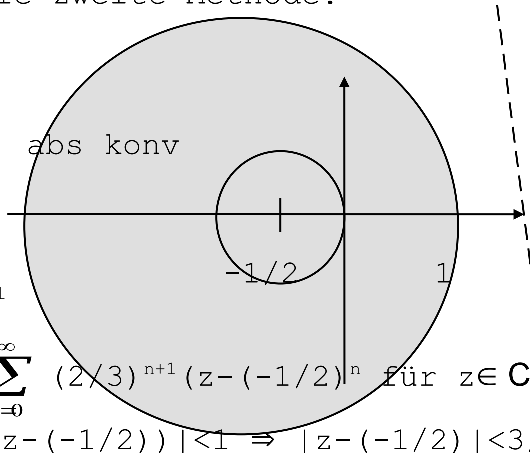
$$b_k=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}\underbrace{1}_{a_\nu}(\underbrace{(-1/2)}_{z_0^*}-\underbrace{0}_{z_0})^{\nu-k}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\underbrace{\binom{\nu+k}{k}}_{\underset{S1.7.4\ 3.)}{=}\binom{\nu+k}{\nu}}(-1/2)^{\nu}$$

$$\underbrace{=}_{A3.2.22,\ |-1/2|<1}\frac{1}{(1-(-1/2))^{k+1}}=(2/3)^{k+1},\ \forall\ k\in\mathbb{N}_0, \text{ also}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\sum_{k=0}^{\infty}(2/3)^{k+1}(z-(-1/2))^k \text{ für } |z-(-1/2)|<1/2$$

b) Forme $\frac{1}{1-z}$ um, sodass man direkt die geometrische Reihe anwenden kann, um die Potenzreihe um -1/2 zu erhalten. Welchen Vorteil hat hier die zweite Methode?

Lös: $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{\frac{3}{2}-(z-\underbrace{(-1/2)}_{z_0^*})}=$



$$\frac{1}{\frac{3}{2}(1-\frac{2}{3}(z-(-1/2)))}\underbrace{=}_{\left|\frac{2}{3}(z-(-1/2)\right|<1}$$

$$\frac{1}{3/2}\sum_{n=0}^{\infty}(2/3^{n+1}(z-(-1/2)))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^{n+1}(z-(-1/2))^n \text{ für } z\in\mathbb{C},$$

#$|2/3(z-(-1/2))|<1 \Rightarrow 2/3|(z-(-1/2))|<1 \Rightarrow |z-(-1/2)|<3/2$

Vorteil: größeres Konvergenzgebiet, sogar max Konvergenzgebiet R=3/2

S3.5.8(2056) (Abelscher Grenzwertsatz)

Vor:Die PR $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ habe KR 1 & $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beh: $\forall$ Folgen $(x_n) \subset (1,-1) \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\nearrow} 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

//S1.2.1 (406) Vor: K angeordnet, a,b∈K//
//● 6.)|a+b|≤|a|+|b| (Dreiecksungleichung) //

Bew: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_n)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} a_k (x_n)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $A_k := \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \underbrace{\to}_{k\to\infty} A$, $0<x<1$

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} A_k x^k = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=0}^{n} A_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k - \sum_{k=1}^{n+1} A_{k-1} x^k =$$

$$\underbrace{A_0}_{a_0 x^0} + \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{A_k - A_{k-1}}_{a_k}) x^k - A_n x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \underbrace{A_n}_{A(n\to\infty)} \underbrace{x^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1, \ \forall\ 0<x<1,$$

$$A\sum_{k=0}^{\infty} x^k = A\frac{1}{1-x}, \quad A(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} A x^k = A * 1 = A \ \forall\ 0<x<1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k - A(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} (A_k - A) x^k$$

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $|A_k - A| < \varepsilon/2\ \forall\ k \geq k_0(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A\right| \underbrace{=}_{0<x<1} (1-x)\left|\sum_{k=0}^{\infty} (A_k - A) x^k\right| \underset{S1.2.1}{\leq}$$

$$(1-x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} |A_k - A| x^k}_{\leq \sum_{k=0}^{n_0} |A_k - A| = k(\varepsilon)} + (1-x)\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \underbrace{|A_k - A|}_{<\varepsilon/2} x^k \leq$$

$$(1-x)k(\varepsilon) + \varepsilon/2\,(1-x) \underbrace{\underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{k} x^k}_{0\to \text{vergrößert}}}_{\frac{1}{1-x}} \leq \underbrace{(1-x)k(\varepsilon)}_{<\varepsilon/2\ \forall x: (1-\underbrace{x}_{\to 1}) < \frac{\varepsilon}{2k(\varepsilon)}} + \varepsilon/2 < \varepsilon$$

