3.6(2100) **Spezielle Potenzreihen und Funktionen**

Sachverhalte von S3.6.1 bis D3.6.1 werden teilweise ab D3.6.2 noch einmal entwickelt, jedoch aus etwas anderer Definitionsgrundlage.

S3.6.1(2100) Eigenschaften der komplexen Expotentialfunktion

1.) $\forall\ z\in\mathbb{C}$ gilt $\exp(z)=e^z=\lim\limits_{n\to\infty}(1+z/n)^n=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}$.

//**S1.7.4**(906) Für $\alpha\in\mathbb{C}$ und $n,m,k\in\mathbb{N}_0$ $j\in\mathbb{N}$ gilt

//6.) Aus 1.) $\Rightarrow$ Binominalsatz. $\forall\ a,b,z\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}_0$ gilt

// $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$

//**S3.5.2**(2001)Zu jeder Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ $\exists$ genau eine Zahl R mit

// $0\le R\le\infty$, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der Eigenschaft:

// $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\begin{cases}\textit{konvergiert absolut}\ \forall z\in C\ \textit{mit}\ |z-z_0|<R\\ \textit{divergiert}\qquad\qquad \forall z\in C\ \textit{mit}\ |z-z_0|>R\end{cases}$

// Ferner gilt $R=1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard),

// wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$

//**S3.5.4***(2003)* Vor:Sei$(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $a_n\neq0\ \forall\ n\ge n_0$ (fast alle), $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$//

// Beh:In S3.5.2 gilt $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$//

Bew: $\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{z^\nu}{\nu!}-(1+z/n)^n\underbrace{=}_{\text{S1.7.4 6.)}}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{z^\nu}{\nu!}-\sum\limits_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{z^\nu}{n^\nu}1^{n-\nu}=S_n$.

$\binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(\nu-1))}{\nu!\,n^\nu}=\frac{1}{\nu!}(1-1/n)(1-2/n)..(1-\frac{\nu-1}{n})\Rightarrow$

$S_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}(1-(1-1/n))(1-2/n)..(1-\frac{\nu-1}{n}))z^\nu$, (Klammerausdr $\in(0,1)$)

Mit S3.5.4 Prüfung: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}$ abs konvergent?

$\forall\ z\in\mathbb{C}$, $\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|=\frac{(\nu+1)!}{\nu!}=\nu+1\underbrace{\rightarrow}_{\nu\to\infty}\infty\underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.4}R=\infty$

Wert? Falls $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n|=0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$

Wähle $k>0$, k fest: $|z|\le k\Rightarrow\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{|z|^\nu}{\nu!}\le\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{k^\nu}{\nu!}<\infty\Rightarrow$

Zu $\varepsilon/2\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{\infty}\frac{k^\nu}{\nu!}<\varepsilon/2\ \forall\ n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow$

$S_\infty=|S_{n_0}|+\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\underbrace{(1-(1/n)...(1-\frac{\nu-1}{n}))}_{\le1}\underbrace{|z|}_{\le k}{}^\nu\le|S_{n_0}|+\underbrace{\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{\infty}\frac{k^\nu}{\nu!}}_{<\varepsilon/2}$,

$|S_n|\le\underbrace{\sum\limits_{\nu=0}^{n_0}\frac{1}{\nu!}\overbrace{(1-(1-1/n)...(1-\frac{\nu-1}{n}))k^\nu}^{\to0(n_0\to\infty)}}_{<\varepsilon/2\ \forall n\ge n_1(\varepsilon)\ge n_{0(\varepsilon)}}+\varepsilon/2\Rightarrow|S_n|<\varepsilon\ \ \forall\ n\ge n_1(\varepsilon)$

2.) $\forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ (Additionstheorem, Funktionalgleichung)

*//**S3.2.12**(1782) Vor:Seien $(z_n),(w_n)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}|w_n|<\infty$.//*

//Beh: 2.) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}z_jw_{n-j}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}z_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n}w_k\right)=\left(\sum_{j=0}^{\infty}z_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}w_k\right)$.//

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in\mathbb{C}$ ˅ n,m://*

$$//\ 2.)\binom{n}{m}=\begin{cases}0 \text{ falls } n<m\\ \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n\geq m\end{cases}//$$

//6.) $\forall\ a,b,z\in\mathbb{C}$ ˅ $n\in\mathbb{N}_0:(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$//

Bew: $e^{z_1}*e^{z_2}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z_1^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_2^j}{k!}\right)\underset{S3.2.12.)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z_1^j}{j!}\frac{z_2^{n-j}}{(n-j)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}z_1^j$
$z_2^{n-j}\underset{S1.7.4\,2.)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z_1^jz_2^{n-j}\underset{S1.7.4\ 6.)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n=e^{z_1+z_2}$

Andere Formulierung:
$\forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$: $\exp(z_1+z_1)=\exp(z_1)\exp(z_2)$

Bew: $\exp(z_1+z_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z_1^jz_2^{n-j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z_1^j}{j!}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{z_2^{n-j}}{(n-j)!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z_1^j}{j!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{(n-j)!}$
$=\exp(z_1)\exp(z_2)$

3.) $\overline{(e^z)}=e^{\bar z}$, $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\ z}$, $e^z\neq0$, $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$ $\forall\ z\in\mathbb{C}$.

//(801)Eigenschaften der komplexen Zahlen//

//Für $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt//

//1.)Re $z=1/2(z+\bar z)$ *3.) $\bar{\bar z}=z$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ mit $z_2\neq0$, $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$*

//**S1.6.2**(802) Vor.: Sei $z\in\mathbb{C}$ 1.)$|z|=\sqrt{z\cdot\bar z}$ //

Bew: $\overline{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{z^\nu}{\nu!}}\underset{S1.7.4\ 3.)}{=}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\bar z)^\nu}{\nu!}\Rightarrow\overline{(e^z)}=e^{\bar z}$,

$|e^z|^2\underset{S1.6.2\ 1.)}{=}(e^z)\overline{(e^z)}=e^ze^{\bar z}\underset{2.)}{=}e^{z+\bar z}=e^{2\mathrm{Re}\ z}=(e^{\mathrm{Re}\ z})^2\Rightarrow$

$|e^z|=e^{\mathrm{Re}\ z}$

$e^ze^{-z}=e^{z-z}=e^0=1\neq0\Rightarrow e^{-z}=\frac{1}{e^z}$

4.)$|e^z|=1\underset{3.)}{\Leftrightarrow}$ Re $z=0$

Bew:$|e^z|=e^{\mathrm{Re}\ z}\underset{!!}{\Leftrightarrow}$ Re $z=0$, d.h. $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ ist $|e^{i\alpha}|=1$!

