4.2 (2300) Funktionsgrenzwerte, Konvergenz von Funktionenfolgen

*//**D4.1.1'**(2202)//*

//Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $\delta>0$ sei $U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<\delta\}$=$\delta$-Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$//

// $\overset{o}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$. //

//Sei $M\subset\mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$://

//2.) $z_0\in\mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$. //

// M' sei die Menge aller HP von M und $\overline{M}:=M\cup M'$ die
// abgeschlossene Hülle von M.//

D4.2.1(2300) Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$ und $f:M\to\mathbb{R}$.

1.) f(x) konvergiert gegen $a\in\mathbb{R}$ für $x\to x_0$:$\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $f(x)\in U_\varepsilon(a)\ \forall\ x\in M\cap\overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ oder auch

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x\in M$ mit $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ oder $f(x)\underset{x\to x_0}{\rightarrow}a$.

2.) f(x) konvergiert einseitig von rechts (von links) gegen $a\in\mathbb{R}$ für $x\to x_{0+}$ $(x\to x_{0-})$:$\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x\in M$ mit $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_{0+}}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_{0-}}f(x)=a$.

Andere Formulierung:

f: $D\to\mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt aus D.

Einseitiger Limes: $\lim\limits_{x\to x_0^\pm}f(x)=y_0\Leftrightarrow$

falls x_0 HP von $D\cap(x_0,(-)\infty)$ und falls

$\forall$ Folgen (x_n) aus $D\cap(x_0,(-)\infty)$ mit $x_n\to x_0$ gilt, ist $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=y_0$)

rechtsseitiger (linksseitiger) Limes von f(x), $x\to x_0$

3.) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}$):

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ c>0$ mit $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x>c$ (bzw $\forall\ x<-c$).

4.) (bestimmte Divergenz) $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ (bzw. $-\infty$):$\Leftrightarrow$

$\forall\ c>0\ \exists\ \delta>0$ mit $f(x)>c$ (bzw. $f(x)<-c$) $\forall\ x\in M\cap\overset{o}{U}_\delta(x_0)$

Analog ist $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (bzw.$=-\infty$) und $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty(-\infty)$ definiert

5.) Seien $f,g:M\to\mathbb{R}$ und $x_0\in M'$ gegeben.

$f(x)=O(g(x))$ für $x\to x_0$:$\Leftrightarrow$

$\exists\ c>0\ \&\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)|\le c|g(x)|\ \forall\ x\in(M\cap\overset{o}{U}_\delta(x_0))$.

$f(x)=o(g(x))$ für $x\to x_0$:$\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|\ \forall\ x\in M\cap\overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

Analog bei $x\to\infty$, $x\to-\infty$.

Bem: Analog zum Bew des Satzes über die Folgenstetigkeit kann man zeigen, dass genau dann $\lim_{x\to a_+} f(x)=y$ ist, wenn für alle Folgen (x_n) mit $x_n>a$, welche gegen a konvergieren, die Folge $(f(x_n))$ gegen y konvergiert. Analoge Aussagen gelten in allen anderen Fällen, inklusive der Fälle $y=\infty$ bzw $y=-\infty$.

Bsp: $D=(0,\infty)$, ∞ ist uneigentlicher HP von D
Siehe auch Bsp Seite 2307

Andere Formulierungen:

- Geg $a,b\in\overline{\mathbb{R}}=(\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\})$, $a<b$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$
  f konvergiert gegen $y\in\mathbb{R}$, wenn x von oben gegen a strebt, falls:
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\ c\in(a,b)\ \forall\ x\in(a,c):|f(x)-y|<\varepsilon$ gilt.
  Schreibweise: $\lim_{x\to c_+} f(x)=y$.
  Analog
  f konvergiert gegen ein $y\in\mathbb{R}$, wenn x von unten gegen b strebt, falls:
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\ c\in(a,b)\ \forall\ x\in(c,b):|f(x)-y|<\varepsilon$ gilt.
  Schreibweise: $\lim_{x\to c_-} f(x)=y$

●● $\lim_{x\to c} f(x)=y$ mit $c\in(a,b) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c_+} f(x)$ & $\lim_{x\to c_-} f(x)$, $\lim_{x\to c_+} f(x)=\lim_{x\to c_-} f(x)=y$

●●● $c\in(a,b)$, $\exists \lim_{x\to c_+} f(x)$ & $\lim_{x\to c_-} f(x)$, $k\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to c_+} f(x), \lim_{x\to c_-} f(x)\le k$,

$$\lim_{x\to c_+} f(x)\neq\lim_{x\to c_-} f(x),$$

dann heißen c Sprungstelle von f und $\lim_{x\to c_+} f(x)-\lim_{x\to c_-} f(x)$ Sprunghöhe von f an dieser Stelle.

●●●● f für $a\in\mathbb{R}$ (zu (a,b)) definiert, $\exists \lim_{x\to c_+} f(x)$ dann ist die Sprunghöhe

als $\lim_{x\to a_+} f(x)-f(a)$ definiert.
Analoge ist eine Sprungstelle bzw -höhe bei b definiert

D4.2.1'(2302) (komplexe Zahlen, Körper $\mathbb{K}$)
Sei $D\subset \mathbb{K}$, $z_0\in D'$, d.h. z_0 ist HP, $f: D\to \mathbb{K}$ gegeben.

1.) $f(z)$ konvergiert gegen $w_0\in\mathbb{K}$ für $z\to z_0$, falls ein $w_0\in\mathbb{K}$ existiert, sodass gilt:

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta_\varepsilon>0$ mit $|f(z)-w_0|<\varepsilon\ \ \forall\, z\in(D\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0))$.

Schreibweise: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ oder $f(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} w_0$.

2.) Für $f: D\to\mathbb{K}$, $z_0\in D'$ gilt $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$:$\Leftrightarrow$

$\forall\, c>0\ \exists\, \delta>0$ mit $|f(z)|>c\ \ \forall\, z\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ (Bestimmte Divergenz).

3.) Seien $f,g: D\to\mathbb{K}$ und $z_0\in D'$ gegeben.

$f(z)=O(g(z))$ für $z\to z_0$:$\Leftrightarrow$

$\exists\, c>0$ und $\exists\, \delta>0$ mit $|f(z)|\le c|g(z)|\ \ \forall\, z\in D\cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$.

$f(z)=o(g(z))$ für $z\to z_0$:$\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$ mit $|f(z)|\le\varepsilon|g(z)|\ \ \forall\, z\in D\cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$.

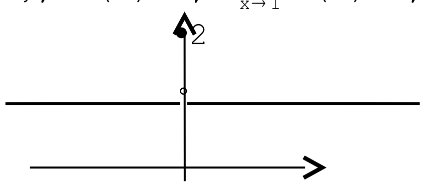
Bem: $f(z)$ ist unabhängig von $f(z_0)$, falls überhaupt $f(z)$ für $z=z_0$ definiert ist.

