S4.4.3(2530) Umkehrfunktion und Stetigkeit

Vor: • Intervall $I\subset\mathbb{R}$,

•• $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, d.h. $J=f(I) \underset{ZWS\,4.4.1\,Bem\,2.)}{\Rightarrow} J:=f(I)$ ein Intervall.

••• $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton

Aussage: Auf dem Intervall $J=f(I)$ gilt

• Zu f $\exists$ im gleichen Sinn wie f streng monotone f^{-1}

•• Zu f $\exists$ stetige f^{-1} auf dem Intervall $J=f(I)$

*//**S4.4.1** (2500) Zwischenwertsatz (ZWS)//*

//Vor: Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall & $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.//

//Beh: 1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall$ y $\exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.//

//Bem: 2.) $J:=f(I)$ ist ein Intervall $\subset\mathbb{R}$.//

//**S4.4.2** (2506) Es sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f genau dann injektiv,
// wenn f streng monoton ist.//

//**S4.3.2**(2407) Folgenstetigkeit//
// Genau dann ist $f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge //
// (x_n) in D mit $x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0$ auch $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x_0)$ gilt.//

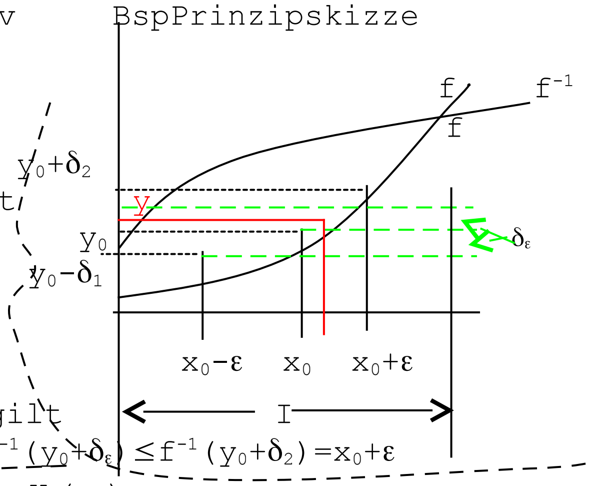
Bew: • Nach S4.4.2 $f:I\to J$ injektiv $\Rightarrow$

$I=[a,b]$, $\forall\, x\in I: f(a) \underset{f\ monoton}{\lneqq} f(x) \underset{f\ monoton}{\lneqq} f(b) \Rightarrow f(x)\in[f(a),f(b)]$

$y\in[f(a),f(b)] \underset{S4.4.1}{\Rightarrow} \exists\, x\in[a,b]: f(x)=y \;\; \forall\, y\in[f(a),f(b)] \Rightarrow$

$f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ surjektiv

BspPrinzipskizze



$\Rightarrow$ f bijektiv $\Rightarrow \exists\, f^{-1}:J\to I$

O.Bd.A. sei f $\uparrow$: $x_1<x_2 \Leftrightarrow$
$f(x_1)=y_1<y_2=f(x_2)$, $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow$
$y_1<y_2$. •• Sei $x_0\in J$ dann existiert
$x_0\in I$ mit $y_0=f(x_0)$, $\varepsilon>0$
(so klein, dass $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset I$)
$\Rightarrow \exists\, \delta_1>0,\ \delta_2>0$:

$f(x_0-\varepsilon)=y_0-\delta_1 \underset{f\uparrow}{\lneqq} y_0+\delta_2=f(x_0+\varepsilon)$.

Wähle $\delta_\varepsilon:=\min(\delta_1,\delta_2)>0$. Weil $f^{-1}\uparrow$ gilt

$x_0-\varepsilon=f^{-1}(y_0-\delta_1)\le f^{-1}(y_0-\delta_\varepsilon)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_0+\delta_\varepsilon)\le f^{-1}(y_0+\delta_2)=x_0+\varepsilon$

$\forall\, y\in U_{\delta_\varepsilon}(y_0)\subset J$, d.h., $f^{-1}(U_{\delta_\varepsilon}(y_0))\subset U_\varepsilon(x_0)$

$\# \underset{D=U_{\delta_\varepsilon}(y_0)}{\Rightarrow} \forall\, (\underbrace{y_n}_{\in U_{\delta_\varepsilon}(y_0)})_{n=1}^{\infty},\ y_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} y_0 \Leftrightarrow f^{-1}(U_{\delta_\varepsilon}(y_n)) \underset{f\ bij\Rightarrow f^{-1}\ bij}{\rightarrow} f^{-1}(U_{\delta_\varepsilon}(y_0)) \Rightarrow\#$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist stetig.