$z=\underset{=\mathrm{Re}\,z}{0}+i\alpha\Rightarrow e^{\mathrm{Re}\ z}=e^0=1=|e^z|=|e^{0+i\alpha}|=|e^{i\alpha}|\Rightarrow|e^{i\alpha}|=1$!

5.) $\forall\ n\in\mathbb{N}$ und $\forall\ x\in\mathbb{R}$ ist $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$, $\exp(x/n)=\sqrt[n]{\exp(x)}$

$(e^{\frac{x}{n}})^n=e^x$, $(\exp(\frac{x}{n}))^n=\exp x$

//**D1.9.4**(1156)//
// (.) Sei eine natürliche Zahl $n\geq 2$ gegeben. Nach//
// Vorstehendem schließen wir, dass die Umkehrfunktion von //
// $x\mapsto x^n$ auf $[0, \infty)$ definiert ist. Wir nennen sie die nte //
// Wurzelfunktion und schreiben auch $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ für die nte Wurzel//
// einer Zahl $x\geq 0$. Diese Definition stimmt für $n=2$ mit der //
// früheren Quadratwurzel überein.//

//#(..) $a>0$, $r=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $a^r:=\sqrt[q]{a^p}$, $a^{-r}:=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ //

Bew: Die erste Gleichung folgt induktiv aus der Funktionalgleichung, die 2. folgt dann aus der Def der nten Wurzel.

$\exp(\frac{n}{m})=(\exp(\frac{1}{m}))^n=(\sqrt[m]{e})^n=e^{\frac{n}{m}}$

S3.6.2(2103)

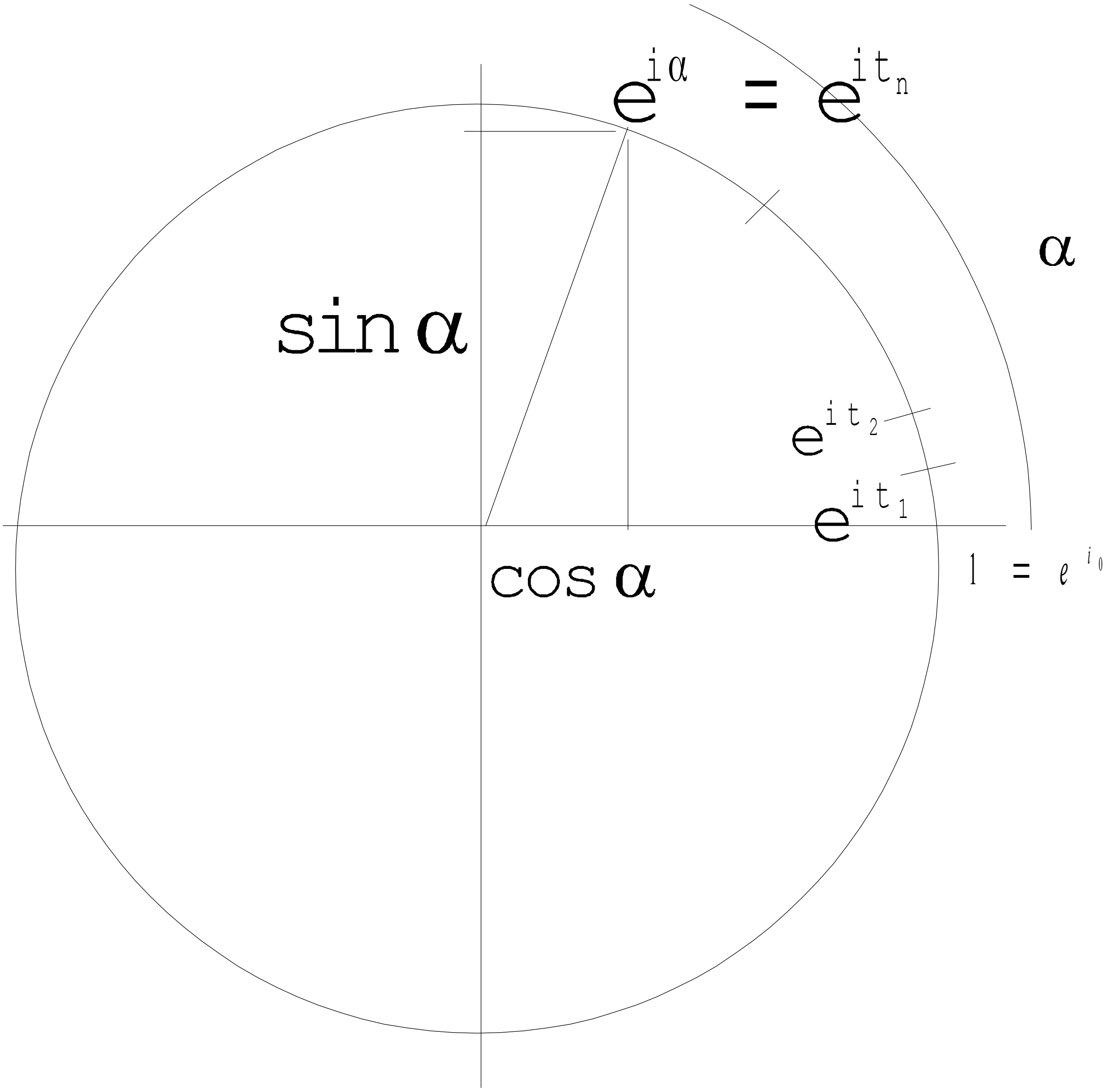
Vor:Sei $\alpha\in R$, $\alpha>0$ und der Kreisbogen C_α: Summe der $e^{i\Delta t}$, $e^{it}\neq e^{i\alpha}$ $\forall$ $0\leq t\leq\alpha$.

$\forall$ $n\in N$ sei Z_n:$0=t_0<t_1...<t_n=\alpha$ mit $\Delta t_\nu:=t_\nu-t_{\nu-1}=\alpha/n$ für

$\nu=1,2,..n$, eine Zerlegung von $[0,\alpha]$ und $L(Z_n):=\sum_{\nu=0}^{n}|e^{it_\nu}-e^{it_{\nu-1}}|$.