Bsp: 1.) $f(x):=\begin{cases} -1 \text{ für } -\infty<x<x_0 \\ 0 \text{ für } x=x_0 \\ +1 \text{ für } x_0<x<\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=-1$,

da $\begin{matrix} |f(x)-(-1)|=0<\varepsilon\ \ \forall x \text{ mit } x_0-\delta<x<x_0 \\ |f(x)-1|=0<\varepsilon\ \ \forall x \text{ mit } x_0<x<x_0+\delta \end{matrix}$ $(\delta>0)$.

2.) $f(x):=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$.

3.) $f(x)=1\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(0)=2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, $|f(x)-1|=0<\varepsilon$
$\forall\ 0<|x|<\delta$, $\delta>0$



4.) $f(x)=x$ in $D=(0,1)$, $x_0=1$,

$\lim\limits_{x\to x_0=1}$: $|f(x)-1|=|x-1|<\varepsilon\ \ \forall\, x\in \overset{\circ}{U}_{\delta=\varepsilon}(1)\cap D$.

5.) $f(x)=x^2$ in $\mathbf{D}=(-\infty,\infty)$. $\lim_{x\to x_0} f(x)=x_0^2=f(x_0)$.

$|f(x)-f(x_0)=|x^2-x_0^2|=|x+x_0||x-x_0|<\varepsilon \quad \forall\ x:|x-x_0|<\underbrace{\frac{\min\{1,\varepsilon\}}{2|x_0|+1}}_{\delta_\varepsilon}$

$|x+x_0||x-x_0|<|x+x_0|\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}=|x-x_0+2x_0|\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\le$

$(|x-x_0|+|2x_0|)\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}<(\delta_\varepsilon+|2x_0|)\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}=(\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}+|2x_0|)\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}=$

$\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right)^2+\frac{2|x_0|\varepsilon}{2|x_0|+1}\underbrace{\le}_{\varepsilon\le 1}\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}+\frac{2|x_0|\varepsilon}{2|x_0|+1}=\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}(1+2|x_0|)=\varepsilon$ für $\varepsilon\le 1$,

möglich, denn $x\to x_0$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon=\underbrace{\frac{\min\{1,\varepsilon\}}{2|x_0|+1}}_{\delta_\varepsilon}>0$: $|f(x)-\underbrace{x_0^2}_{f(x_0)}|<\varepsilon\quad\forall\ x\in\mathbf{D}$ mit $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$.

6.) $f(x)=\begin{cases}1, \text{ für } |x|\neq 0\\ 0, \text{ für } x=0\end{cases}$, $\lim_{x\to 0}=1$, $|f(x)-1|=0<\varepsilon\quad\forall\ x\neq 0$

7.) $f(z)=e^z$, $z_0=0$, $|f(z)-\underbrace{1}_{e^{z_0}}|\underbrace{\le}_{*}|z|(1+|z|e^{|z|})\le 4|z|$, da

$\forall\ |z|<1$ gilt $(1+|z|\underbrace{e}_{<3}{}^{|z|})\le 4 \Rightarrow$

$|z-z_0|=|z-0|=|z|<\min((\varepsilon,1/4)\Rightarrow 4|z|<4*\min((\varepsilon,1/4)=4\varepsilon$ bzw 1

$\forall\ z:\overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(0)$ mit $\delta_\varepsilon=\min((\varepsilon,1/4)$: $|f(z)-\underbrace{1}_{e^{z_0}}|=|f(z)-1|<4\varepsilon$

#*(eigene Formulierung)

$\#|e^z-1|=1+\frac{|z|}{1!}+\frac{|z|^2}{2!}+...-1=|z|(1+\frac{|z|}{2!}+\frac{|z|^2}{3!}+...)=\ \#|z|(1+|z|(\frac{1}{2!}+\frac{|z|}{3!}+\frac{|z|^2}{4!}$

$..)\le|z|(1+|z|(1+\frac{|z|}{1!}+\frac{|z|^2}{2!}+..))=$

$\#|z|(1+|z|e^{|z|})$

A4.2.1 $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^k=\begin{cases}x^2\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)^k=1, \textit{ falls } x\in[-1,1]\ /\{0\}\\ 0, \textit{ falls } x=0\end{cases}$

Lösung: $|1-x^2|<1 \Leftrightarrow -1<1-x^2<1 \Leftrightarrow -2<-x^2<0 \Leftrightarrow 0<|x|<\sqrt{2} \Rightarrow$

Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^k=\frac{x^2}{1-(1-x^2)}=1 \Rightarrow$

\# Sprungstelle in x=0, Sprunghöhe 1.

D4.2.2(2303) Monotone Funktion

Sei $I\subset\mathbf{R}$ ein Intervall. $f:I\to\mathbf{R}$ heißt monoton wachsend(fallend) auf $I:\Leftrightarrow\ \forall\ x_1,x_2\in I$ mit $x_1\le x_2$ gilt $f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$ $(f\nearrow,\searrow)$.

$f:I\to\mathbf{R}$ heißt streng monoton wachsend (fallend) auf $I:\Leftrightarrow$

$\forall\ x_1,x_2\in I$ mit $x_1<x_2$ gilt $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ $(f\uparrow,\downarrow)$

Ist f weder monoton wachsend noch monoton fallend, so sagen wir, f ist nicht monoton.

Bsp: 1.) $I=\mathbb{R}$, $e^x \uparrow$, 2.) $I=(0,\infty)$, $\log x \uparrow$

3.) $x^2 \begin{cases} I = [0,\infty), x^2 \uparrow \\ I = [-\infty,0), x^2 \downarrow \end{cases} \Rightarrow$ nicht monoton auf $\mathbb{R}$.

D4.2.3(2304) Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$. $f:M\to\mathbb{R}$ bzw $f:M\to\mathbb{C}$ heißt beschränkt auf $M:\Leftrightarrow \exists\ c>0$ mit $|f(z)|\le c\ \forall\ z\in M$.

*//**D4.1.1'**(2202)//*

//Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $\delta>0$ sei $U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<\delta\}=\delta$-Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$//

// $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$. //

//Sei $M\subset\mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$://

//2.) $z_0\in\mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt(HP) von $M:\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$. //

// M' sei die Menge aller HP von M und $\overline{M}:=M\cup M'$ die
// abgeschlossene Hülle von M.//

S4.2.1(2304) Konvergenzkriterien für Funktionen

- **Folgenkriterium**

Vor: Sei $M\subset\mathbb{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbb{R}$, ($\mathbb{C}$)

Beh: $\lim\limits_{x\to x_0} f(z)=a \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=a$.

//# (3)Bem: $(A\Rightarrow B\ \&\ \neg A\Rightarrow\neg B)\Rightarrow(A\Leftrightarrow B)$//

//**D2.1.1**(1200) Eine Folge $(z_n)=(z_n)_n^\infty\subset\mathbb{K}$ heißt konvergent $\Leftrightarrow\exists\ z\in\mathbb{K}$, sodass

// gilt $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|z_n-z|<\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0$.

// Dann heißt z der Grenzwert oder Limes der Folge (z_n).