//**S4.4.2**(2507) Vor: $f:I\to\mathbb{R}$ stetig. Beh: f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton.
(2531)Korollar S4.4.2
(.) log x: $(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend

Bew: $e^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ bijektiv, $\uparrow$ und stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.3}$ Beh

(..)sinh x: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist $\uparrow$ und stetig, $f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ d.h. er hat Umkehrfunktion:Arsinh: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}\uparrow$ und stetig.

Bew:stetig weil PR. $\sinh x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, KR $R=\infty$,

$\uparrow$ auf $[0,\infty)$, weil $x^{2\nu+1}\uparrow$, $\uparrow$ auf $\mathbb{R}$ weil $\sinh x=-\sinh(-x)$

(...)cosh x: $[0,\infty)\to[1,\infty)$ ist $\uparrow$ und stetig und surjektiv, seine Umkehrfunktion Arcosh x: $[1,\infty)\to[0,\infty)$ ist $\uparrow$ und stetig.

A4.4.7 Zeige die Stetigkeit der Funktion
a) a^x auf $\mathbb{R}$, wobei $a\in\mathbb{R}_+$.
//**S4.3.3**(2408) Vor:f,g mit $M\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.//
// 3.)Sind $f:D\to D_1$ stetig in $x_0\in D$ und $g:D_1\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$ bzw//
// $f(x_0)\in D_1$, so ist die Hintereinanderausführung //
// $g\circ f:D\to\mathbb{K}$ stetig in x_0.//

Lös: $a^x=e^{x\log a}$, f:x & xlog a stetig, Werte in $\mathbb{R}$,

g:y & e^y stetig auf $\mathbb{R}\underbrace{\Rightarrow}_{S4.3.3\ 3.)}a^x=g\circ f(x)$ stetig

b) x^a auf $\mathbb{R}_+$, wobei $a\in\mathbb{R}$.

//**S4.4.3**(2530) Ist $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf I, so besitzt f //
//auf dem Intervall J=f(I) eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig ist/
//und im selben Sinne wie f streng monoton ist.//
Lös: $x^a=e^{a\log x}=h\circ g\circ f(x)$.

f:x $\underbrace{\log x}_{=f^{-1}(\exp(x))}\in\mathbb{R}_+\underbrace{stetig}_{S4.3.3}$. g: $\underbrace{y}_{\in R}$ ($\underbrace{a}_{\in R}$ y) $\in\mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$. h: $\underbrace{z}_{\in R}\mapsto e^z$ stetig auf $\mathbb{R}$,

$\Rightarrow$ x^a stetig auf $\mathbb{R}_+$.

S4.4.4(2532)

a) sin x>0 ∀ x∈(0,2]

Bew: $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=$

$$\frac{(-1)^0}{(2*0+1)!}x^{2*0+1}+\frac{(-1)^1}{(2*1+1)!}x^{2*1+1}+\frac{(-1)^2}{(2*2+1)!}x^{2*2+1}+\frac{(-1)^3}{(2*3+1)!}x^{2*3+1}+$$

$$\frac{1}{(2*4+1)!}x^{2*4+1}-\frac{1}{(2*5+1)!}x^{2*5+1}+\frac{1}{(2*6+1)!}x^{2*6+1}-\frac{1}{(2*7+1)!}x^{2*7+1}+..=$$

$$\frac{1}{(0+1)!}x^{0+1}-\frac{1}{(0+3)!}x^{0+3}+\frac{1}{(2*(2+0)+1)!}x^{2*(2+0)+1}-\frac{1}{(2*(2+1)+1)!}x^{2(2+1)+1}+$$

$$\frac{1}{((2*(2*2)+1))!}x^{2*(2*2)+1}-\frac{1}{((2*(2*2+1)+1))!}x^{2*(2*2+1)+1}+$$