Beh:$\exists$ $L_\alpha:=\lim_{n\to\infty}L(Z_n)$ und es gilt $L_\alpha=\alpha$. # $\overset{e}{Z}=e^{i\alpha}=e^{iL_\alpha}$ #

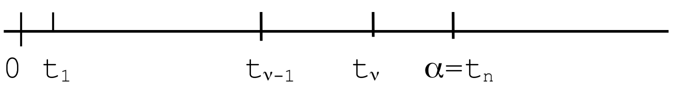
#Zahlreiche eigene Hinzufügungen zu unvollständiger Mitschrift
#Für $e^{i\alpha}$ ist nach **S3.6.1** 4.) $|e^{i\alpha}|=1$ $\Rightarrow$ $\forall$ $\alpha\in R$ ist $e^{i\alpha}$ in der grafischen
#Darstellung ein Punkt des Kreises um (0,0)mit Radius 1, d.h. Beh sagt,
#dass α=Bogenlänge linksläufig von(1,0) bis $e^{i\alpha}$



gleichschenkliges Dreieck $\underset{n\to\infty}{\rightleftarrows}$ Kreissektor

Δt_ν

$e^{i\alpha}=\mathrm{Re}\ e^{i\alpha}+i(\mathrm{Im}\ e^{i\alpha})$, $Z_n=0=t_0<t_1<t_2<...t_{\nu-1}<t_\nu<...<t_n=\alpha$



$\Delta_\nu=t_\nu-t_{\nu-1}=\alpha/n$, $\nu=1,2,...k$. $L(Z_n)=\sum_{\nu=1}^{n}$

$|e^{it_\nu}-e^{it_{\nu-1}}|=\sum_{\nu=1}^{n}|\underbrace{e^{it_{\nu-1}}}_{1}|\left|e^{i\nabla_\nu}-1\right|=\sum_{\nu=1}^{n}\left|e^{i\nabla_\nu}-1\right|$.

Wo liegen e^{it_ν}, ν=0,1,...,n. Abstände gleich groß gewählt.

*//**S2.3.18**(1409) 4.)(1408)* $|(1+z/n)^n-1-z|\le 1/2|z|^2 e^{|z|}\ \forall\ z\in C,\ n>2$//

//# $\lim\limits_{n\to\infty}|(1+z/n)^n-1-z|\le 1/2|z|^2 e^{|z|}\ \forall\ z\in C,\ n>2$//

//9.) $|e^z|=1 \Leftrightarrow Re(z)=0$//

Bew: $|e^z|=1 \underset{S2.3.18\ 9.)}{\Leftrightarrow} Re\ z=0 \Leftrightarrow z=i\alpha,\ e^{j\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad \underbrace{0\le t\le\alpha : e^{it}\ne e^{i\alpha}}_{\text{nochnicht zB 5mal durchlaufen, linksdrehend}}$,

$1=e^{i0}$, $Re\ e^{i\alpha}=\cos\alpha$, $Im\ e^{i\alpha}=\sin\alpha$, Bogen hat die Länge α

$0\le t\le t^*\le\alpha$ #$0\le t \underset{!}{<} t^*\le\alpha$# $\Rightarrow e^{it}\ne e^{it^*}$.

Annahme $\exists\ t<t^*$, #$0\le t<t^*\le\alpha$# mit $e^{it}=e^{it^*} \Rightarrow 0\le \underbrace{t}_{\ge 0} \underbrace{-t^*+\alpha}_{\ge 0} <\alpha\ (t-t^*<0)$

$\Rightarrow\ e^{i(t-t^*+\alpha)}=e^{i(t-t^*)}e^{i\alpha} \wedge e^{it}=e^{it^*} \Rightarrow e^{i(t-t^*)}=1 \Rightarrow e^{i(t-t^*+\alpha)}=1\cdot e^{i\alpha} \Rightarrow$

$t-t^*=0$ Widerspruch zur Annahme

$|e^{it_\nu}-e^{it_{\nu-1}}|=|e^{it_{\nu-1}}(e^{i(t_\nu-t_{\nu-1})}-1)|=|e^{i\nabla_\nu}-1|=|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1|,\ \nu=1,2,..n$

$\sum\limits_{\nu=1}^{n}|e^{it_\nu}-e^{it_{\nu-1}}|=n|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1|,$

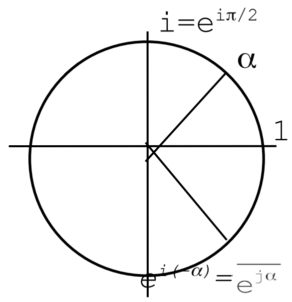
$$|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1|=\underbrace{\left|\underbrace{e^{i\frac{\alpha}{n}}-1-i\frac{\alpha}{n}}_{a}+\underbrace{i\frac{\alpha}{n}}_{b}\right|}_{\ge|b|-|a|}\ \begin{matrix}\le|i\frac{\alpha}{n}|+|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1-i\frac{\alpha}{n}|\le\frac{\alpha}{n}+\overbrace{\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}e^{\frac{\alpha}{n}}}^{S2.3.18\ 9.)}\\ \ge|i\frac{\alpha}{n}|-|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1-i\frac{\alpha}{n}|\ge\frac{\alpha}{n}-\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}e^{\frac{\alpha}{n}}}_{S2.3.18\ 9.)}\end{matrix}\ \Rightarrow$$

Abschätzung nach oben/unten $n|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1|\ \begin{matrix}\le\alpha+\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n}e^{\frac{\alpha}{n}}\\ \ge\alpha-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n}e^{\frac{\alpha}{n}}\end{matrix}\ \Rightarrow n|e^{i\frac{\alpha}{n}}-1|\underset{n\to\infty}{\to}\alpha$

$\Rightarrow$ # $\overset{e}{z}=e^{i\alpha}=e^{iL_\alpha}$ #

D3.6.1(2104)Sei 2π der Umfang des Einheitskreises. Dann heißt $\alpha\in(-\pi,\pi]$ der Bogenmaß-Winkel des Kreisbogens von 1 nach $e^{i\alpha}$ auf dem Einheitskreis. Wegen $e^{i(\alpha+k2\pi)}=e^{i\alpha}\quad\forall\ k\in Z$ sei α geradlinig von $(-\pi,\pi]$ auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Bem:In D3.6.1 wird bei $\alpha>0$ der Einheitskreis von 1 bis $e^{i\alpha}$ entgegen dem Uhrzeigersinn (Math pos)durchlaufen. $e^{i\alpha}=Re\ e^{i\alpha}+Im\ e^{i\alpha}$
Länge Bogenmaß entspricht Winkel



D3.6.2(2105)

1.) $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ sei

$\cos\alpha := \text{Re } e^{i\alpha} = 1/2(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})$ und $\sin\alpha := \text{Im } e^{i\alpha} = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$.

