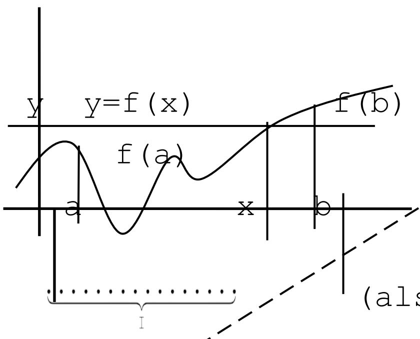
4.4(2500) **Hauptsätze über stetige Funktionen**

S4.4.1(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)

Vor: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b \in I$, $a<b$.
Beh: 1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\, y\ \exists$ mindestens ein $x \in [a,b]$ mit $f(x)=y$.

*//**D1.3.2** (504) Ein angeordneter Körper $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig //*
// (bezüglich <): $\Leftrightarrow\ \forall\, T \subset K$, $T \neq \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists\ \sup T \in K$.//
*//**S4.3.3** (2403) Rechenr Stetigkeit. Vor: $f,g: M \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0 \in M$.//*
//Beh: 1.) $f(x_0)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$). $\exists\ \delta>a$ mit $f(x)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$)
// $\forall\ x \in M \cap U_\delta(x_0)$.//

Bew: $f(a)<y<f(b)$, $T := \{t \in [a,b] \mid f(t) \leq y\} \subset [a,b]$, $a \in T \Rightarrow$



$T \neq \emptyset$ (da $f(t=a)<y$), T beschränkt $\underset{D1.3.2}{\Rightarrow}$ $\exists\ x = \sup T \in \mathbb{R}$

(Die zu b nächstgelegene Stelle), $x \in [a,b]$

#Prüfung ob = gilt, sup heißt ggf nur $f(x)>y$ #

1.Annahme: $f(x)>y \underset{S4.3.3\ 1.)}{\Rightarrow}$

$\exists\ \delta>0: f(t)>y\ \forall\ t \in [a,b] \cap U_\delta(x) \Rightarrow$

$f(t)>y\ \forall\ t: x-\delta<t \leq x \Rightarrow t \notin T \Rightarrow$ Widerspruch zur Def x

(als kleinstmögliche obere Schranke von T

2.Annahme: $f(x)<y \underset{S4.3.3\ 1.)}{\Rightarrow} \exists\ \eta>0: f(t)<y\ \forall\ t \in [a,b] \cap U_\eta(x) \Rightarrow$

$f(t)<y\ \forall\ t: x \leq t < x+\eta \Rightarrow x+\eta/2 \in T \Rightarrow$ Widerspruch zur Def x

(kleinstmögliche obere Schranke von T) $\underset{1.+2.Ann}{\Rightarrow} f(x)=y$

Andere Formulierung:

Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei ferner y eine beliebige Zahl mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y \leq f(a)$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x)=y$.

Bew: Sei $f(a) \leq y \leq f(b)$ angenommen (sonst betrachte $-f$). Sei $x = \sup\{\xi \in [a,b] : f(\xi) \leq y\}$. Wäre $f(x)<y$, so würde aus der Stetigkeit von f folgen, dass $f(x+h)<y$ wäre für genügend kleine $h>0$, was der Def von x widerspricht. Wäre $f(x)>y$, so wäre wegen der Stetigkeit auch $f(x-h)>y$ für hinreichend kleine $h>0$, was ebenfalls nicht sein kann. Also folgt $f(x)=y$.

Andere Formulierung:

*//**S4.3.2**(2403)Folgenstetigkeit//*

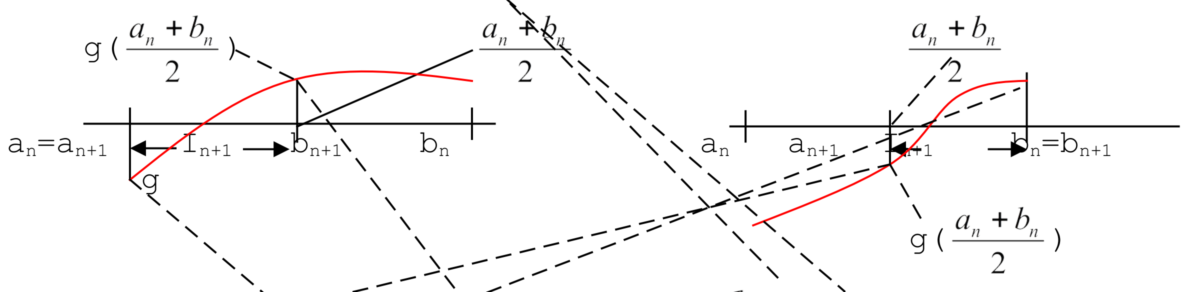
// Genau dann ist $f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge//

// (x_n) in D mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x_0)$ gilt.//