$$+\frac{1}{(2*(2*3)+1)!}x^{2*(2*3)+1}-\frac{1}{(2*(2*3+1))+1)!}x^{2*7+1}+..$$

$$\frac{1}{(4*0+1)!}x^{4*0+1}-\frac{1}{(4*0+3)!}x^{4*0+3}+\frac{1}{(4*1+1)!}x^{4*1+1}-\frac{1}{(4*1+2+1)!}x^{4*1+2+1}+$$

$$\frac{1}{((4*2)+1))!}x^{4*2+1}-\frac{1}{(4*2+2*1+1))!}x^{4*2+2*1+1}$$

$$+\frac{1}{((4*3)+1))!}x^{4*3+1}-\frac{1}{(4*3+2*1+1)!}x^{2*7+1}+..=$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left[\frac{x^{4*\lambda+1}}{(4*\lambda+1)!}-\frac{x^{4*\lambda+3}}{(4*\lambda+3)!}\right]=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{x^{4*\lambda+1}}{(4*\lambda+1)!}\left[1-\underbrace{\frac{x^2}{(4\lambda+2)(4\lambda+3)}}_{¿\frac{4}{6}=\frac{2}{3}}\right]$$

$$(x^2\leq 4\ \&\ (4\lambda+2)(4\lambda+3)\geq 6\ \forall\ \lambda\in N_0)\ \geq\frac{1}{3}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^{4\lambda+1}}{(4\lambda+1)!}>0\ \forall\ x\in(0,2]$$

b) cos x ist im Intervall [0,2] ↓

//**S3.6.3**(2106) ∀ z=x+iy, $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt:
//2.) cos z=cos(-z). sin z=-sin(-z)
//3.) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$ (Additionstheoreme)
// $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1 \sin z_2 \Rightarrow$
// $\sin(z_1-z_2)=\sin z_1\cos(-z_2)-\cos z_1 \sin(-z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1 \sin z_2$

Bew: $x_1,x_2\in[0,2]$ & $x_1<x_2$:

$$\cos x_1-\cos x_2=\cos\left(\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2}\right)-\cos\left(\left(\frac{x_2}{2}+\frac{x_2}{2}\right)=\right.\right.$$

$$\cos^2(\frac{x_1}{2})-\sin^2(\frac{x_1}{2})-(\cos^2(\frac{x_2}{2})-\sin^2(\frac{x_2}{2}))=$$

$$-2(\sin^2(\frac{x_1}{2})-\sin^2(\frac{x_2}{2}))=$$

$$-2(\sin^2(\frac{x_1}{2})(\sin^2(\frac{x_2}{2})+\cos^2(\frac{x_2}{2}))-\sin^2(\frac{x_2}{2})(\sin^2(\frac{x_1}{2})+\cos^2(\frac{x_1}{2})))=$$

$$-2(\sin^2(\frac{x_1}{2})\sin^2(\frac{x_2}{2})+\sin^2(\frac{x_1}{2})(\cos^2(\frac{x_2}{2})-\sin^2(\frac{x_2}{2})*$$
$$(\sin^2(\frac{x_1}{2})-\sin^2(\frac{x_2}{2})\cos^2(\frac{x_1}{2}))=$$

$$-2(\sin^2(\frac{x_1}{2})\cos^2(\frac{x_2}{2})-\sin^2(\frac{x_2}{2})\cos^2(\frac{x_1}{2}))=$$

$$-2((\sin(\frac{x_1}{2})\cos(\frac{x_2}{2})+\sin(\frac{x_2}{2})\cos(\frac{x_1}{2}))*$$
$$(\sin(\frac{x_1}{2})\cos(\frac{x_2}{2})-\sin(\frac{x_2}{2})\cos(\frac{x_1}{2})))=$$

$$-2((\sin(\frac{x_1}{2})\cos(\frac{x_2}{2})+\sin(\frac{x_2}{2})\cos(\frac{x_1}{2}))*$$
$$(\sin(\frac{x_1}{2})\cos(\frac{x_2}{2})-\sin(\frac{x_2}{2})\cos(\frac{x_1}{2}))) \underset{S3.6.3\,2.,3.)}{=}$$

$$-2\sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)\underbrace{<}_{a)}0 \Rightarrow \cos\downarrow$$