//(801) Eigenschaften der komplexen Zahlen//

//Für $z, z_1, z_2 \in C$ gilt//

//1.) $\text{Re } z = 1/2(z+\bar{z})$ $\text{Im } z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$//

Bem: Mit Rechenregeln für komplexe Zahlen folgt für $x\in\mathbb{R}$:

1.) $e^{ix} = \cos x + i*\sin x$

Bew: $\cos x + i*\sin x = 1/2(e^{ix}+e^{-ix}) + i\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) = e^{ix}$

2.) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3.) $|\cos x|, |\sin x| \le 1$ (#d.h. $f(x)=\sin x$ bzw $\cos x$: $\mathbb{R}\mapsto[-1,+1]$)

und $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2.) Allgemeiner sei $\forall\ z\in\mathbb{C}$

● $\cos z := 1/2(e^{iz}+e^{-iz})$ und $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$

Andere Formulierung

● ● $\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} -,+..$

$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} -,+...$

Bem: (.) Beide Potenzreihen konvergieren absolut $\forall\ z\in\mathbb{C}$ ...

Für sin: $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 0, n\,ungeade \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, n\,ungerade \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \rho = \frac{1}{0} = \infty$, ...ähnlich für cos

(..) $\begin{cases} \cos x \in R \\ \sin x \in R \end{cases} \forall\ x\in \mathbb{R}_+$

Verbindung ● ⇔ ● ● siehe S3.6.3 2.) Gleichungen ⊗

3.) $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $\cos z \neq 0$ sei $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ (tangens z)

$\forall\ z\in C$ mit $\sin z\neq 0$ sei $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ (cotangens z)

D3.6.4(2105) Hyperbolische Funktionen

$\cosh z := 1/2(e^z+e^{-z})$ $\forall\ z\in\mathbb{C}$ (Cosinus hyperbolicus)

$\sinh z := 1/2(e^z-e^{-z})$ $\forall\ z\in\mathbb{C}$ (Sinus hyperbolicus)

$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$, $\cosh z\neq 0$ (Tangens hyperbolicus)

$\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$, $\cosh z\neq 0$ (Cotangens hyperbolicus)

S3.6.3(2106)Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen
$\forall$ $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1.) $\cos z = \cosh(iz)$, $\sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz)$, $e^z = \cosh z + \sinh z$

*//**D3.6.2**(2103) 1.) $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\sin \alpha := \mathrm{Im}\, e^{i\alpha} = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$.//*

Bew: $\sinh iz = 1/2(e^{iz} - e^{-iz}) = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \underset{D3.6.2\,1.)}{=} i*\sin z$ usw

2.) $\cosh z = \cosh(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion.

$\sinh z = -\sinh(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion

KR $R=\infty$

Bew:A3.6.4 2.)

3.) $\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$ (Additionstheoreme)
$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
speziell: $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

Bew:A3.6.4 3.)

4.)Auf $\mathbb{R}$ gilt: $\cosh x \neq 0$, $\sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bew: $\cosh x = 1 + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}}_{\geq 0\ auf\ R}$, $\sinh x = x(1 + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu+1)!}}_{\geq 0\ auf\ R}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Sonst Bew wie oben, siehe auch A3.6.4….cosh 0=1

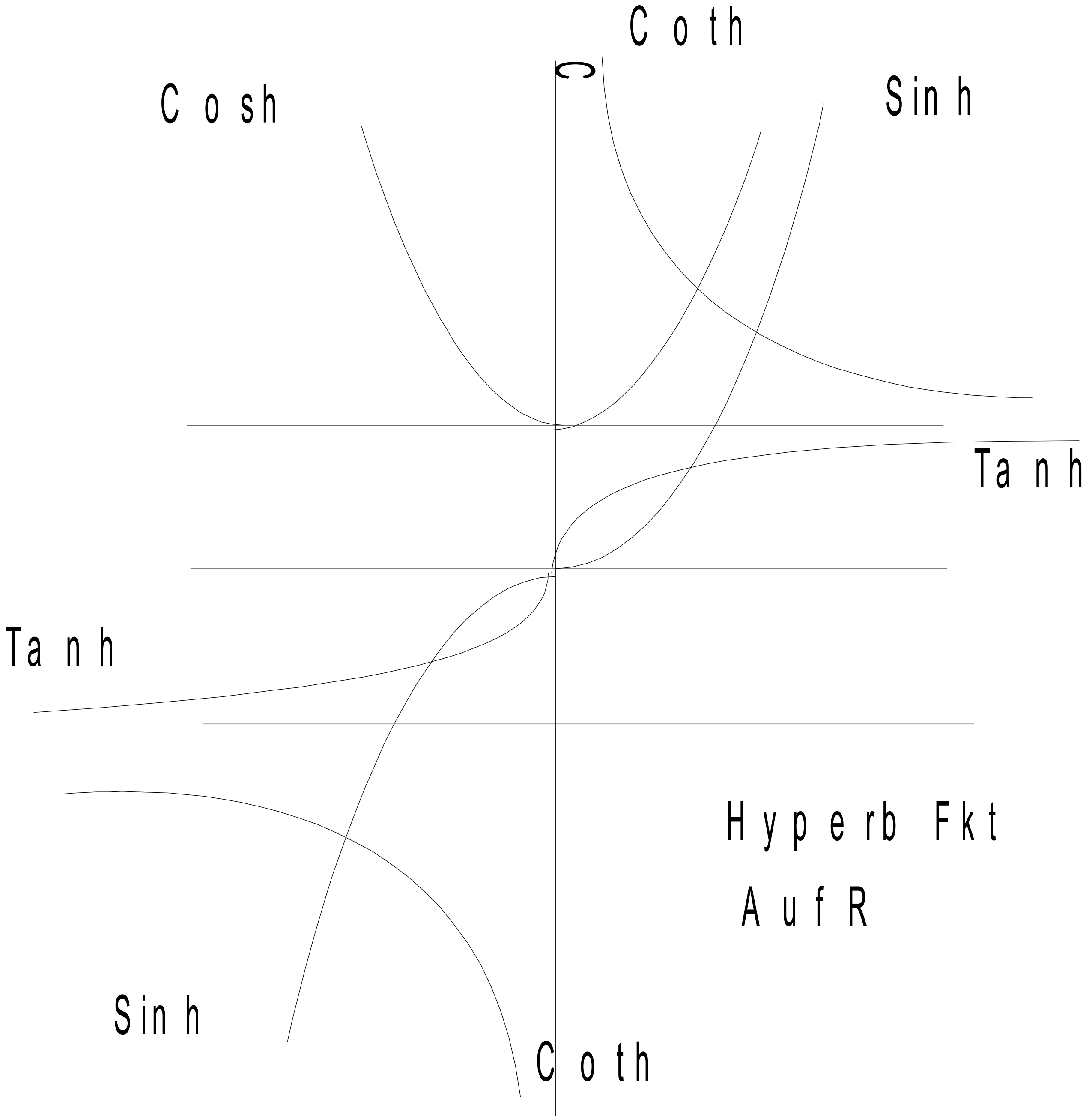
Bem: $\cos z$ und $\sin z$ sind in $\mathbb{C}$ nicht beschränkt.
Beachte: $\cos ix = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$