Bew: "$\Rightarrow$" Es gelte $f(z)\underset{z\to z_0}{\rightrightarrows} a\Rightarrow\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0\ f(z)\in U_\varepsilon(a)\ \forall\ z\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$.

Sei $(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$, $z_n\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z_0\Rightarrow$

Für $\delta=\underset{beliebig,>0}{\delta_\varepsilon}>0\ \exists\ n_0=n_0(\delta_\varepsilon)n\in\mathbb{N}$ mit $\underbrace{0<|z_n-z_0|<\delta}_{z_n\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)}\ \forall\ n\ge n_0\ \underbrace{gilt}_{z_n\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)}$

$f(z_n)\in U_\varepsilon(a)\ \forall\ n\ge n_0(\delta_\varepsilon)\Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|f(z_n)-z|<\varepsilon\ \forall\ n\ge n_0 \underset{D2.1.1}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=a$

"$\Leftarrow$" Es gelte nicht $f(z)\underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} a\Rightarrow$

$\exists\ \varepsilon_0>0$ sodass $\forall\ \underbrace{\delta}_{beliebig\ klein}>0\ \exists\ z_\delta\in M\cap\overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ mit $|f(z_\delta)-a|\ge\varepsilon_0$

$\Rightarrow\forall\ n\in\mathbb{N}\ \exists\ z_n\in M\cap\overset{\circ}{U}_{1/n}(z_0)$ mit $|f(z_n)-a|\ge\varepsilon_0\Rightarrow$

Sei $(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$, $0<|z_n-z_0|<1/n$ und $|f(z_n)-a|\ge\varepsilon_0$

$\Rightarrow\exists$ eine Folge $(z_n)\subset M\setminus\{z_n\}$ mit $z_n\to z_0$ und $f(z_n)\overset{\to}{\scriptstyle nicht}\ a$

Andere Formulierung:

Vor: $D \to K$ und ein HP $z_0 \in D$ gegeben.

Beh: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow f(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0 \ \forall\ (z_n)$ mit $z_n \in D\setminus\{z_0\}\ \forall\ n$ & $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$

Bew: "$\Rightarrow$" (z_n) Folge aus $D\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0\ |f(z)-w_0|<\varepsilon\ \forall\ z\in D\cap \overset{o}{U}_\delta(z_0)$

$z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon$: $|z-z_0|<\delta_\varepsilon\ \forall\ n\geq n_\varepsilon$

Zu $\varepsilon>0$: $|f(z_n)-w_0|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_\varepsilon$ d.h. f konvergiert: $f(z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0$

"$\Leftarrow$" $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \neq w_0 \Rightarrow$

$\exists\ \varepsilon_0>0$: $\forall\ \delta>0$ insbesondere $\delta_n=1/n\ \exists\ z_n\in D\cap \overset{o}{U}_{1/n}(z_0)$ mit $|f(z_n)-w_0|>\varepsilon_0$

Da $(z_n)\in D\setminus\{z_0\}$ $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \Rightarrow$ Widerspruch zu Vor $|f(z)-w_0|\to 0$

Bem: 1.) Beachte $z_n\neq z_0\ \forall\ n$ (d.h. w_0 hängt nicht von $f(z_0)$ ab.

2.) Falls $z_0\in D$, so gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow$

$\forall$ Folgen (z_n) mit $z_n\in D\ \forall\ n$ & $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ gilt: $f(z_n)$ konvergiert.

3.) $\exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in R \Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$. (Cauchy-Krit)

Bew: "$\Rightarrow$" Sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_{\varepsilon/2}>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon/2\ \forall\ x\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow$

$\forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$: $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-a-f(x_2)+a|\leq$

$|f(x_1)-a|+|-f(x_2)+a|=|f(x_1)-a|+|f(x_2)-a|<2\varepsilon/2=\varepsilon$

"$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0$: $|f(x)-f(x^*)|<\varepsilon,\ \forall\ x,x^*\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$

sei Folge $(x_n)\subset M\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0 \Rightarrow$

Zu $\delta=\delta_\varepsilon\ \exists\ n_0=n_0(\delta_\varepsilon)\in N$ mit $0<|x_n-x_0|<\delta\ \forall\ n\geq n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow$

$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge $\Rightarrow$

$\exists\ a\in R$: $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$.

Eindeutigkeit:

Sei $(x_n^*)\subset M\setminus\{x_0\}$, $x_n^*\to x_0 \Rightarrow (f(x_n^*))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge

$\Rightarrow f(x_n^*) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} b\in R$.

neue Folge $x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots x_n, x_n^*$ ist auch Cauchyfolge

.. beide Teilfolgen haben gleichen Grenzwert $\Rightarrow a=b \underset{1.)}{\Rightarrow}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

#Eigene Variante
//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//
//Vor:Seien $(z_n)\in C$, konv mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, $z, z_0, z_n \in C$.//
//Beh
//2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge, d.h. //
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0$//
// Bem: $z_n\to z\,(n\to\infty) \underset{!}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |z_n-z_m|\leq\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$

„⇐„ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0:\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,\ \ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$

sei Folge $(x_n)\subset M\backslash\{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0 \Rightarrow$

Zu $\delta=\delta_\varepsilon\ \exists\ n_0=n_0(\delta_\varepsilon)\in \mathbf{N}$ mit $0<|x_n-x_0|<\delta\ \ \forall\ n\geq n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow$

Sei $x_n,x_m\in \overset{o}{U}_\delta(x_0)\ \ \forall\ m,n\geq n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0(\delta_\varepsilon)$

$\underset{S2.1.2\,2.)}{\Rightarrow} (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge $\underset{S2.1.2\,2.)\ Bem}{\Rightarrow}\ \exists\ a\in\mathbf{R}: f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a.$

Andere Formulierungen:

Es seien eine Funktion $f:\mathbf{D}\to \mathbf{K}$ und ein HP z_0 von $\mathbf{D}$ gegeben.

Dann gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existiert $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_{(\varepsilon_0)}>0: |f(z)-f(z')|<\varepsilon\ \ \forall\ z,\ z'\in \overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)\cap \mathbf{D}.$

Bew:„⇒" Dreiecksungleichung wie bei Reihen

„⇐"Sei (z_n) eine Folge aus $\mathbf{D}\backslash\{z_0\}$ mit $z_n\to z_0$. $(f(z_n))$ ist nach Vor eine Cauchy Folge, hat also einen Limes w_0.

Sei $\tilde{z}_n$ aus $\mathbf{D}\backslash\{z_0\}$, $\tilde{z}_n\to z_0$.

$(f(\tilde{z}_n))$ ist Cauchyfolge, konvergent gegen $\tilde{w}_0$.