Bew: Konstruktiver Weg: f stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow$
O.B.d.A $f(a)<f(b)$ und $y\in(f(a),f(b))$. Wir betrachten
$g(x)=f(x)-y$, $g(a)<0$, $g(b)>0$. Gesucht, ein x mit $g(x)=0$.
Bisektionsverfahren
Definiere rekursiv Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ gemäß
$a_0:=a$, $b_0:=b$,
$I_0=[a_0,b_0]$, $g(a_0)<0$, $g(b_0)>0$,
$I_n=[a_n,b_n]$, $g(a_n)\le 0$, $g(b_n)\ge 0$ gegeben, dann setze

$$I_{n+1}=\begin{cases}\left[a_n,\dfrac{a_n+b_n}{2}\right], \text{falls } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\ge 0, \text{ d.h. } a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}<b_n\\ \left[\dfrac{a_n+b_n}{2},b_n\right], \text{falls } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)< 0, \text{ d.h. } b_{n+1}=b_n, a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}>a_n\end{cases}$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{a_n+b_n-2a_n}{2}=\frac{b_n-a_n}{2}=b_n-\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{2b_n-(a_n+b_n)}{2}=\frac{b_n-a_n}{2}$$



und es gilt $g(a_{n+1})<0$, $g(b_{n+1})\ge 0$, $0<b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)=$

$=\frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)$. $(a_n)_{n=0}^{\infty}\nearrow\le b_0$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}\searrow\ge a_0$, $a_n\le b_n$, $b_n-a_n\to 0$

$\overbrace{\underset{\text{mon. Konv}}{\Rightarrow}}^{\text{Intervallsch.}}$ $\exists\ x_0\in(a,b):a_n\to x_0\leftarrow b_n$ $\overbrace{\underset{d.h.\ f,g\ stetig}{\Rightarrow}}^{S4.3.2}$

$0\ge\lim_{n\to\infty}g(a_n)=g(x_0)=\lim_{n\to\infty}g(b_n)\ge 0\ \Rightarrow\ g(x_0)=0$

Bem: Falls $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0$ und $f(b)>0$, so
existiert mindestens eine Nullstelle $\xi\in(a,b)$ von f.

2.) $J:=f(I)$ ist ein Intervall $\subset\mathbb{R}$.
Bew: $J:=f(I)$, $c,d\in I$, $c<d$ $\Rightarrow$ $c=f(a)$, $a\in I$; $d=f(b)$, $b\in I$ $\Rightarrow$
$[c,d]\subset J$

Andere Formulierung:
Bew: Für 2 Funktionswerte $f(x_1),f(x_2)$, $x_1,x_2\in I$ gilt, jeder Wert
zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ ist auch Bildpunkt, d.h. aus
$f(I)$ (nach ZWS)

D4.4.1(2501)Sei $D\subset\mathbb{K}$ und sei $f:D\to\mathbb{K}$.
Ein Punkt $x_0\in D$ heißt Nullstelle von f, falls $f(x_0)=0$ ist.

Bem: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und seien $f(a)\ge 0$ und $f(b)\le 0$ oder umgekehrt.
Dann hat f mindestens eine Nullstelle auf $[a,b]$ und eine dieser
Nullstellen kann mit einem der folgenden Verfahren näherungsweise
berechnet werden:

1. Bisektionsmethode
   Falls $f(a)=0$ oder $f(b)=0$, ist nichts mehr zu tun. Andernfalls seien $a_0=a, b_0=b$. Dann haben $f(a_0)$ und $f(b_0)$ unterschiedliche Vorzeichen und somit ist $f(a_0)f(b_0)<0$. Sei jetzt $x=(a_0+b_0)/2$. Falls $f(x)=0$ ist, haben wir eine Nullstelle gefunden. Falls nicht, kann $f(a_0)f(x)<0$ sein und in diesem Fall seien $a_1=a_0$, $b_1=x$ gesetzt. Im anderen Fall gilt $f(b_0)f(x)<0$ und wir setzen $a_1=x$, $b_1=b_0$. In beiden Fällen ist $a_1<b_1$ und $f(a_1)f(b_1)<0$.
   Sind allgemein schon Zahlen a_n,b_n mit $a_n<b_n$ und $f(a_n)f(b_n)<0$ gegeben, so sei jetzt $x=(a_n+b_n)/2$. Wenn $f(x)=0$ ist, stoppen wir das Verfahren. Wenn $f(a_n)f(x)<0$ ist, seien $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=x$ gesetzt. Wenn dagegen $f(b_n)f(x)<0$ ist, seien $a_{n+1}=x$, $b_{n+1}=b_n$ gesetzt. Insgesamt sehen wir, dass dieser Algorithmus entweder nach endlich vielen Schritten eine Nullfolge von f findet oder aber 2 Zahlenfolgen $(a_n),(b_n)$ liefert, für die immer $a_n<b_n$ und $f(b_n)f(x)<0$ ist, so dass nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von f im Intervall (a_n,b_n) liegen muß. Nach Konstruktion ist (a_n) wachsend und (b_n) fallend, und $b_n-a_n=(b-a)2^{-n}$. Also folgt Konvergenz beider Folgen gegen denselben Grenzwert a, und dieser muss dann Nullstelle von f sein.(siehe auch oben)
2. Regula Falsi
   Wir gehen genau wie bei der Bisektionsmethode vor, nur setzen wir in jedem Schritt x gleich der Schnittstelle der Geraden durch $(a_n,f(a_n))$ und $(b_n,f(b_n))$ mit der x-Achse,
   d.h. $x=(a_nf(b_n)-b_nf(a_n))/(f(b_n)-f(a_n))$.