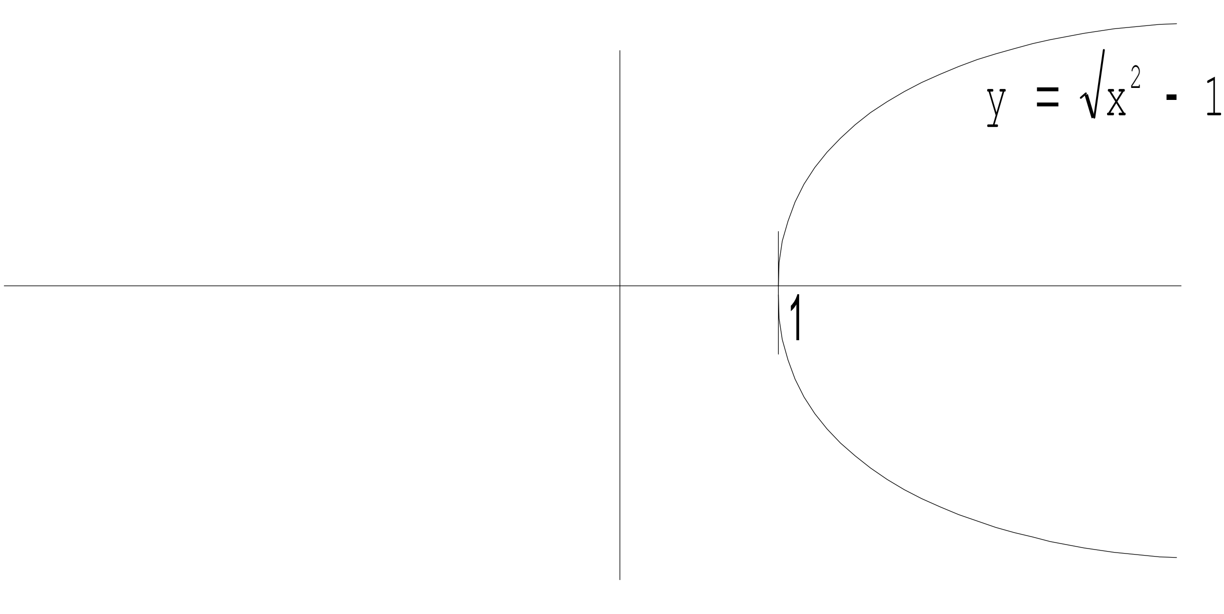
//**D3.6.2**(2103) *2.) $z \in \mathbb{C}$, $\cos z := 1/2(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.//*

//**D3.6.4***(2150)* $\cosh z := 1/2(e^z + e^{-z})$ $\forall$ $z \in \mathbb{C}$//

Bew: $\cos ix \underset{D3.6.2\,2.)}{=} 1/2(e^{iix} + e^{-iix}) = 1/2(e^{-x} + e^x) \underset{z=x+i*0}{\overset{D3.6.4}{=}} \cosh x$

Aus 3.)mit $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $y^2 = x^2 - 1$, $\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$


Coth
Cosh
Sinh
Tanh
Tanh
Hyperb Fkt
Auf R
Sinh
Coth


$y = \sqrt{x^2 - 1}$
1

S3.6.4(2108) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

$\forall\ z=x+iy,\ z_1,z_2\in C$ gilt:

1.) ● Grundlage D3.6.2 2.) ●

$\exp(iz)=e^{iz}=\cos z+i\sin z$ (Eulersche Formel),

$e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

$\forall\ x\in R$ gilt: $\exp(ix)=e^{ix}=\underbrace{\cos x}_{\in R}+i\underbrace{\sin x}_{\in R} \Rightarrow \cos x=\mathrm{Re}(e^{ix}),\ \sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$

Bew: $\cos z+i\sin z=1/2(e^{iz}-e^{-iz})+i\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=2\frac{1}{2}e^{iz}=e^{iz}$,

$z=x+iy,\ e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

Andere Formulierung Bew Grundlage D3.6.2 2.) ● ●:

● ● Alle folgenden Reihen sind absolut konvergent, deshalb

$$\forall\ z\in C:\ e^{iz}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}z^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\underbrace{=}_{i^2=-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=\cos z+i*\sin z$$

● &● ● $\forall\ x\in R$ gilt: $\exp(ix)=e^{ix}=\underbrace{\cos x}_{\in R}+i\underbrace{\sin x}_{\in R} \Rightarrow \cos x=\mathrm{Re}(e^{ix}),\ \sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$

2.) $\cos z=\cos(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion, KR=$\infty$.

$\sin z=-\sin(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion, KR=$\infty$.