$\overline{z_n} = \begin{cases} z_{k,\ \text{falls}\ n=2k} \\ \tilde{z}_k\ \text{falls}\ n=2k+1 \end{cases}$, $(\overline{z_n})$ aus $\mathbf{D}\backslash\{z_0\}$, $\overline{z_n}\to z_0$, $f(\overline{z_n})$ ist CF,

hat also Limes, also muss $w_0=\tilde{w}_0 \underset{S4.2.1}{\Rightarrow}$ Beh

● ● **Cauchy-Kriterium**

//D4.1.1’(2202) $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0) := U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in \mathbb{C} \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$.//

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ \ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$.

Bew:"$\Rightarrow$" Sei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_{\varepsilon/2}>0$: $|f(x)-a|<\varepsilon/2\ \ \forall\ x\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow$

$\forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$: $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-a-f(x_2)+a)|\le$

$|f(x_1)-a|+|-f(x_2)+a|=|f(x_1)-a|+|f(x_2)-a|<2\varepsilon/2=\varepsilon$

"$\Leftarrow$" $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0$: $|f(x)-f(x^*)|<\varepsilon,\ \ \forall\ x,x^*\in M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ &

sei Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0 \Rightarrow$

Zu $\delta=\delta_\varepsilon\ \exists\ n_0=n_0(\delta_\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $0<|x_n-x_0|<\delta\ \ \forall\ n\ge n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow$

$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\ge n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge $\Rightarrow$

$\exists\ a\in\mathbb{R}$: $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$.

Eindeutigkeit:

Sei $(x_n^*)\subset M\setminus\{x_0\}$, $x_n^*\to x_0 \Rightarrow (f(x_n^*))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge

$\Rightarrow f(x_n^*) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} b\in\mathbb{R}$.

neue Folge $x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots x_n, x_n^*$ ist auch Cauchyfolge

.. beide Teilfolgen haben gleichen Grenzwert $\Rightarrow a=b \underset{1.)}{\Rightarrow}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$

#Eigene Variante

//**S2.1.2** (1250)*Eigenschaften konvergenter Folgen*//

//Vor:Seien $(z_n)\in C$, konv mit $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z$, $z,z_0,z_n\in C$.//

//Beh

//2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge, d.h. //

// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0$//

// Bem: $z_n\to z\ (n\to\infty) \underset{!}{\Leftrightarrow}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |z_n-z_m|\leq\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$

\# „⇐„ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0:\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,\ \ \forall\ x_1,x_2\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ &

\# sei Folge $(x_n)\subset M\backslash\{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} x_0 \Rightarrow$

\# Zu $\delta=\delta_\varepsilon\ \exists\ n_0=n_0(\delta_\varepsilon)\in \mathbb{N}$ mit $0<|x_n-x_0|<\delta\ \ \forall\ n\geq n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow$

\# Sei $x_n,x_m\in \overset{o}{U}_\delta(x_0)\ \ \forall\ m,n\geq n_0(\delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0(\delta_\varepsilon)$

\# $\underset{S2.1.22.)}{\Rightarrow} (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge $\underset{S2.1.22.)\ Bem}{\Rightarrow}\ \exists\ a\in\mathbb{R}: f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} a.$

Andere Formulierungen:

Es seien eine Funktion $f:\mathbb{D}\to\mathbb{K}$ und ein HP z_0 von $\mathbb{D}$ gegeben.

Dann gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existiert $\Leftrightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_{(\varepsilon_0)}>0: |f(z)-f(z')|<\varepsilon\ \ \forall\ z,\ z'\in \overset{o}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)\cap\mathbb{D}.$

Bew: „⇒" Dreiecksungleichung wie bei Reihen

„⇐"Sei (z_n) eine Folge aus $\mathbb{D}\backslash\{z_0\}$ mit $z_n\to z_0$. $(f(z_n))$ ist nach Vor eine Cauchy Folge, hat also einen Limes w_0.

Sei $\tilde{z}_n$ aus $\mathbb{D}\backslash\{z_0\}$, $\tilde{z}_n\to z_0$.

$(f(\tilde{z}_n))$ ist Cauchyfolge, konvergent gegen $\tilde{w}_0$.

$\overline{z_n}=\begin{cases} z_{k,\ \text{falls}\ n=2k} \\ \tilde{z}_k\ \text{falls}\ n=2k+1\end{cases}$, $(\overline{z_n})$ aus $\mathbb{D}\backslash\{z_0\}$, $\overline{z_n}\to z_0$, $f(\overline{z_n})$ ist CF,

hat also Limes, also muss $w_0=\tilde{w}_0 \underset{S4.2.1}{\Rightarrow}$ Beh

A4.2.2

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$

//**S1.7.2**(903) Vor.Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

Lös:.. $\underset{S1.7.2}{\Rightarrow}\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}x^k}{(x-1)\sum_{k=0}^{m-1}x^k}=\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}x^k}{\sum_{k=0}^{m-1}x^k}=n/m$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^r - 1}{x - 1}$, $r\in\mathbb{Q}$ (fest)

Lös: Sei $r=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$

- q=1, d.h. $r=p\in\mathbb{Z}$

  $r\geq 0$: $\frac{x^r - 1}{x - 1} \underbrace{=}_{S1.7.2} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sum_{\nu=0}^{\infty} 1^{\nu}=r$

  $r<0$: Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. ObdA $x_n\neq 0\ \forall\ n$

  Sei $y_n:=\frac{1}{x_n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow \frac{x_n^r - 1}{x_n - 1} = \frac{(y_n^{-r} - 1)(-y_n)}{(y_n^{-1} - 1)(-y_n)} =$

  $\underbrace{\frac{y_n^{-r} - 1}{y_n - 1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -r, da -r\geq 0} \underbrace{(-y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -1} = r \overset{a)}{\underset{Folgenkrit}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^r - 1}{x - 1} = r$

- • Algemein... Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

  Def $y_n:=x_n^{\frac{p}{q}}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow \frac{x_n^r - 1}{x_n - 1} = \left(\frac{y_n^p - 1}{y_n - 1}\right) / \left(\frac{y_n^q - 1}{y_n - 1}\right) \overset{*}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} r \Rightarrow$

  Beh, denn q te Wurzel ist stetig (siehe 4.3)

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

Lös: $\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{x}\right]+r$, $r\in[0,1)$, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}-r\right) = \lim\limits_{x\to 0} (1-xr)=1$

Andere Formulierung:

$$\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right]+1 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} \quad \forall\ x\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x < x*\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \ \forall x>0 \\ 1-x > x*\left[\frac{1}{x}\right] \geq 01 \ \forall x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} < x*\left[\frac{1}{x}\right] < \underbrace{1+|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \quad \forall\ x\neq 0 \underset{Sandwichs\ Grenzwert\ mit\ Folgenkrit}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}=0$

S4.2.2(2310) Grenzwertregeln

Vor: Geg. $f,g:D\to K$ und HP z_0

1.) Beh: Existieren $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ & $\lim_{z\to z_0} g(z)=w_1$, so existieren folgende Limites und es gilt:

(.) $\lim_{z\to z_0}(\alpha f(z)+\beta g(z))=\alpha w_0+\beta w_1$ $(\alpha,\beta\in K)$ (..) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=w_0w_1$

(...) $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{w_0}{w_1}$ falls $w_1\neq 0$

*//**S4.2.1**(2305)*

//Vor:Sei $M\subset R$, $x_0\in M'$, $f:M\to R$, $g:M\to R$

//Beh:1.)(Folgenkriterium) $\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n)\subset M\setminus\{x_0\}$

// mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$.