Verfahren mit schnellerer Konvergenz gegen die Nullstelle siehe später Newtonverfahren.

Bsp: Mit $x_0=\sqrt{2}$ (>1,41), $x_1=\sqrt{6-2\sqrt{3}}$ (<1,6) gilt: Die Funktion cos x ist positiv für $x\in[0,x_0)$ und hat mindestens eine Nullstelle auf dem Intervall $[x_0,x_1]$
Siehe auch S3.6.3

//**S4.4.1**(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)//
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.//
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.//

Bew:Aus $\underbrace{1-\frac{x^2}{2}}_{0\ für\ x=x_0} \le \cos x \le \underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}_{<0\ für\ x=x_1}$ folgt $\cos x_1 \le 0 \underset{S4.4.1}{\Rightarrow}$ Beh

A4.4.1 Beweise, dass ein Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle hat.

Bew:Es sei $f(x)=\sum_{k=0}^{2n-1} a_k x^k$ $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n-1}\neq 0$.

ObdA sei $a_{2n-1}>0$ (sonst f durch –f ersetzen)

Für $x\neq 0$ gilt $g(x):=\frac{f(x)}{a_{2n-1}x^{2n-1}}=\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{a_k}{a_{2n-1}}*\underbrace{x^{\overbrace{k-2n+1}^{<0}}}_{\to 0, x\to\pm\infty}+\underbrace{\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-1}}x^{2n-1-2n+1}}_{=1}\Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=1=\lim_{x\to-\infty} g(x)\Rightarrow\exists\ x_1>0$ mit $g(x)\geq 1/2\ \forall\ x\geq x_1\Rightarrow$

$f(x_1)=g(x_1)\,a_{2n-1}x_1^{2n-1}>0.$

$\exists\ x_2<0$ mit $g(x)\geq 1/2\ \forall\ x\leq x_2\Rightarrow$

$f(x_2)=\underbrace{g(x_2)}_{>0}\underbrace{a_{2n-1}}_{>0}\underbrace{x_2^{2n-1}}_{<0}<0.$

$\underset{S4.4.1}{\Rightarrow}$ Da f stetig, existiert $\xi\in(x_2,x_1)$ mit $f(\xi)=0$

A4.4.2

a) Geg sei eine stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(0)=f(1)$.

Zeige:Es existiert mindestens ein $\xi\in[0,1/2]$ mit $f(\xi)=f(\xi+1/2)$

*//**S4.3.3** (2403)Rechenregeln für Stetigkeit//*

//Vor:f,g: $M\to\mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0\in M$.//

//Beh: 2.) $\alpha f+\beta g$ stetig in x_0 $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{C}$)//

Lös: [——|—]———|—]

0 ξ ½ ξ+1/2 1

Definiere $g:[0,1/2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(x+1/2)\underset{S4.3.3\ 2.)}{\Rightarrow}$ g stetig.

Fall 1: $g(0)=0\Rightarrow f(0)=f(1/2)\Rightarrow$ Beh mit $\xi=0$

Fall 2: $g(0)\neq 0\Rightarrow$

$g(1/2)=f(1/2)-f(1)=f(1/2)-f(0)=-g(0)\Rightarrow$

$g(0)$ und $g(1/2)$ haben verschiedene Vorzeichen $\Leftrightarrow$

$\exists\ \xi\in(0,1/2)$: $g(\xi)=0\Rightarrow$ Beh

b) $[0,1]\to[0,1]$, Surjektiv oder injektiv?

● $f(x) : x\mapsto x^k$, $k\in\mathbb{N}$ beliebig

Lös: Seien $x,y\in[0,1]$, $y>x$ (d.h. $y>0$) $\Rightarrow$

$$y>x \underbrace{\Rightarrow}_{y>0} y^2>yx \underbrace{\Rightarrow}_{y>x} y^2>x^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y>0} y^3>yx^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y>x} y^3>x^3 \text{..usw} \underbrace{\Rightarrow}_{Induktion} y^k>x^k\ \forall\ k\in\mathbb{N} \Rightarrow f\uparrow$$

$\Rightarrow$ f injektiv

//**S4.4.1**(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)

//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.