*//**S3.6.1** (2100)Eigenschaften der komplexen Expotentialfunktion//*

//1 .) $\forall\ z\in C$ *gilt* $\exp(z)=e^z=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{\nu!}$ *(siehe auch S2.5.1 4).//*

*//**S3.2.5** (1750)Absolut konvergente Reihen - und nur diese - sind auch//*
// unbedingt Konvergent und jede ihrer Umordnungen hat denselben Wert//

//Bem:Ist eine Doppelsumme $\sum_{\ell,k=1}^{\infty}a_{k\ell}$ *absolut konvergent, dann darf//*

// die Summationsreihenfolge vertauscht werden.//

//Bem: $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|<\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty}|\mathrm{Re}\ a_\nu|<\infty$ *und* $\sum_{\nu=0}^{\infty}|\mathrm{Im}\ a_\nu|<\infty$*//*

Bew:(.) $e^{iz}\underbrace{=}_{S3.6.1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}$ absolut konvergent $\forall\ z\in C\ \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.5}$

$$e^{iz}=\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(i)^{2\nu}z^{2\nu}}{(2\nu)!}}_{(i)^{2\nu}=(i^2)^\nu=(-1)^\nu}+\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(i)^{2\nu+1}z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}_{i^{2\nu+1}=i(-1)^\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}+i\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

$$(..)\ e^{-iz}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}-i\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\Rightarrow$$

⊗ $\cos z=1/2(e^{iz}+e^{-iz})=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}=\cos(-z)$, entsprechend

⊗ $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}=-\sin(-z)$ oder $\sin(-z)=-\sin z$

3.) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$ (Additionstheoreme)
$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1 \sin z_2$ Funktionalgleichungen)
speziell: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\cos 0=1$

//**S3.6.1** (2100)//2.) $\forall$ $z1,z2\in C$ gilt $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\,e^{z_2}$ //
Bew: $\cos z_1\cos z_2-\sin z_1 \sin z_2=$

$$1/4[(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})\underbrace{-\frac{1}{i^2}}_{+}(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})]\underbrace{=}_{S3.6.1\ 2.)}$$

$$1/4[e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_2+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}] \Rightarrow$$

$$1/2(e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)})=\cos(z_1+z_2),$$

$z_1=z$, $z_2=-z$, $\cos^2 z+\sin^2 z=\cos 0=1$

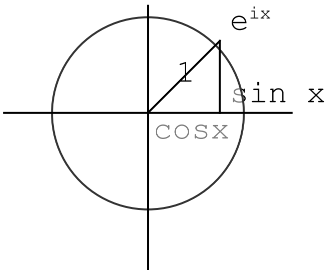
//**S3.6.4**(2107) $\forall$ $z\in C$: 1.) $\exp(iz)=e^{iz}=\cos z+i\sin z$//
Andere Formulierung Bew $\sin^2 z+\cos^2 z=1$:

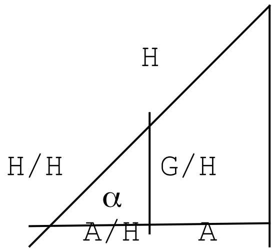
$$1=\exp(0)=\exp()iz-iz)\underbrace{=}_{S3.6.1\ 2.)}\exp(iz)*\exp(-iz)\underbrace{=}_{S3.6.3 1.)}$$

$$(\cos z+i*\sin z)(\underbrace{\cos(-z)}_{=\cos z}+i\underbrace{\sin(-z)}_{=-\sin z}=\cos^2 z+\sin^2 z$$

*//**S1.6.1**(800) $z=x+iy$, 4.) $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$//*

4.) $\forall$ $x\in R$: $|e^{ix}|\underbrace{=}_{1.)}|\underbrace{\cos x}_{\in R}+i\underbrace{\sin x}_{\in R}|=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\underbrace{=}_{3.)}1$





Trigonometrie:
$\sin\alpha=G/H=(G/H):(H/H)$

$\cos\alpha=A/H=(A/H):(H/H)$

5.) $\cos 0=1$, $\sin 0=0$, $\cos\pi/2=0$, $\sin\pi/2=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $\cos\pi=-1$,

$\sin\pi=0$, $\cos 3\pi/2=0$, $\sin 3\pi/2=-1$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$.

Bew: $i\underbrace{=}_{D3.6.1}e^{i\frac{\pi}{2}}\underbrace{=}_{S4.6.3\ 1.)}\cos\pi/2+i\sin\pi/2 \Rightarrow \cos\pi/2=0$, $\sin\pi/2=1$,

$-1\underbrace{=}_{D3.6.1}e^{i\pi}\underbrace{=}_{S4.6.3\ 1.)}\cos\pi+i\sin\pi=-1+0 \Rightarrow \sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$

$-i\underbrace{=}_{D3.6.1}e^{i\frac{3\pi}{2}}\underbrace{=}_{S4.6.3\ 1.)}\cos 3\pi/2+i\sin 3\pi/2$, $\cos 3\pi/2=0$, $\sin 3\pi/2=-1$

6.) $\cos(z+\pi/2)=-\sin z$, $\sin(z+\pi/2)=\cos z$
$\cos(z+\pi)=-\cos z$, $\sin(z+\pi)=-\sin z$, $\cos(z+k2\pi)=\cos z$,
$\sin(z+k2\pi)=\sin z$, $e^{z+i2k\pi}=e^z$ $\forall$ $k\in Z$.
Bew: $\cos(z+\pi/2)=\cos z\cos\pi/2-\sin z\sin\pi/2=-\sin z$
$\sin(z+\pi/2)=\sin z\cos\pi/2+\cos z\sin\pi/2=\cos z$
$\cos(z+\pi)=\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi=-\cos z$
$\sin(z+\pi)=\sin z\cos\pi+\cos z\sin\pi=-\sin z$
$\cos(z+2\pi)=\cos z$, $\sin(z+2\pi)=\sin z$,
$\cos(z+k2\pi)=\cos z$, $\sin(z+k2\pi)=\sin z$ $\forall$ $k\in Z$
$e^{i(z+k2\pi)}=e^{iz}$, $e^{(z+ik2\pi)}=e^z e^{ik2\pi}=e^z$ ($e^{ik2\pi}=\cos k2\pi+i\sin k2\pi=1+i*0$) a) $\sin z=0 \Leftrightarrow$

$z=k\pi$ für ein $k\in Z$.

7.) $\sin z=0 \Leftrightarrow z=k\pi$ für ein $k\in\mathbb{Z}$.

//S3.6.4(2107) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen//

//4.) $\sin 0=0$ $\sin\pi=0$ 5.) $\sin(z+k2\pi)=\sin z$ $\forall k\in Z$.

***//**S3.6.1 (2100) 3.) $|\mathbf{e^z}|=e^{\mathrm{Re}\, z}$ $\forall z\in C$.//*

//D3.6.2(2104)*1.) $\forall \alpha\in R$ sei $\sin\alpha:=\mathrm{Im}\, e^{i\alpha}=\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$.//*

Bew: $|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$

($\underbrace{\Leftarrow}_{S3.6.1}$) Für $z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ gilt $\sin z=0$

($\Rightarrow$) Es sei $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ mit $\sin z=0$, Z.z $z=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, d.h. $x=k\pi$, $y=0$.