Bew: S4.2.2 mit S4.2.1 Folgenkonvergenz untersuchen, dann folgen die Beh. mit den Grenzwertregeln für Folgen.

2.) $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ und $a<\alpha$ ($>\alpha$ bzw $\neq\alpha$) $\Rightarrow \exists\ \delta>0$: $f(x)<\alpha$ ($>\alpha,\neq\alpha$) $\forall\ x\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$.

Bew: $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$, $a<\alpha$, $\Rightarrow$ Zu $\varepsilon:=\alpha-a>0\ \exists\ \delta>0: |f(x)-a|<\alpha-a$, $\forall\ x\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$,

d.h. $-\varepsilon<f(x)-a<\varepsilon \Rightarrow -(\alpha-a)<f(x)-a<\alpha-a \Rightarrow -\alpha+2a<f(x)<\alpha \Rightarrow$

$f(x)<\alpha\ \forall\ x\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(x_0)$

//S2.2.2 (1301)Vor:$(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//

3.) Ist M=I ein Intervall und $\exists\ \delta>0$ sodass f auf $I\cap(x_0-\delta,x_0)$ bzw $I\cap(x_0,x_0+\delta)$ monoton und beschränkt ist, so $\exists \lim_{x\to x_0-} f(x)$ bzw $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

Bew: gesucht!!!!!

//D4.1.1’(2202)//

//Für $z_0\in\mathbf{C}$ und $\delta>0$ sei $U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbf{C}/|z-z_0|<\delta\}=\delta$-Umgebung von z_0 in $\mathbf{C}$//

// $\overset{o}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbf{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$. //

//2.) Sei $M\subset\mathbf{C}$, $M\neq\emptyset$: $z_0\in\mathbf{C}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$

// $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$. //

// M’ sei die Menge aller HP von M und $\overline{M}:=M\cup M'$ die
// abgeschlossene Hülle von M.//

4.) Seien $M,H\subset\mathbf{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbf{R}$, $z_0\in M'$.

(●) Sei $y_0:=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, dann gilt $y_0\in\overline{H}$.

(●●) Falls $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$ existiert, so $\exists\ \lim\limits_{z\to z_0} h(f(z))=c$

*//**D4.2.1’** (2302) $D\subset\mathbf{K}$, HP $z_0\in D$ ‘ $f:D\to\mathbf{K}$.//*

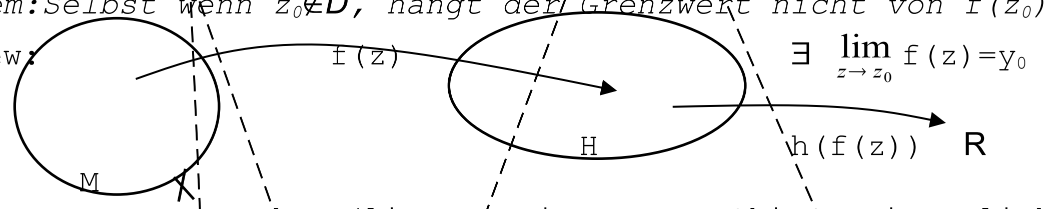
//1.) f(z) für $z\underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0$ konvergent :$\Leftrightarrow$ $\exists\ w_0\in\mathbf{K}$://

// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $|f(z)-w_0|<\varepsilon\ \forall\ z\in M\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)$.//

// Schreibweise: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ oder $f(z)\to w_0$ ($\overset{z\to z_0}{\longrightarrow}$) für $z\to z_0$.//

//Bem: Selbst wenn $z_0\notin D$, hängt der Grenzwert nicht von $f(z_0)$ ab.//

Bew: $\exists\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=y_0$



$z_0\in M'$ HP (liegen meist im Inneren) Skizze eigentlich für komplexe Zahlen in M und H

//**S4.2.1**(2305) (Folgenkriterium)

//Vor: Sei $M\subset\mathbf{R}$, $x_0\in M'$, $f:M\to\mathbf{R}$, ($\mathbf{C}$)

//Beh: $\lim\limits_{x\to x_0} f(z)=a\ \Leftrightarrow\ \forall$ Folgen $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $x_n\underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=a$

D4.2.1’(2302) $D\subset\mathbf{K}$, HP $z_0\in D$ & $f:D\to\mathbf{K}$ gegeben.

//1.) f(z) konvergiert für $z\to z_0$: $\exists\ w_0\in\mathbf{K}$,

// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $|f(z)-w_0|<\varepsilon\ \forall\ z\in M\cap\overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)$. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ oder $f(z)\underset{z\to z_0}{\rightarrow} w_0$.

(●) Sei $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset M\setminus\{x_0\}$ mit $z_n\underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0\ \Rightarrow\ \underbrace{f(z_n)}_{\in H!!!}\underset{n\to\infty}{\rightarrow} y_0$

1.Fall $\exists\ N_0\in\mathbf{N}$ mit $\underbrace{f(z_n)}_{\in H!!!}=y_0\ \forall\ n\geq N_0\Rightarrow y_0\in H$

2.Fall $f\underbrace{f(z_n)}_{\in H!!!}\neq y_0\ \forall\ n\in\mathbf{N}\ \underset{\underbrace{f(z_n)}_{\in H!!}\underset{n\to\infty}{\rightarrow} y_0}{\Rightarrow}\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(f(x_0))\neq\emptyset\Rightarrow y_0$ HP von H

$\Rightarrow\ y_0\in H'$

$\underset{Fall\,1\&2}{\Rightarrow}\ y_0\in\overline{H}=H\cup H'$.

//4.) Seien $M,H\subset\mathbf{R}$, $f:M\to H$, $h:H\to\mathbf{R}$, $z_0\in M'$.

// (●●) Falls $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$ existiert, so $\exists\ \lim\limits_{z\to z_0} h(f(z))=c$

Bew(●●): Sei $y_0\in H'$ und $\exists\ \lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c$. Gilt dann $\lim\limits_{z\to x_0} h(f(x))=c$? Nein!