//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

$f(x)=x^k$ stetig, $f(0)=0$, $f(1)=1 \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1} \forall\ y\in[0,1]: y=f(x) \Rightarrow$

f surjektiv

● ● $g(x) : x\mapsto\sin(\pi x)$

Lös: $g(0)=g(1)=0 \Rightarrow$ nicht injektiv

sin und πx sind stetig und $g(0)=0$, $g(1/2)=1 \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1}$ f surjektiv

● ● ● $h(x): x\mapsto \frac{1}{2}x$

Lös: $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y \Rightarrow x=y \Rightarrow$ h injektiv

z.B. $1\neq h(\underbrace{x}_{\in[0,1]}) \Rightarrow$ nicht surjektiv

c) Gesucht: Bijektive,stetige Funktion $f:(0,1)\to(0,\infty)$

//**S4.4.1**(2500) Vor: $I\subset\mathbb{R}$ Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.

//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

Lös: $f(x)=-\log x$,

Bew: $\log\uparrow \Rightarrow f\downarrow$ und stetig

$f(1)=0$ & $f(0_+)=\infty \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1} \forall\ y\in(0,\infty)\ \exists\ x\in(0,1): y=-\log x \Rightarrow$

f surjektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{\log und - \log injektiv}$ f stetig bijektiv

d) Es sei $a_1<a_2<\ldots<a_n$ ($n\in\mathbb{N}$). Zeige:

a) Die Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x-a_k}=0$ besitzt genau n-1 reelle Lösungen

Lös: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x-a_k}=0$ …multipliziert mit $\prod\limits_{j=1}^{n}(x-a_j) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_j)=0$.

\# Bsp: $\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{1}{x-a_k}=0 \Leftrightarrow \prod\limits_{j=1}^{3}(x-a_j)\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{1}{x-a_k}=0 \Leftrightarrow$

\# $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\left(\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{x-a_3}\right)$

\# $=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)=\sum\limits_{k=1}^{3}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(x-a_j)=0 \Leftrightarrow$

\# $P(x):=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)$, Grad=3-1=2

\# $P(\underbrace{a_{\underset{=k}{1}}}_{=x})=(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_1-a_1)(a_1-a_3)+(a_1-a_1)(a_1-a_2)=$

$(a_1-a_2)(a_1-a_3)=\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(a_1-a_j)>0$

\# $P(\underbrace{a_{\underset{=k}{2}}}_{=x})=\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(a_2-a_j)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)<0$

\# $P(\underbrace{a_{\underset{=k}{3}}}_{=x})=\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(a_2-a_j)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)>0$ $(a_1<a_2<\ldots<a_n \Rightarrow (a_3-a_1)\ldots(a_3-a_n)>0)$

Definiere $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_j)$ ist ein Polynom vom Grad n-1

$$P(a_k)\underset{k=1,\ldots,n}{=}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)=\prod\limits_{j=1}^{k-1}\underbrace{(a_k-a_j)}_{>0}\prod\limits_{j=k+1}^{n}\underbrace{(a_k-a_j)}_{<0}=\underbrace{\prod\limits_{j=1}^{k-1}(a_k-a_j)\prod\limits_{j=k+1}^{n}(a_j-a_k)}_{>0}(-1)^{n-k}$$

$\Rightarrow P(a_n)>0,\ P(a_{n-1})<0,\ P(a_{n-2})>0$ usw $\underset{ZWS\ 4.4.1}{\Leftrightarrow}$

$\exists\ \xi_k\in(a_k,a_{k+1})$ mit $P(\xi_k)=0$ $(k=1,\ldots,n-1)$

d.h P besitzt genau n-1 reelle Nullstellen ($P(x)=nx^{n-1}+\ldots$) $\Rightarrow$ P besitzt max n-1 Nullstellen) und somit besitzt die Gleichung genau n-1 Lösungen.

b) Die Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k} = c$ $(c \neq 0)$ besitzt genau n reelle Lösungen

Lös: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k} = c \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x-a_k) - c\prod\limits_{j=1}^{n} (x-a_j) = 0.$

Definiere $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q(x) = P(x) - c\prod\limits_{j=1}^{n} (x-a_j)$. Dann gilt für $k=1,\ldots n$:

$Q(a_k) \underset{x=a_k \Rightarrow a_k - a_{j=k}=0}{=} P(a_k) \Rightarrow$ Für $k=1,\ldots,n-1$ $\exists\, \xi_k \in (a_k, a_{k+1})$ mit $Q(\xi_k)=0$.

Andererseits gilt im Fall >0 ???:

$$Q(x) = \underbrace{P(x)}_{\text{grad } n-1} - c\underbrace{\prod_{j=1}^{n} (x-a_j)}_{\text{grad } n} = x^n \underbrace{\left(\underbrace{\frac{P(x)}{x^n}}_{\to 0} - \underbrace{c\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{a_j}{x}\right)}_{\to c}\right)}_{-c} \text{ ??? } \# \to -cx^n \to \pm\infty \quad \underset{c): a_1>0, a_n>0}{\Rightarrow}$$

\# $\exists\, \xi_n \in (-\infty < -cx^n, a_1)$ oder $\xi_n \in (a_n < -cx^n < \infty)$: $Q(\xi_n)$

A4.4.3 Betrachte für $\alpha\in\mathbb{R}$ die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definiert

durch $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha} * \log x \ \mathit{für}\ x>0 \\ 0 \ \mathit{für}\ x=0 \end{cases}$.