Es gilt $\sin z=0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0 \Leftrightarrow e^{iz}=e^{-iz} \Leftrightarrow e^{ix-y}=e^{y-ix} \Rightarrow$

$|e^{ix-y}|=|e^{y-ix}| \Rightarrow e^{-y}=e^{y} \Rightarrow y=0 \Rightarrow z\in\mathbb{R} \Rightarrow z=k\pi$ für $k\in\mathbb{Z}$.

8.) ● Nullstellen cos z sind alle reell ●● $\cos z=0 \Leftrightarrow z=k\pi+\pi/2$ für ein $k\in\mathbb{Z}$.

*//**A3.6.3** Zeige für $z=x+iy\in\mathbb{C}$: $|\cos z|^2=\cosh^2 y-\sin^2 x$*

*//**S3.6.4**(2107) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen//*

// $\forall z=x+iy$, $z_1,z_2\in C$ gilt: 3.) speziell: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

//**S3.6.3**(2105) Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen

// $\forall z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt:

//2.) $\cosh z=\cosh(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion. KR $R=\infty$

Bew: ● Für $z=x+iy$ $\underbrace{\vdots}_{A3.6.3}$ $|\cos z|^2=\cosh^2 y-\sin^2 x$ $\underbrace{\Rightarrow}_{\cos z=0}$ $\sin^2 x=\cosh^2 y \Rightarrow$

$$\sin^2 x \underbrace{\leq}_{S3.6.4\,7.)} 1 \wedge \cosh y \underbrace{=}_{S3.6.3\,2.)} 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\underbrace{\frac{\overbrace{y^{2\nu}}^{\geq 0}}{(2\nu)!}}_{>0} \geq 1 \Rightarrow \cosh 0=1$$

$$\Rightarrow (\cos z=0 \underbrace{\overset{\Leftrightarrow}{\cos^2 \underbrace{z}_{=0}+\sin^2 z=1 \Rightarrow \sin^2 z=1 \Rightarrow \cosh y=1}} y=0) \Rightarrow z=x\in\mathbb{R}.$$

●● Es gilt $\sin(z+\pi/2)=\sin z\cos\pi/2+\cos z\sin\pi/2=\cos z$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

Dann gilt $\cos z=0 \Leftrightarrow \sin(z+\pi/2)=0 \Leftrightarrow z+\pi/2=\tilde{k}\pi$ $\tilde{k}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$z=\tilde{k}\pi-\pi/2=(\tilde{k}-1)\pi+\pi/2$ $(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ oder wie in a)

9.) $\tan(z_1+z_2)=\frac{\tan z_1+\tan z_2}{1-\tan z_1\tan z_2}$

10.) $\forall z=x+iy\in C$ gilt $\cos^2 z+\sin^2 z=1$, $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\, z}$

//**S1.6.2**(802) Vor. $z\in C$ 1.) $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$//

Bew: $\cos^2 z+\sin^2 z=(\cos z+i\sin z)(\cos z-i\sin z)=e^{iz}e^{-iz}=e^0=1$.

$\#|e^{x+iy}|=|e^x e^{iy}|=|e^x(\cos x+i\sin x)|=|e^x\cos x+i*e^x\sin x)|=\#$

$\#\sqrt{e^{2x}\underbrace{(\cos x^2+\sin y^2)}_{1}}=\sqrt{e^{2x}}=e^x=e^{\mathrm{Re}\, z}\#$

A3.6.1 Zeige

a) $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ für $x \in R$.

Bew: $\sin x = \sin(x/2+x/2) = \sin(x/2)\cos(x/2)+\cos(x/2)\sin(x/2) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$

b) $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$ für $x \in R$

//**S3.6.3**(2105) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

$\forall$ $z=x+iy$, $z_1, z_2 \in C$ gilt:

//3.) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ (Additionstheoreme)//

Bew: $\sin^2(x/2) \underset{Addth, z_1=z_2=x/2}{=} \cos^2(x/2) - \cos x = 1-\sin^2(x/2)-\cos x \Rightarrow$

$1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$

Bem: Die Aussagen a) und b(gelten sogar für $z \in C$)

c) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$ für $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ mit $x+y \neq \pm\pi/2$.

Bew: $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \dfrac{\dfrac{\sin y}{\cos y} + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}}$

$= \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$, falls $x, y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ und $x+y \neq \pi/2 + k\pi$, insbesondere $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x+y \neq \pm\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{C}$.

d) $0<x-x^3/6<\sin x<x$ für $x\in(0,\sqrt{6})$.

Als Vorbereitung Variation des Leibnizkriteriums:

Vor: $a_n \downarrow 0\ (n\to\infty) \Rightarrow a_n>0\ \forall n$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konv und mit $S_n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu : n\in N_0\cup\{-1\}$,

$S:=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu$ gilt: $S_{2n}\downarrow S(n\to\infty)$, $S_{2n+1}\uparrow S(n\to\infty)$ und

$|S-S_{n-1}|<a_n\ \forall n\in N_0$, insbesondere $S_{2n-1}<S<S_{2n}\ \forall n\in N_0$.

Bew: $S_{2n}=S_{2n-2}-a_{2n-1}+a_{2n}=S_{2n-2}-\underbrace{(a_{2n-1}-a_{2n})}_{>0}<S_{2n-2}\ \forall n\in N$

$S_{2n+1}=S_{2n-1}+\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{>0}>S_{2n-1}$ da $a_n\downarrow\ \forall n\in N_0$.

$S_{2n}=S_{2n-1}+a_{2n}>S_{2n-1}\ \forall n\in N_0$, insbesondere $S_{2n+1}=S_{2n}-a_{2n+1}<S_{2n}$

$S_{2n}<S_0=a_0\ \forall n$, $S_{2n+1}<S_0=a_0\ \forall n$, $S_1<S_{2n+1}<S_{2n}<S_0=a_0$. Also

$S_{2n}\downarrow$ und nach unten beschränkt $\Rightarrow \exists\ S:=\lim_{n\to\infty} S_{2n}$.

$S_{2n+1}\uparrow$ und nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists\ S^*:=\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$.

Wegen $S^*-S=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(S_{2n+1}-S_{2n})}_{=(-1)^{2n+1}a_{2n+1}}=-\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}=0$ (da $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ nach Vor)

folgt $S^*=S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$ existiert und $=S$ (denn S ist einziger HW von

(S_n)) d.h. $S=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu$ konvergiert.