$\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c\ \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \eta=\eta_\varepsilon>0$: $h(y)\in U_\varepsilon(c)\ \forall\ y\in H\cap\overset{o}{U}_\eta(y_0)$

$\lim\limits_{z\to x_0} f(z)=y_0 \Leftrightarrow$

$\forall\ \eta>0\ \exists\ \delta=\delta(\eta)>0: f(z)\in U_\eta(y_0)\ \forall\ z\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(z_0)$ oder

(.) $y\in H'\setminus H$ oder

(..) $\exists\ U_{\delta_0}(x_0)$ mit $f(z)\neq y_0\ \forall\ z\in M\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ $(\delta_0<\delta)$ oder

(...) $y_0\in H\cap H'$ und $c=h(y_0)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(.)\ (..)\ (...)}$

$h(f(z))\in U_\varepsilon(c)\ \forall\ z\in M\cap \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x)$, $\delta'=\min\{\delta,\delta_0\}$

#Eigener Versuch:

#(● ●) (.) $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=c \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \eta=\eta_\varepsilon>0:\ h(y)\in U_\varepsilon(c)\ \forall\ y\in H\cap \overset{o}{U}_\eta(y_0)$

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=y_0 \Leftrightarrow$

$\forall\ \eta>0\ \exists\ \delta=\delta(\eta)>0: f(z)\in U_\eta(y_0)\ \forall\ z\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(z_0)$ oder

$f(z)\in U_\eta(y_0)\cap H\ \forall\ z\in M\cap \overset{o}{U}_\delta(z_0)$,

falls gilt: $\exists\ T\subset U_\eta(y_0)$ mit $T=T\cup\{y_0\}\not\subset H$

(..) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=y_0 \Leftrightarrow \forall\ \eta>0\ \exists\ \delta_1=\delta_{(\eta)}>0: f(z)\in U_\eta(y_0)\ \forall\ z\in M\cap \overset{o}{U}_{\delta_1}(z_0)$

(...) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=y_0 \Leftrightarrow \forall\ \eta>0\ \exists\ \delta_2=\delta_{(\eta)}>0: f(z)\in U_\eta(y_0)\setminus(T\cup\{y_0\})\ \forall\ z\in M\cap \overset{o}{U}_{\delta_1}(z_0)$

$\underbrace{\overset{\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}}{\Rightarrow}}_{(.),(..),(...)}\ \forall\ y$

Bem:S4.2.2 1.) gilt analog für $M\subset\mathbb{C}$, $f,g:M\to\mathbb{C}$, $H\subset\mathbb{C}$, $h:H\to\mathbb{C}$
Die Grenzwertregeln gelten auch bei uneigentlichen HP mit eigentlichen Grenzwerten.

Andere Formulierungen:

Vor: f: $D \to D_1 \subset K$, z_0 HP von D: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in D_1$

g: $D_1 \to K$: $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(w_0)\, D_1$

Beh: $\lim\limits_{z \to z_0} g(f(z)) = g(w_0) = \lim\limits_{w \to w_0} g(w))$

Bew: Im Allgemeinen ist w_0 kei HP von D_1 (z.B. f=const).

Folgenkriterium $\Rightarrow$ $\forall$ (z_n) aus $D \setminus \{z_0\}$, $z_n \to z_0$ gilt $g(f(z_n)) \underbrace{\to}_{2.Vor} g(w_0)$

$w_n = f(z_n) \to w_0$

*//**S2.3.21**(1459)Wichtige Grenzwerte//*

//3.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$*//*

//4.) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^p}{e^n} = 0$ $(p>0)$*//*

Bsp:1.) $f_1(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}$, $x \in D$, $\alpha \in R$. $\lim\limits_{x \to \infty} f_1(x) = 0$, (siehe $\frac{n^\alpha}{e^n}$)

2.) $f_2(x) = \frac{\log x}{x^\alpha}$, $x \in D$, $\alpha \in \overline{R}$. $\lim\limits_{x \to \infty} f_2(x) = 0$, (siehe $\frac{\log n}{n^\alpha}$)

3.) $f_3(x) = x^\beta \log x$, $x \in D$, $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\log \frac{1}{x}}{(1/x)^\beta} = 0$ nach 2.)

//**S4.2.2** (2310) 4.)Seien $M, H \subset R$, $f: M \to H$, $h: H \to R$, $x_0 \in M'$. //

// (●)Sei $y_0 := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, dann gilt $y_0 \in \overline{H}$. //

// (● ●)Falls $\lim\limits_{y \to y_0} h(y) = c$ existiert, so $\exists$ $\lim\limits_{x \to x_0} h(f(x)) = c$//

A4.2.3 Es seien die Funktionen $f, h: R \to R$ definiert durch

$f(x) = \begin{cases} x \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$ und $h(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \neq 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \end{cases}$.

Existiert $\lim\limits_{x \to 0} (h \circ f)(x)$?

Lös: $(h \circ f)(x) = \begin{cases} 1, falls x > 0 \\ 0, falls x \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0_+} (h \circ f)(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x \to 0_-} (h \circ f)(x)$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0} (h \circ f)(x)$ existiert nicht(vgl S4.2.3 4.))

\# $\nexists$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ da $\lim\limits_{x \to 0_-} f(0) = 0 \neq \underbrace{x}_{x>0} = \lim\limits_{x \to 0_+} f(0)$

A4.2.4 Untersuche folgende Grenzwerte mit Hilfe der Definition:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n-1}{x-1} \text{ für } x\neq 1\\ 0 \text{ für } x=1\end{cases}$ mit einem festen $n\in\mathbb{N}_0$.

//**S1.7.2**(903) $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$, 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$//

//**S4.2.2**(2310) Vor: Geg. $f,g:D\to\mathbb{K}$ und HP z_0

//1.) Beh: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ & $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=w_1 \Rightarrow \exists$ (..) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=w_0w_1$

Lös: Ohne Def: Für $x\neq 1$: $f(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}\underbrace{=}_{S1.7.2}\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x^\nu$ $(\to\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} 1^\nu=n)$, genauer…

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\lim_{x\to 1} x^\nu \underbrace{=}_{S4.2.11.)}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\lim_{x\to 1} x)^\nu=\sum_{\nu=0}^{n-1} 1=n$$

Beh: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=n$.

Bew: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: |f(x)-n|<\varepsilon\ \forall x\in\mathbb{R}$ mit $0<|x-\underbrace{1}_{x_0}|<\delta$.

Sei $\varepsilon>0$ bel fest. Wähle $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{2^n}\} \Rightarrow |f(x)-\underbrace{n}_{\sum_{\nu=0}^{n-1}1}|=$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}(x^\nu-1)\right|\underbrace{=}_{S1.7.2\ 2.)}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=0}^{\nu-1}x^\mu\right)(x-1)\right|\le\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\underbrace{|\overset{\to 1}{x}|^\mu}_{\le 2^\mu}\right)|x-1|\le$$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\underbrace{\frac{2^\nu-1}{2-1}}_{\le 2^\nu}\right)|x-1|\le\sum_{\nu=0}^{n-1}2^\nu|x-1|=\frac{2^n-1}{2-1}|x-1|\le 2^n|x-1|<2^n\delta\le\varepsilon\quad\forall x\in\mathbb{R}: 0<|x-1|<\delta$$

(insbesondere ist $|x|\le 2$)

Es wurde also gezeigt: $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: |f(x)-n|<\varepsilon\ \forall x\in\mathbb{R}: 0<|x-1|<\delta$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}$, $r\in\mathbb{Q}$ (fest)

Lös: Sei $r=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$

- $q=1$, d.h. $r=p\in\mathbb{Z}$

  $r\geq 0$: $\frac{x^r-1}{x-1}=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \underbrace{\longrightarrow}_{x\to 1} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 1^\nu=r$

  $r<0$: Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $x_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1$. ObdA $x_n\neq 0\ \forall\ n$

  Sei $y_n:=\frac{1}{x_n}$, $n\in\mathbb{N}\Rightarrow y_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1 \Rightarrow \frac{x_n^r-1}{x_n-1}=\underbrace{\frac{y_n^{-r}-1}{x_n-1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -r, da -r\geq 0}\underbrace{(-y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -1}=r \underbrace{\Rightarrow}_{Folgenkrit}$

  $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}$

- • Algemein... Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $x_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1$.