//**S3.5.6**(2050)Vor:Die PRen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ haben KR R bzw ρ//

// 2.)Mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, n\in\mathbb{N}_0$ gilt $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \min\{R,\rho\}$://

// $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = (\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k)$ (Cauchy- Produkt),//

// wobei alle 3 Reihen absolut konvergieren

// Der KR von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ist daher $\leq \min\{R, \rho\}$//

Bem:S3.5.6 2.)$\Rightarrow \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (\sum_{j=0}^{\infty} 1 * z^j)(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)$ # $\underbrace{=}_{S3.5.6\,2.)} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} 1 * a_{n-k} z^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1 * a_{n-k} \ \#= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1 * a_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \text{ für } |z|<1.$$

Andere Formulierung:

Seien $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Dann

konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \forall\ x \in (-1,1]$ (Konvergenzradius 1), und es

gilt $\lim_{x\to 1_-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

//**S3.5.4** *(2003)* Vor: Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $a_n \neq 0\ \forall\ n \geq n_0$ (fast alle), $\exists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$//

// Beh: In S3.5.2 gilt $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$//

*//**S2.1.2** (1250) Vor: $(z_n) \in C$ konv mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, $z \in C$.*

//13.) Für $z_n = \sum_{k=0}^{n} z^n$, $n \in N_0$ mit $z \in U_1(0)$ gilt $z_n \to \frac{1}{1-\underbrace{z}_{\neq 1}}$ $(n\to\infty)$, geom Reihe//

Bew: S3.5.6 2.) Kurzform

$\forall z \in \mathbb{C}, |z-z_0| < \min\{R,\rho\}: \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n =$

$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k\right)$, $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, n \in \mathbb{N}_0$

konvergieren absolut. KR $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \leq \min\{R, \rho\}$

Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_{n+1} < a_n \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4}$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hat Konvergenzradius $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \underbrace{\geq}_{a_{n+1}<a_n} 1 \Rightarrow R \geq 1$

Mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.6\ 2.)}$

$$\frac{f(x)}{1-x} \underbrace{=}_{S2.1.2\ 13.),\ |x|<1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k}_{a_k} x^k\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{1}_{b_k} * x^n\right) \underbrace{=}_{*} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{c_k} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(A - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) =$$

$$\frac{a}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Rightarrow$$

$$* = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =, \ldots \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j * 1 = \sum_{j=0}^{k} a_j.$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| \underbrace{=}_{0<x<1} (1-x) \left|\sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right| \leq (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right| \quad (a_k \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 0),$$

Reihenrest $|r_k| < \varepsilon\ \forall\ k \geq N \Rightarrow |f(x) - A| \leq (1-x)\left(\sum_{k=0}^{N-1} x^k r_k + \varepsilon \underbrace{\sum_{k=N}^{\infty} x^k}_{x^N \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{\frac{1}{1-x}}}\right)$

$$= \underbrace{(1-x)}_{\text{klein:}x\to 1}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x^k r_k}_{\text{feste Zahl}} + \underbrace{\varepsilon \underbrace{x^N}_{x\to 1}}_{\to 0} \frac{1}{1-x}\Big) = \underbrace{(1-x)}_{\text{klein:}x\to 1} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x^k r_k}_{\text{feste Zahl}} + \underbrace{\varepsilon \underbrace{x^N}_{x\to 1}}_{\to 0} \to \varepsilon\ (x \to 1_-)$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1} x^k r_k\right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} x^k |r_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |r_k|$$

Die Reihenreste $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ bilden nach S3.1.2 4.)eine Nullfolge. Also gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ derart, dass $|r_n|<\varepsilon$ ist für $n\geq n_0$. Daher folgt für $0<x<1$:

$$|f(x)-A| \leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{n_0-1} x^n r_n\right| + \varepsilon\,(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = (1-x)\left|\sum_{n=0}^{n_0-1} x^n r_n\right| + \varepsilon\, x^{n_0}$$

In dieser Abschätzung geht die rechte Seite für $x\to 1_-$ gegen ε und daher folgt $|f(x)-A|<2\varepsilon$, wenn x dicht genug bei 1 ist $\Rightarrow$ Beh.