Zeige, dass f auf $(0,\infty)$ stetig ist,
dass f im Punkt $x_0=0$ aber nur dann stetig ist, wenn $\alpha>0$ ist

*//**S4.3.3** (2403)Vor:f,g: $M\to\mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0\in M$.//*
// 2.)fg stetig in x_0,//
*//**S3.2.11** (1753)Expotentialreihe//*

// Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.//

// $\forall\, z\in\mathbb{R}$ gilt weiter $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! = \exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.//

Bew: x^{α} und $\log x$ sind stetig auf $(0,\infty)$ $\underset{S4.3.3\,2.)}{\Rightarrow}$ $f(x)=x^{\alpha}\log x$ stetig auf $(0,\infty)$.

f stetig in $x_0=0$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{x\to 0_+} f(x)}_{\underset{*}{=}\begin{cases}-\infty,\text{falls } \alpha\le 0\\ 0,\text{falls } \alpha>0\end{cases}} = f(0)=0 \Leftrightarrow \alpha>0$ siehe *

Bew*: (.) $x^{\alpha}=\exp(\alpha\log x) \underset{x\to 0_+}{\to} \begin{cases}\infty, \text{falls } \alpha<0\\ 1, \text{falls } \alpha=0 \\ 0, \text{falls } \alpha>0\end{cases} \Rightarrow$

$x^{\alpha}\log x \underset{x\to 0_+}{\to} -\infty$ falls $\alpha\le 0$ (da $\log x \underset{x\to 0_+}{\to} -\infty$)

(..)Sei $\alpha>0$:

$x^{\alpha}\log x \underset{x\to 0_+}{\le} 0$, $-x^{\alpha}\log x \underset{x\to 0_+}{\ge} 0$

$x^{-\alpha}=\exp(\alpha\log(1/x))\ \# \underset{S3.2.11.)}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha\log(1/x))^{\nu}}{\nu!} = 1+\frac{\alpha\log(1/x)}{1!}+\frac{(\alpha\log(1/x))^2}{2!}+\ldots \ge$

$1+\frac{\alpha\log(1/x)}{1!}+\frac{(\alpha\log(1/x))^2}{4}\ \#= (1+\frac{\alpha\log(1/x)}{2})^2 \ge \frac{\alpha^2}{4}(\log 1/x)^2$

$\underset{x^{\alpha}\le\frac{4}{\alpha^2(\log 1/x)^2}}{\Rightarrow}$ $0<-x^{\alpha}\log x = x^{\alpha}\log 1/x \le \frac{4}{\alpha^2}\frac{1}{\log(1/x)} \underset{x\to 0_+}{\to} 0$

da $\log(1/x)\to\infty$, $(1/x\to\infty,\ x\to 0_+)$ $\Rightarrow$ $-x^{\alpha}\log x \underset{x\to 0_+}{\to} 0$ $\Rightarrow$ $x^{\alpha}\log x \underset{x\to 0_+}{\to} 0$

A4.4.4 Untersuche die Funktion $f:(0,1)\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x)=\begin{cases} 1/q \text{ für } x=p/q \text{ mit } p,q\in \mathbb{N}, \text{ wobei der Bruch gekürzt sei} \\ \quad 0 \text{ für } x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

auf Stetigkeit in jedem Punkt des Intervalls (0,1)

//***S4.3.2***(2403)*Folgenstetigkeit*//
// *Genau dann ist* $f=D\to\mathbb{K}$ *stetig in* $x_0\in D$, *wenn für jede Folge*//
// (x_n) *in D mit* $x_n\to x_0$ *auch* $f(x_n)\underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x_0)$ *gilt.*//

Lös:Beh:(.)f ist unstetig in jedem $x_0\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$
(..)f ist stetig in jedem $x_0\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$
Bew:(.)Sei $x_0\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ beliebig, fest. Wähle eine Folge (x_n) in
$\{(0,1)\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x_0\}$ mit $x_n\underset{n\to\infty}{\rightarrow}x_0$ (solch eine Folge existiert..
z.B $x_1\in(0,1)\setminus\{\mathbb{Q}),x_0\}$, $x_{n+1}=\frac{x_0+x_n}{2}$)rekursiv# $\Rightarrow$
$f(x_n)=0 \Rightarrow 0\neq f(x_0)$, da $x_0\in\mathbb{Q}\cap(0,1)$ $\underset{S4.3.2}{\Rightarrow}$ f unstetig bei x_0
(denn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht oder...und ist $\neq f(x_0)$)

//**D4.3.1**(2400) $D\subset\mathbb{R}$. $f: D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in D:\Leftrightarrow$

// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(x)\in U^{\varepsilon}(f(x_0))\ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$ oder äquivalent....

// $(\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta)$.

// f heißt stetig auf $A\subset D:\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.