#c) cos x ist im Intervall [0,π] ↓

Bew: $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)=$

$\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}\cos(-x)+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1}\underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x}+\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}\cos(x)+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1}\sin(x)=0 \Rightarrow$

$-\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(\frac{\pi}{2}+x)$

$x_1,x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$ & $x_1>x_2 \Rightarrow (\frac{\pi}{2}-x_1)<(\frac{\pi}{2}-x_2)$, $(\frac{\pi}{2}+x_1)>(\frac{\pi}{2}+x_2)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{b)}\cos(\frac{\pi}{2}-x_1)>\cos(\frac{\pi}{2}-x_2) \Rightarrow$

$-\cos(\frac{\pi}{2}-x_1)<-\cos(\frac{\pi}{2}-x_2)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+x_1)<\cos(\frac{\pi}{2}+x_2) \Rightarrow \cos\downarrow\ \forall\ x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$

d) Die Funktion cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle x_0, welche im Intervall (1,2) liegt. Es gilt $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\,!}$ für $0<x\le 2$.

//***S4.4.1***(2500)*Zwischenwertsatz (ZWS)*//
//*Vor:Sei $I\subset \mathbb{R}$ ein Intervall $\wedge$ $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.*//
//*Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\, y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.*//
//***S4.3.5***(2410)*Identitätsssatz für Potenzreihen*//
//*2.)Vor:Die Potenzreihen $f(z):=\sum_{kn=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $\varphi(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-z_0)^k$* //
// *haben KR, $R>0$. $\exists$ eine Folge $(z_n)\subset U_R(z_0)\setminus\{z_0^*\}$ mit* //
// *$z_n\to z_0^*\in U_R(z_0)\ (n\to\infty)$ und $f(z_n)=\varphi(z_n)\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$* //
//*Beh:$a_k=\alpha_k\ \ \forall\ k\in\mathbb{N}_0$ und damit $f(z)=\varphi(z)\ \ \forall\ z\in U_R(z_0)$.*//
//Bem (…)Gilt $f(z_n)=0\ \ \forall\ n\ \ z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0^*\ \Rightarrow\ f(z)\equiv 0$
//(….)Nullstellen von sin, cos, sinh, cosh können sich in keinem Punkt //
//von $\mathbb{C}$ häufen.//
//***D2.4.1''***(1500)*Sei $(z_n)\subset\mathbb{R}$. Ein $z\in\mathbb{R}$ heißt Häufungswert (HW) von (z_n): $\Leftrightarrow$*//
//*$\forall\ \varepsilon>0$ gilt $|z_n-z|<\varepsilon$ für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$*//
//*$\forall\varepsilon>0$ gilt $z_n\in U^{\varepsilon}(z))$ für ∞ viele n.*//
Bew: Aus Potenzreihendarstellung, da für $x\in(0,2)$:

$$\cos x-(\underbrace{1-\frac{x^2}{2}}_{\nu=0,1})=\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}=$$

$$\#\ \frac{x^{2*2}}{(2*2)!}-\frac{x^{2*3}}{(2*3)!}+\frac{x^{2*4}}{(2*4)!}-\frac{x^{2*5}}{(2*5)!}+\frac{x^{2*6}}{(2*6)!}-\frac{x^{2*7}}{(2*7)!}+-..=\ \#$$

$$\#\ \frac{x^{4}}{(4)!}\left(1-\frac{x^2}{5*6}\right)+\frac{x^{4*2}}{(4*2)!}\left(1-\frac{x^2}{(4*2+1)*(4*2+2)}\right)+\frac{x^{4*3}}{(4*3)!}\left(1-\frac{x^2}{(4*3+1)*(4*3+2)}\right)+..=\ \#$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x^{4\nu}}{(4\nu)\,!}\Bigg(\underbrace{\overbrace{1-\frac{x^2}{(4\nu+1)(4\nu+2)}}^{<1}}_{>0}\Bigg)>0 \text{ da } (4\nu+1)(4\nu+2)>x^2\ \ \forall\ \nu\ge 1\ \&\ \forall\ 0<x\le 2.$$

$$\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\,!}\right)=\sum_{\nu=3}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}=$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)x^{4\nu+2}}{(4\nu+2)!}\Bigg(\underbrace{1-\frac{x^2}{(4\nu+3)(4\nu+4)!}}_{>0}\Bigg)<0,\text{ da } x^2<(4\nu+3)(4\nu+4)\ \ \forall\ \nu\ge 1\ \&\ \forall\ 0<x\le 2:$$