A3.5.6 Bestimme den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Hinweis: Benutze dabei $\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Lös: Abelscher Grenzwertsatz: $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\in\mathbb{R}$,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert da alternierende harmonische Reihe.

Dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)x^n$ konvergent $\forall\ x\in(-1,1]$ und

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ hier } \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)x^n=\lim_{x\to 1^-} 1/x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=$$

$$\lim_{x\to 1^-} 1/x\log(1+x) \underset{\text{log stetig, } 1/x \text{ stetig}}{=} 1*\log 2=\log 2$$

-+*

A3.5.7 Konvergenzradien?

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{2}\pi k) x^k$.

*//**S3.5.2**(2001)Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ∃ genau eine Zahl R mit*

// $0 \le R \le \infty$, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der

// Eigenschaft:

$$// \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut } \forall z \in C \text{ mit } |z-z_0| < R \\ \text{divergiert} \qquad \forall z \in C \text{ mit } |z-z_0| > R \end{cases}$$

// Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard),

// wobei $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$

Lös: a_k ...$\sin(0), (\frac{1}{2}\pi)$, $\sin(\pi), \sin(\frac{3}{2}\pi)\ldots = 0,1,0,-1,0,1,0,-1....$

-1,0,1 werden ∞ oft angenommen. -1,0,1 einzige HW der Folge der $a_k \Rightarrow$

$\overline{\lim_{k\to\infty}} = 1$, $\underline{\lim_{k\to\infty}} = -1 \underset{S3.5.2}{\Rightarrow} \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \underset{\sqrt[k]{|-1|}=\sqrt[k]{|1|}=1}{=} 1 \Rightarrow R=1$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3k * x^{3k}$.

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} 3k * x^{3k} = \sum_{k=1,\, j=3k}^{\infty} j * x^j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j * x^j$ mit $(b_j) = 0,0,1,0,0,1,0,0,1...$ $\underset{S3.5.2}{\Rightarrow} \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|b_k|} = 1 \Rightarrow$

R=1

c) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\varphi(k)}$ mit $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv

*//**S2.2.1**(1301)*

//Vor:Sei z_n konvergent mit $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z$

//Beh:Jede (.)Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n), (.) Umordnung und (..)triviale

// Abänderung ist konvergent mit $z_{v_n} \underset{n\to\infty}{\to} z$

Lös: Sei $|x|<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ absolut konvergent $\underset{S2.2.1}{\Rightarrow}$

$|x|<1$: $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ konvergent nach beliebiger Umordnung mit φ

$x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty} x^{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1^{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ divergent, unabhängi g von $\varphi \Rightarrow R=1$

A3.5.8 Vorgabe: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ mit R.

a) R nach Änderung endlich vieler a_k?

Lös: R′ von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ mit $a_k' = a_k$ für fast alle k ⇒ $M=\{k \mid a_k' \neq a_k\}$ ist endlich

Folge $d_k = a_k' - a_k$ ⇒ d_k fast überall 0.

Sei $R \in [0,\infty]$ von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ (d.h. konvergent $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x<R$) ⇒

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + \underbrace{\sum d_k x^k}_{endlicc\ h\ \Rightarrow\ konvergent} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k+d_k) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k \text{ ist konvergent } \forall\ |x|<R.$$

Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x|>R$. Annahme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ konvergent ⇒

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' - d_k) x^k$ konvergent ⇒

Widerspruch zu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für $|x|<R$ ⇒

$|x|<R \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ konvergent & $|x|>R \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k' x^k$ divergent

b) R nach Streichen der Hälfte der a_k, d.h. $a_k' = a_{2k}$.

Lös: Bsp $(a_k) = 1,0,1,0,1,0,\ldots$ ⇒

$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \Rightarrow R=1$ für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^k = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow R=\infty$ für $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^k$.

c) (b_k) ist Nullfolge. R für $a_k' = a_k + b_k$

Lös: Bsp $a_k = 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$ d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0$ $b_k = \frac{1}{k}$ ⇒

$R=\infty$ für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $R=1$ für da $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k+b_k) x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ divergent für $x=1$

d) R nach $a_k' = c * a_k$.

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergent ⇔ $\sum_{k=1}^{\infty} c * a_k x^k$ konvergent ⇒ R bleibt

e) R nach $a_k' = a_k^2$

Lös: Sei $a_k = c^{-k}$, $c \neq 0 \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c^{-k}|} = c^{-1} \Rightarrow R=c$

$a_k' = c^{-2k} \Rightarrow R' = 2R$