// **S1.5.15**(759)

//2.) $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b$ (.) $\exists\ q\in\mathbb{Q}$ mit $a<q<b$ und (..) $\exists\ d\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $a<d<b$

#(..) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: |f(\underbrace{x}_{\in(0,1)\subset Q}) - \overbrace{f(\underbrace{x_0}_{\in(0,1)/Q})}^{=0}|=f(x)<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$.

$x\in(0,1)\cap Q \Rightarrow x=\frac{p}{q}$ & $p<q$

Betrachtung $M:=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},...,\frac{4}{5},...,\frac{1}{q},\frac{2}{q},...,\frac{q-1}{q}\}$

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ q_\varepsilon$: $|f(\underbrace{x}_{\frac{p}{q_\varepsilon}\in M}) - \overbrace{f(\underbrace{x_0}_{\in(0,1)/Q})}^{=0}| = f(\underbrace{x}_{\frac{p}{q_\varepsilon}\in M}) = \frac{1}{q_\varepsilon}<\varepsilon \Rightarrow q_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon} \underset{q_\varepsilon\in N}{\Rightarrow}$

$q_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1>q_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{q_0}<\varepsilon$

Betrachtung $M_0:=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},...,\frac{4}{5},...,\frac{1}{q_0},\frac{2}{q_0},...,\frac{q_0-1}{q_0}\}$

Wähle $0<\delta:=\min\{|\underset{\notin Q}{x_0}-m|:m\in M_0\}$;

Bsp: $\varepsilon=\frac{1}{4}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}7071 \Rightarrow \frac{1}{q_{0,\varepsilon}}<\frac{1}{4} \Rightarrow q_{0,\varepsilon}>4 \Rightarrow$

$M_{0;1/4}:=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\}$

Betrachtung Ordnung: $\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\cong 0{,}7071;\frac{3}{4};\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\delta:=\min\{|x_0-m|:m\in M_{0;1/4}\}=|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}|\cong 0{,}04050$ $(|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}|>\delta)$

Sei $m\in M'_{0;1/4}:=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\}$ (2/3 fehlt)

$\Rightarrow |m-\approx 0{,}7071| \underset{!!!}{>} \delta=|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}|\cong 0{,}04050$

Betrachtung $M_{q>5}:=\frac{p}{q}\in Q\setminus M_{0;1/4}=\{\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},...\frac{6}{7},...\}$

S1.5.15(759): $\exists\ m\in M_{q>5;1/4}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{2}{3}$: $|m-\frac{\sqrt{2}}{2}|<\delta \Rightarrow q>5 \Rightarrow 1/q<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}=\varepsilon$

$\Rightarrow\ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$, $x=p/q\in(0,1)$ mit $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$ teilerfremd gilt:

$x\notin\underbrace{M}_{\subset Q} \Rightarrow q>1/\varepsilon \Rightarrow 1/q<\varepsilon$.

Wegen $f(x)=\begin{cases} 0, \text{falls } x\in U_\delta(x_0)\setminus\mathbb{Q} \\ 1/q, \text{falls } x=p/q\in U_\delta(x_0)\cap\mathbb{Q}\end{cases}$ wobei $p\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{N}$

teilerfremd und $x\notin M\ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$ folgt $|f(x)-\underbrace{f(x_0)}_{=0}|=f(x)<\varepsilon\ \ \forall x\in U_\delta(x_0)$

Bew: Betrachte die Menge
$M:=\{p/q:\ p\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{N}$ teilerfremd, $p/q\in(0,1)$, $q\geq 1/\varepsilon\}$.
Mit $q_0:=[1/\varepsilon\rfloor$ gilt dann

$$\underbrace{M}_{\text{nur teilerfremde Elemente}}\subset\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},...,\frac{4}{5},...,\frac{1}{q_0},\frac{2}{q_0},...,\frac{q_0-1}{q_0}\}$$

insbesondere ist M endlich!..

Sei $p/q \in M \Rightarrow p/q \in (0,1)$, $q \le 1/\varepsilon \Rightarrow 1 \le p < q$ und $1 \le q \le q_0$.
($p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd).

Wähle $0 < \delta := \min\{|\underbrace{x_0}_{\notin Q} - m| : m \in M\}$, möglich denn $x_0 \notin \mathbb{Q}$ und M ist endlich.

$\Rightarrow \forall\, x \in U_\delta(x_0)$, $x = p/q \in (0,1)$ mit $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd gilt:

$x \notin \underbrace{M}_{\subset Q} \Rightarrow q > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/q < \varepsilon$.