  Def $y_n:=x_n^{\frac{p}{q}}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 1\Rightarrow \frac{x_n^r-1}{x_n-1}=\left(\frac{y_n^p-1}{y_n-1}\right)/\left(\frac{y_n^q-1}{y_n-1}\right) \overbrace{\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}}^{*} r \Rightarrow$

  Beh, denn q te Wurzel ist stetig

einfachere Variante:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$

Lös:.. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k}{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m-1}x^k}=n/m$

c) $f(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$ fest, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{3x^n+2}{x^2+1}=$?

//**S1.7.2**(903) Vor.Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

//**D4.2.1** 3.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$):
// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $c>0$ mit $|f(x)-a|<\varepsilon$ $\forall$ $x>c$ (bzw $\forall$ $x<-c$).

Lös:1.Fall:n=0 oder n=1. Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$ bel.(fest). Wähle $c=\max\{5/\varepsilon,1\}$ $\Rightarrow$

$$|f(x)-0| \underset{x>0}{=} \frac{3x^n+2}{x^2+1} \underset{2\le 2x^n}{\le} \frac{5x^n}{x^2} \underset{n=0\text{ oder }1}{\le} \frac{5x}{x^2}=5/x<5/c\le\varepsilon\quad\forall\ x>c$$

2.Fall:n=2. Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

Bew:Sei $\varepsilon>0$ bel.(fest). Wähle $c=\sqrt{1/\varepsilon}$ ($\Rightarrow$ $c>0$) $\Rightarrow$

$$|f(x)-3|=\left|\frac{3x^2+2-3(x^2+1)}{x^2+1}\right|=\left|\frac{-1}{x^2+1}\right|<1/x^2<1/c^2=\varepsilon\quad\forall\ x>c$$

3.Fall:$n\ge3$, Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ d.h. $\forall$ $k>0$ $\exists$ $c>0$: $f(x)>k$ $\forall$ $x>c$.

Bew:Sei $k>0$ beliebig(fest). Wähle $c=\max\{1,k\}$ $\Rightarrow$ $c>0$ $\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{3x^n+2}{x^2+1} \underset{x\ge1}{\ge} \frac{3x^n}{x^2+x^2} > \frac{3}{2}x^{n-2} \underset{n\ge3}{\ge} x>c\ge k\quad\forall\ x>c$$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, & \text{für } x\ne-2\\ 0, & \text{für } x=-2\end{cases}$?

Lös: $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ existiert nicht

Bew:Sei $a\in\mathbb{R}$ beliebig $|f(x)-a|=\begin{cases}|1-a|, & \text{falls } x>-2\\ |-1-a|=|1+a|, & \text{falls } x<-2\\ |-a|, & \text{falls } x=-2\end{cases}$

1.Fall:a=1. Wähle $\varepsilon=|1+a|$ ($\Rightarrow$ $\varepsilon>0$). Sei $\delta>0$ bel.
Wähle $x\in \overset{o}{U}_\delta(-2)$ mit $x<-2$ $\Rightarrow$ $|f(x)-a|=|1+a|\ge\varepsilon$

2.Fall:$a\ne1$. Wähle $\varepsilon=|1-a|$ ($\Rightarrow$ $\varepsilon>0$). Sei $\delta>0$ bel.
Wähle $x\in \overset{o}{U}_\delta(-2)$ mit $x>-2$ $\Rightarrow$ $|f(x)-a|=|1-a|\ge\varepsilon$

Es wurde also gezeigt: $\forall$ $a\in\mathbb{R}$ $\exists$ $\varepsilon>0$ $\forall$ $\delta>0$ $\exists$ $x\in\overset{o}{U}_\delta(-2)$: $f(x)-a|\ge\varepsilon$ d.h. es gilt nicht :
$\exists$ $a\in\mathbb{R}$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ $\forall$ $x\in\overset{o}{U}_\delta(-2)$: $|f(x)-a|<\varepsilon$ d.h. es gilt nicht:
$\exists$ $a\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=a$.

Alternativ:Aus D4.2.1 folgt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert $=a$ $\Leftrightarrow$
$\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=a$ existiert.

Es gilt: $\lim\limits_{x\to-2_+} f(x)=1$ (Zu $\varepsilon>0$ bel. Wähle $\delta>0$ bel $\Rightarrow$
$|f(x)-1|=0$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$: $-2<x<-2+\delta$)
und $\lim\limits_{x\to-2_-} f(x)=-1$ (Zu $\varepsilon>0$ bel. Wähle $\delta>0$ bel $\Rightarrow$
$f(x)-(-1)|=0$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$: $-2-\delta<x<-2$)

$\lim_{x\to -2_+} f(x) \neq \lim_{x\to -2_-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x)$ existiert nicht

e) $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{für } x\neq 2 \\ 0 & \text{für } x=2 \end{cases}$?

Lös: $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$ falls $x\neq 2$. Beh: $\lim_{x\to 2} f(x)=0$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $\delta=\varepsilon \Rightarrow$

$|f(x)-0|=|x-2|<\delta=\varepsilon \ \forall\ x\in\mathbb{R}: 0<|x-2|<\delta$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) \text{ für } x\neq 0 \\ 0 \text{ für } x=0 \end{cases}$?

Lös: Beh: $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Wähle $\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x)-0| \underbrace{=}_{x\neq 0} |x|\underbrace{|\sin 1/x|}_{\leq 1\ *} \leq |x-|<\delta=\varepsilon \ \forall\ x\in\mathbb{R}: 0<|x|<\delta$.