$\#\ \Rightarrow\ \cos x>1-\frac{x^2}{2}\ \#\ \Rightarrow\ \cos x>0$ für $0\le x\le 1$

$\#\ \cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\,!}\ \#\ \Rightarrow$

$\cos 2<1-2+16/24=-1+2/3=-1/3<0\ \&\ \cos x>1-x^2/2\ge 1-1/2>0$ in $(0,1]\ \underset{S4.4.1}{\Rightarrow}$

cos x hat mindestens eine Nullstelle x_0 in (1,2) und keine in (0,1].
Sei $M:=\{x\in(1,2)\,|\cos x=0\}\Rightarrow M\neq\emptyset$.
Sei $x_0:=\inf M\Rightarrow x_0=\min M$ da cos stetig
$\Rightarrow 1<x_0<2\ \&\ x_0=:\pi/2=1{,}57..$ ist kleinste <u>positive</u> Nullstelle von cos x.

e) $\cos x>0\ \ \forall\ x\in[0,\pi/2)$

//***S3.6.3***(2106) $\forall$ $z=x+iy$, $z_1,z_2\in C$ gilt: 5.) cos 0=1
//S4.4.4 #c) cos x ist im Intervall $[0,\pi]$ $\downarrow$
// d) Die Funktion cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle
// $x_0=:\pi/2$, welche im Intervall (1,2) liegt.
Bew: S3.6.3 & S4.4.4 c) & S4.4.4 d) $\Rightarrow$ Beh

D4.4.2 (2535) Die reelle Zahl 2* $\underset{aus\, S4.4.4\, d)}{x_0}$ heißt π

Bem: (.) π ist eine reelle transzendente Zahl, $\pi=3{,}14159265358979$.
(..) Es gilt auf (0,2] (analoger Bew wie oben:

α) $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x \Rightarrow \sin \pi/2>0$ und ferner (Additionsth):

β) $\sin(\pi/2+\pi/2)=\sin(\pi)=2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)=0$ da $\cos(\pi/2)=0$

γ) $\sin(\pi/2)=1$, (da $(\cos^2(\pi/2)+\sin^2(\pi/2)=1$, $\sin\pi/2 \underset{\alpha)}{>} 0$)

δ) $\cos\pi=\cos^2(\pi/2)-\sin^2(\pi/2)=-1$

Andere Formulierung, Definition und Satz

cos hat im Intervall [0,2] genau 1 Nullstelle ξ, $\pi=2\xi$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$

//**S4.3.1** Expotential-, Trigonometrische, hyperbolische Funktionen sind//
// stetig auf ganz $\mathbb{C}$.//
//***S4.4.1***(2500) ***Z**wischenwertsatz (ZWS)*//
//*Vor: Sei $I\subset R$ ein Intervall, $f:I\to R$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.*
//*Beh: 1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall$ y $\exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.*//
//**S4.4.4**(2533) a) $\sin x>0$ $\forall$ $x\in(0,2]$ b) cos x ist im Intervall [0,2] $\downarrow$

Bew: $\cos 0 \underset{S3.6.3\,5.)}{=} 1$ und

$$\cos(2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{4}{2}+\frac{16}{24}\ ...-+...-\frac{2^{2k}}{(2k)!}+\frac{2^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}-\frac{2^{2k}}{(2k)!}+\frac{2^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}=$$

$$\frac{2^{2k}}{(2k)!}\left(-1+\frac{4}{(2k+1)(2k+2)}\right)\underset{k\geq 3}{\leq}0,\ \text{denn}\ \frac{4}{(2k+1)(2k+2)}\leq\frac{4}{7*8}=\frac{1}{14}<1 \Rightarrow$$

$\cos 2<0$

S4.3.1: cos stetig $\underset{S4.4.1}{\Rightarrow}$ $\exists$ Nullstelle von cos in [0,2] $\underset{\cos\downarrow\ in\ [0,2]}{\Rightarrow}$