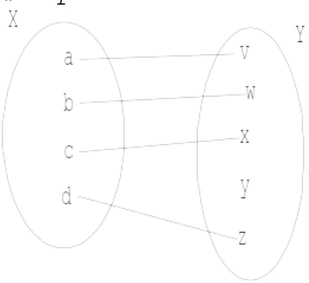
Wegen $f(x) = \begin{cases} 0, \text{falls } x \in U_\delta(x_0) \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q, \text{falls } x = p/q \in U_\delta(x_0) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$ wobei $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$

teilerfremd und $x \notin M$ $\forall\, x \in U_\delta(x_0)$ folgt $|f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{=0}| = f(x) < \varepsilon \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$

A4.4.5 Es sei $f:[0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeige: Es existiert mindestens ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Bew: (.) $f(0)=0$ oder $f(1)=1 \Rightarrow$ Beh. richtig
(..) $f(0)>0$ und $f(1) \le 1$. Beachte $f[0,1] \subset [0,1]$.
Betrachte $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x \Rightarrow$
g stetig auf $[0,1]$ und $g(0) = f(0) > 0$, $g(1) = f(1) - 1 < 0 \underset{ZWS\,4.4.1}{\Rightarrow}$
$\exists\, \xi \in [0,1] : g(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

*//**D0.2.4**(200) Eine Abbildung(Funktion) f: $X \to Y$ heißt//*
// 1.)injektiv(eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \ne x_2 \Rightarrow$ //
// $f(x_1) \ne f(x_2)$, d.h jedes $y \in Y$ hat max 1 Urbild $x \in X$ mit $y = f(x)$,
//d.h. aus $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$//
#Bsp



Wertebereich Y kann auch "zu groß" gewählt sein

f, d.h. für <u>alle</u> x Element von X
existiert <u>genau ein</u> y.....

S4.4.2(2510)

a) Vor: $f: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh: f injektiv ⇔ f streng monoton. (genau dann injektiv, wenn...)

Bew: "⇐" #Stetigkeit spielt hier keine Rolle wie folgt#

f streng monoton wachsend (oBdA, sonst $-f$).

Gilt $x_1 \neq x_2$, so ist $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$ und weil $f\uparrow$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw $f(x_2) < f(x_1)$, d.h. $f(x_1) \neq f(x_2)$, f ist also injektiv.

"⇒" $f: I \to \mathbb{R}$ sei stetig und injektiv, d.h. für $x_1 < x_2$ aus I gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o.B.d.A. $f(x_1) < f(x_2)$)

#Betrachtung des Bereichs ● $[x_1, x_2]$, ●● I

● Annahme: $\exists\ \tilde{x} \in (x_1, x_2)$ mit

$f(\tilde{x}) \underset{inj}{\lneq} f(x_1)$. Mit ZWS4.4.1 gilt:

$\exists\ x^* \in (\tilde{x}, x_2)$ mit

$f(x^*) = f(x_1)$ Widerspruch zur Injektivität

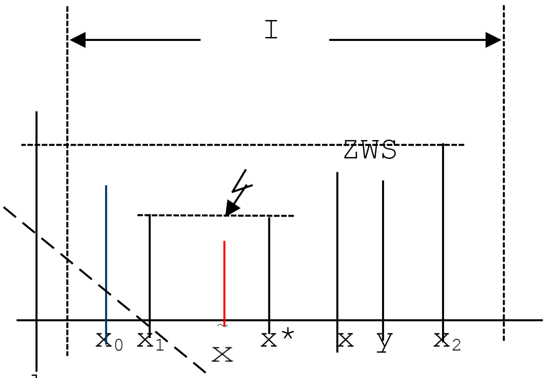
⇒ $\forall\ x \in (x_1, x_2)$ gilt

$f(x_1) < f(x) < f(x_2)$

Annahme: $\exists\ x, y: x_1 < x < y < x_2$ mit

$f(x) \underset{inj}{\gneq} f(y)$

Widerspruch zur Inj



⇒ f ist streng monoton auf $[x_1, x_2]$

●● Annahme: links x_1 Monotonie verletzt: $\exists\ x_0 < x_1$ mit $f(x_0) > f(x_1)$

Gilt $\begin{cases} f(x_0) < f(x_2) \\ f(x_0) > f(x_2) \end{cases}$ so existiert (ZWS4.4.1) ein $\hat{x} \in \begin{matrix} (x_1, x_2) \\ (x_0, x_1) \end{matrix}$

mit $\begin{cases} f(\hat{x}) = f(x_0) \\ f(\hat{x}) = f(x_2) \end{cases}$ Widerspruch zur Injektivität

Analog rechts von x_2 ⇒ $f\uparrow$ auf I

b) $X\subseteq\mathbb{R}$, $K\subseteq X$, K kompakt, f stetig auf K $\Rightarrow$ f(K) kompakt
(das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt

//**D4.1.1**(2200) Sei $M\subset\mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$:
//5.)M heißt kompakt:$\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt
//4.)M' sei die Menge aller HP von M und
// $\overline{M}:=M\cup M'$ die abgeschlossene Hülle von M.
// M heißt abgeschlossen: $\Leftrightarrow$ $M=\overline{M}$ $\Leftrightarrow$ $M'\subset M$.# $M=\overline{M}=M\cup M'$ $\Leftrightarrow$ $M'\subset M$
//3.)$x_0\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.
// Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $\delta>0$ sei $\overset{\circ}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z-z_0|<\delta\}$.
//1.)$z_0\in M$ heißt innerer Punkt von M:$\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $U_\delta(z_0)\subset M$.
// $\overset{\circ}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M
//3.)$x_0\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:$\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$.
//Bem:Äquivalent dazu:
// 1.)Mit $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0):=U_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ (sog punktierte Umgebung von z_0)
// gilt $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)\cap D\neq\emptyset$ $\forall$ $\varepsilon>0$
// 2.)$\exists$ (z_n) mit $z_n\in D\setminus\{z_0\}$, sodass gilt: $z_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}z_0$
//**S4.3.3**(2409) $f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $z_0\in D$ $\Leftrightarrow$
// für jede Folge (z_n) in D mit $z_n\underset{n\to\infty}{\to}z_0$ gilt auch $f(z_n)\underset{n\to\infty}{\to}f(z_0)$.
//**S2.2.4**(1308) Bolzano Weierstraß (BW)(siehe auch S2.4.1)
// Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

Bew: (y_n) Zahlenfolge $y_n\in f(K)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.
Zu zeigen (y_n) hat konvergente Teilfolge.
$\exists$ $x_n\in K$: $f(x_n)=y_n$ $\underset{K\text{ kompakt, }S2.2.4}{\Rightarrow}$ $\exists$ Teilfolge (x_{n_k}) von x_n: $x_{n_k}\underset{k\to\infty}{\to}\xi$
$\underset{f\text{ stetig}}{\Rightarrow}$ $y_{n_k}\underset{k\to\infty}{\to}f(\xi)$

Bsp: $f:[0,1]\to[0,\infty)$ ist nie stetig,
da $[0,\infty)$ zwar abgeschlossen aber unbeschränkt $\Rightarrow$ nicht kompakt

A4.4.6 Zeige

a) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x^6+1}{x-1}=0$ besitzt im Intervall (0,1) mindestens eine Lösung

*//**S4.4.1**(2500) Zwischenwertsatz (ZWS)//*
//Vor:Sei $I\subset R$ ein Intervall $\vee$ $f:I\to R$ stetig auf I, a,b∈I, a<b.//
//Beh:1.) f(a)<y<f(b) : ∀ y ∃ mindestens ein x∈[a,b] mit f(x)=y.//

Bew:Sei $f(x):=\frac{x^2+1}{x}+\frac{x^6+1}{x-1}$, $x\in(0,1)$ ⇒

f stetig auf (0,1) da f rationale Funktion und Nenner≠0,

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)=-\infty$, ⇒ ∃ a,b∈(0,1), a<b mit f(a)>0, f(b)<0 $\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{f\ stetig}}_{S4.4.1}$

∃ ξ∈[a,b] (insbesondere ξ∈(0,1)) mit f(ξ)=0

Man kann eine(die) Lösung ξ∈(0,1) von f(ξ)=0 noch genauer eingrenzen:

$f(1/2)=\#\frac{1/4+1}{1/2}+\frac{1/64+1}{-1/2}=1/2(5/4-(\frac{1}{64}+1))=1/2(1/4-\frac{1}{64}))=\frac{15}{128}>0\#$

$=1/2(3/4-(\frac{1}{64}+1))=2(1/4-1/64)=15/32>0$

$f(3/5)=\frac{\frac{9}{25}+1}{3/5}+\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6+1}{-2/5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{34}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^6+5^6}{5^5}=-\frac{3281}{9375}<0$

$\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{f\ stetig}}_{ZWS4.4.1}$ ⇒ ∃ ξ∈(1/2,3/5):f(ξ)=0

b) Die Gleichung $xe^x=1$ hat genau eine reelle Lösung

//**D0.2.4**(200) Eine Abbildung(Funktion) $f: X\to Y$ heißt//
// 1.) injektiv(eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x_1,x_2\in X$ mit $x_1\neq x_2 \Rightarrow$//
// $f(x_1)\neq f(x_2)$, d.h jedes $y\in Y$ hat max 1 Urbild $x\in X$ mit $y=f(x)$, d.h./ // aus $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$//

Bew: Sei $f(x):=xe^x$, $x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Existenz einer Lösung: $f(0)=\underbrace{0}_{<1}$, $f(1)=e>1 \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S\,4.4.1}}^{f\ stetig} \exists\ \xi\in(0,1): f(\xi)=1$.

Eindeutigkeit der Lösung: $f\uparrow$ auf $(0,\infty)$, denn sei

$0<x_1<x_2: f(x_1)=\underbrace{x_1}_{<x_2}\underbrace{e^{x_1}}_{<e^{x_2}}<x_2e^{x_2}=f(x_2)$ (da e-Fkt$\uparrow$)

Sei $\tilde{\xi}\in\mathbb{R}$ eine Lösung von $f(x)=1$ (d.h. $f(\tilde{\xi})=1$).

$f(x)=xe^x\le 0<1\ \forall\ x\le 0 \Rightarrow \tilde{\xi}>0 \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{auf\ (0,\infty)}}^{f\ injektiv} \tilde{\xi}=\xi$