Zu *: $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ gilt: $|\sin\alpha|\leq 1$ (und $|\cos\alpha|\leq 1$), denn
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\leq 1 \Rightarrow |\sin\alpha|\leq 1$
(und $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha|\leq 1$)

A4.2.5 Betrachte die Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ und bestimme folgende Grenzwerte im Fall ihrer Existenz:

//**S1.7.2**(903) Vor. Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

//**S4.2.2**(2310) Vor: $f,g:D\to\mathbb{K}$ & HP z_0

//1.) Beh: $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ & $\lim_{z\to z_0} g(z)=w_1 \Rightarrow \exists \lim_{z\to z_0}(\alpha f(z)+\beta g(z))=\alpha w_0+\beta w_1$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{K})$

a) $\lim_{x\to a} f(x)$, $f(x)=\dfrac{x^k-a^k}{x-a}$ mit $k\in\mathbb{N}$ und $a\in\mathbb{R}$ sowie $D=\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Lös: Für $x\neq a$ gilt $f(x)=\dfrac{x^k-a^k}{x-a} \underbrace{=}_{S1.7.2} \sum_{\nu=0}^{k-1} x^\nu a^{k-1-\nu} \underbrace{\to}_{x\to a} \sum_{\nu=0}^{k-1} a^\nu a^{k-1-\nu} \underbrace{=}_{S4.2.2\,1.)} ka^{k-1}$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$, $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-11x+6}{x-2}$ mit $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lös: $x^3+2x^2-11x+6=(x-2)(x^2+4x-3)$.

$f(x)=x^2+4x-3 \underbrace{=}_{S4.2.2\,1.)} \lim_{x\to 2} f(x)=2^2+4*2-3=9$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ mit $D=(-1,1)\setminus\{0\}$.

Lös:Für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(-1,1)\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ gilt

$$f(x_n)=\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{x_n^2}\,\frac{1+\sqrt{1-x_n^2}}{1+\sqrt{1-x_n^2}}=\frac{1-(1-x_n^2)}{x_n^2(1+\sqrt{1-x_n^2})}=\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n^2}}$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=1/2$$

d) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ mit $D=\mathrm{R}\setminus\{0\}$.

Lös:Für $x\neq 0$ gilt: $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 0^{2k}}{(2k+1)!}\underbrace{=}_{A4.2.4d)} 0$$

A4.2.6 Bestimme folgende Grenzwerte im Fall ihrer Existenz:

a) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3+2x^2+1}{2x^3+x}$

Lös: $x\neq 0$: $\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}}\underbrace{\overset{x\to-\infty}{\longrightarrow}}_{S4.2.2} 2$

b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x+1}-3x)$

Lös:Für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in R mit $x_n\to\infty$ gilt $\frac{1}{x_n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$(\sqrt{9x_n^2+2x_n+1}-3x_n)\frac{\sqrt{9x_n^2+2x_n+1}+3x_n}{\sqrt{9x_n^2+2x_n+1}+3x_n}=\frac{9x_n^2+2x_n+1-9x_n^2}{\sqrt{9x_n^2+2x_n+1}+3x_n}=$$

$$\frac{x_n(2+\frac{1}{x_n})}{x_n\left(\sqrt{9+\frac{2}{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}+3\right)}\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{\sqrt{9}+3}=1/3$$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{(-1)^{[x]}x}{x^2+1}$, $x\in\mathrm{R}$

Lös:Es sei $\varepsilon>0$ baf. Setze $x_0(\varepsilon):=1/\varepsilon$. Dann gilt für $x\geq x_0(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{(-1)^{[x]}x}{x^2+1}-0\right|=\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\leq\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(-1)^{[x]}x}{x^2+1}=0$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x$, $x\in\mathbb{R}$

*//**S2.3.10** (1403)$[(1+1/n)^n,(1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung//*

// mit $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=:e$, $n\in\mathbb{N}$ d.h. 2,37<e<3,16

//#S2.3.4(1401) $a,b,x\in\mathbb{R}$, $a>0$: $x\mapsto a^x>0$ & ↑ falls $a>1$

// ohne Bew: $a^x \underset{a<b}{\underbrace{\lneq}} b^x$ für $x>0$

Lös: $x\to\infty \Rightarrow x>0$. Z.z. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$.

$$(1+1/n)^n \underset{n\to\infty}{\underbrace{\rightrightarrows}} e,\quad (1+1/n)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\rightrightarrows}} e,\quad (1+\overbrace{1/\underbrace{x}_{\geq[x]}}^{\leq 1/[x]})^x \underset{s2.3.4}{\underbrace{\leq}} (1+1/[x])^{[x]+1}$$

Für $x\in[n,n+1]$ gilt: $(1+1/x)^x\leq(1+1/n)^{n+1}$ & $(1+1/x)^x \underset{s2.3.4}{\underbrace{\geq}} (1+\dfrac{1}{\underbrace{n+1}_{\leq\frac{1}{x}}})^{n\leq x}$.

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}} \Rightarrow$$

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon):\ |(1+\frac{1}{n})^{n+1}-e|<\varepsilon\ \&\ |(1+\frac{1}{n+1})^n-e|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$x\geq n_0(\varepsilon)!!!:\ (1+1/x)^x-e\leq(1+1/n)^{n+1}-e<\varepsilon\ \&\ (1+1/x)^x-e\geq(1+\frac{1}{n+1})^n-e \underset{*}{\underbrace{>}} -\varepsilon \Rightarrow$$

$$|(1+1/x)^x-e|<\varepsilon\ \forall\ x\geq n_0(\varepsilon) \underset{\varepsilon\ beliebig,\ fest}{\underbrace{\Rightarrow}} \text{Beh}$$

* Damit > richtung beibehalten wird >-ε geschrieben... eine richtige Aussage

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}$

Lös: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!} - 1 - x\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^k k!}}{x^3} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-1+\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}-x(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8})-\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{x^{k+1}}{2^k k!}}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{8}+\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}-\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^{k-1}(k-1)!}}{x^3} = \frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\lim_{x\to 0}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-3}}{k!}+\lim_{x\to 0}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-3}}{2^{k-1}(k-1)!} =$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\lim_{x\to 0} x\underbrace{\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-4}}{k!}}_{<e^x}+\lim_{x\to 0} x\underbrace{\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-4}}{2^{k-1}(k-1)!}}_{<e^x} = \frac{1}{6}-\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

Lös:.. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} = 1/2$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{12}{8-x^2}\right)$

Lös: $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{\nu=0}^{n} a^\nu b^{n-\nu} \Rightarrow \underbrace{8}_{=2^3}-x^3=(2-x)(x^2+2x+4) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2-x}\left(1-\frac{12}{x^2+2x+4}\right)=\frac{1}{2-x}\,\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4})=\frac{-4-x}{x^2+2x+4}\xrightarrow[x\to 2]{}\frac{-4-2}{2^2+2*2+4}=\frac{1}{2}$$

h) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^n = \begin{cases} x^2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1-x^2)^n = 1, & falls\ x\in[-1,1]\ /\{0\} \\ 0, & falls\ x=0 \end{cases}$

Lösung: $|1-x^2|<1 \Leftrightarrow -1<1-x^2<1 \Leftrightarrow -2<-x^2<0 \Leftrightarrow 0<|x|<\sqrt{2} \Rightarrow$

Für $x\in[-1,1]$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^n = \dfrac{1}{1-(1-x^2)} = \dfrac{1}{x^2}$

S4.2.3(2320)

Sei $f:I\to\mathbb{R}$ monoton wachsend (fallend) und beschränkt, dann existiert $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$ $\forall$ HP von $I\cap(-\infty,x_0)$ $(I\cap(x_0,\infty))$

Bew:?????