Weiter gilt $S_{2n-1}<S<S_{2n}\ \forall n\in N_0$ (da $S_{2n+1}\uparrow S(n\to\infty)$ und $S_{2n}\downarrow S(n\to\infty)$)

$$\Rightarrow |S-S_{n-1}|=\begin{cases} S-S_{2m-1}<S_{2m}-S_{2m-1}=a_{2m}=a_n, \text{falls } n=2m \\ S_{2m-2}-S<S_{2m-2}-S_{2m-1}=a_{2m-1}=a_n, \text{falls } n=2m+1 \end{cases}$$

also $|S-S_{n-1}|<a_n\ \forall n\in N_0$.

Jetzt zur eigentlichen Aufgabenstellung z.z.

$0<x-x^3/6<\sin x<x$ für $x\in(0,\sqrt{6})$.

Bew: 1. Möglichkeit (mit obiger Variante Leibnizk)

Sei $x\in(0,\sqrt{6})$ bel. fest, $a_n:=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $S_n:=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu \Rightarrow$

$\sin x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu$, $S_0=x_0=x$, $S_1=x-x^3/6 \Rightarrow$

$a_n\downarrow$ denn $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)!\,x^{2n+3}}{(2n+3)!\,x^{2n+1}}=\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\underset{n\geq 0}{\leq}\frac{x^2}{6}<\frac{6}{6}=1$, da

$x\in(0,\sqrt{6}) \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, denn $\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu$ konvergiert absolut

(Konvergenz ist ja schon bekannt) Leibnizkriterium anwendbar: $\Rightarrow$

$0\underset{x\in(0,\sqrt{6})}{<}x(1-x^2/6)=x-x^3/6=S_1<\sin x<S_0=x$

$S_{2n}\downarrow \sin x$, $S_{2n+1}\uparrow \sin x \Rightarrow \underbrace{S_1}_{0<x-\frac{x^3}{6}}<\sin x<\underbrace{S_0}_{x}$

$(x-x^3/6=x(1-x^2/6)>0)$

2.Möglichkeit $x>0$ (direkt) $0<x-x^3/6<\sin x<x$ für $x\in(0,\sqrt{6})$

//**S3.1.2** (1602)Rechenregeln für unendliche Reihen//

//Vor:Seien $(z_\nu),(w_\nu)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu, \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.//

//Beh:Notwendiges Konvergenzkriterium//

// 6.)Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0:=0$, $n_k<n_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}_0$ eine Teilfolge von //

// $(n)_{n=0}^{\infty}$ und setzt man $c_\nu:=\sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} z_k$, $\nu\in\mathbb{N}_0$,(zwischen n_ν und $n_{\nu+1}$

// gibt es einige n_k) so konvergiert die unendliche Reihe //

// $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu=\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ (d.h. in konvergenten Reihen//

// darf man beliebig Klammern setzen).//

$$(.)\sin x-(x-x^3/6)=\sin x-x+x^3/6=\underbrace{\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}_{\text{konvergent*}}\underset{S3.1.2\,6)}{=}$$

$$*\ \frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+-..=\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6*7}\right)+\frac{x^9}{9!}\left(1-\frac{x^2}{10*11}\right)+..$$

$$\sum_{\mu=2}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{4\mu+1}}{(4\mu+1)!}}_{\geq 0}\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{(4\mu+2)(4\mu+3)}\right)}_{\geq 0}\geq\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6*7}\right)>0 \text{ falls}$$

$x^2<6\cdot 7=42 \Rightarrow x<\sqrt{6} \Rightarrow$

$\sin x>x-x^3/6=x(1-x^2/6)>0\ \forall\ x\in(0,\sqrt{6})$

$$(..)\sin x-x=\underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}_{konvergent*}\underset{3.1.2\,6)}{=}$$

$$*\ -\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+-..=-\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{x^2}{4*5}\right)-\frac{x^7}{7!}\left(1-\frac{x^2}{5\cdot 9}\right)+..$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\Big(\underbrace{-\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}}_{¿0}\Big)\Big(\underbrace{1-\frac{x^2}{(4m)(4m+1)}}_{^30}\Big)\leq-\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{x^2}{4*5}\right)<0 \text{ falls}$$

$x^2<4\cdot 5=20$ insbesondere für $x^2<6 \Rightarrow x\in(0,\sqrt{6})$.

$\sin x<x$, $x<\sqrt{6} \Rightarrow \sin x-x^3/6=x(1-x^2/6)>0\ \forall\ x\in(0,\sqrt{6})$

e) Benutze die S3.6.4 6.) $\cos(z+\pi/2)=-\sin z$, $\sin(z+\pi/2)=\cos z$
$\cos(z+\pi)=-\cos z$, $\sin(z+\pi)=-\sin z$, $\cos(z+k2\pi)=\cos z$,
$\sin(z+k2\pi)=\sin z$, $e^{z+i2k\pi}=e^z \quad \forall\ k\in Z$
um zu zeigen: $\arcsin x=\pi/2-\arccos x \ \forall\ x\in(-1,1)$
Finde eine analoge Beziehung zwischen arctan und arccot.

f) Auf $\mathbb{C}$ gilt
$x\equiv y$ genau dann, wenn $|z|=|w|$
Äquivalenzrelation? Äquivalenzklassen? Ggf zu z=2?
Lös: $z\sim w$ reflexiv, da $|z|=|z|$,
$z\sim w$ symmetrisch, da $|z|=|w| \Rightarrow |w|=|z$
$z\sim w$ transitiv, da $|z|=|w|$ & $|w|=|v| \underbrace{\Rightarrow}_{wegen\ =} |z|=|v|$
Äquivalenzrelation, Äqivalenzklasse zu 2: $\{z\in\mathbb{Z}\,|\,|z|=2\}$

g) Konvergiert $c_n=e^{2\pi in}$ für $n\to\infty$
Lös: $c_n=e^{2\pi in}=\cos(2\pi n)+i\sin(2\pi n)=\cos(0)+i\mathrm{Sin}(0)=1 \Rightarrow$ konvergent

h) Konvergiert $d_n=e^{3\pi in}$ für $n\to\infty$
Lös: $\exists$ Teifolge $d_{2n}=e^{6\pi in}=(e^{2\pi in})^3 \underbrace{=}_{f)} 1^3=1$ &
$\exists$ Teifolge $d_{2n+1}=e^{6\pi in+3\pi i}=(e^{2\pi in})^3(e^{3\pi i})=1*(e^{3\pi i})=e^{\pi i}=-1$
$\exists$ HW $1,-1 \Rightarrow d_n$ divergent