$\exists$ genau 1 Nullstelle $\xi:=\frac{\pi}{2}$

$$1=\underbrace{\cos^2\frac{\pi}{2}}_{=0}+\sin^2\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}=1 \text{ oder } -1 \underset{S4.4.4}{\Rightarrow} \sin x>0\ \forall\ x\in(0,2] \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}=1$$

*//**S3.6.3**(2104) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen//*
// $\forall$ $z=x+iy$, $z_1,z_2\in C$ gilt://
//1.)$e^{iz}=\cos z+i\sin z$ (Eulersche Formel),//
// $e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. //

S4.4.5(2535) $\exp(i*\frac{\pi}{2})=i$, $\exp(i*\pi)=-1$, $\exp(i*\frac{3\pi}{2})=-1$, $\exp(2\pi*i)=1$

Bew: $\exp(i*\frac{\pi}{2})\underset{S3.6.3}{=}\cos\frac{\pi}{2}+i*\sin\frac{\pi}{2}=0+i*1=1$

$\exp(i*\pi)=\exp(\frac{i*\pi}{2}+\frac{i*\pi}{2})=\exp\frac{i*\pi}{2}\exp\frac{i*\pi}{2}=i*i=-1$

analog die anderen Gleichungen

S4.4.6(2536) Periodizitäten und Identitäten der trigonometrischen Funktionen

Es gilt für $x\in\mathbb{R}$ bzw $z\in\mathbb{C}$:

a) $\sin(x+\pi/2)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi/2)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$

*//**S3.6.3**(2106) $\forall$ $z=x+iy$, $z_1,z_2\in C$ gilt:*

//2.) $\cos z=\cos(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion, KR=$\infty$.

// 5.) $\cos 0=1$

*//**S4.4.4** d) cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle $x_0\in(1,2)$*

*//**D4.4.2** (2534) Die reelle Zahl $2*\underbrace{x_0}_{aus\,S4.4.4\,d)}$ heißt π*

//Bem β) $\sin(\pi/2+\pi/2)=\sin(\pi)=2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)=0$ da $\cos(\pi/2)=0$

// δ) $\cos\pi=\cos^2(\pi/2)-\sin^2(\pi/2)=-1$

Bew: $\cos(x+\pi/2)=\cos x*\cos \pi/2-\sin x*\sin \pi/2=-\sin x$ und es gilt

$\sin(\mp\pi)\underset{D4.4.2\beta),S3.6.3\,2.)}{=}0$, $\cos\pi\underset{D4.4.2\delta)}{=}-1$

b) $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, wir sagen dann, dass der Sinus und der Cosinus "2π- periodisch" sind, dabei ist $\lambda=2\pi$ die kleinste positive Zahl mit dieser Periodizitätseigenschaft und wir nennen diese Zahl die Periodenlänge.

Bew: $\cos(x+2\pi)=-\cos(x+\pi)=+\cos x$ und analog für den Sinus,

insbesondere ist $\sin(x+\pi/2)\underset{a)}{=}-\cos((x+\pi/2)+\pi/2)=-\cos(x+\pi)\underset{a)}{=}\cos x$ und

$\sin x>0$ auf $(-\pi/2+\pi/2,+\pi/2+\pi/2)=(0,\pi)$, da $\cos x>0$ auf $(-\pi/2,+\pi/2)$

c) Aufgrund dieser Überlegungen ist $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ und die Periodenlänge 2π. Analog für den Cosinus.

d) $e^z=e^{z+2k\pi i}$ $\forall$ $k\in\mathbb{Z}$

e) $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$, $\sin x>0$ auf $(0,\pi)$,

$\cos x=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\pi/2$ mit $k\in\mathbb{Z}$, $\cos x>0$ auf $(-\pi/2,\pi/2)$,

$(-1)^k\cos x>0$ $\forall$ $x\in((k-\pi/2)(k-\pi/2))$

//S3.6.4 6.) $\cos(z+\pi)=-\cos z$,

Bew: S4.4.4 e) $\Rightarrow$ $\cos x \underbrace{\geq}_{0\le x<\pi/2} 0$ $\Rightarrow$ $\cos x \underbrace{>}_{\cos x=\cos(-x)} 0$ $\forall$ $x\in(-\pi/2,\pi/2)$.

S3.6.4 6.) $\Rightarrow$ $\forall$ $k\in\mathbb{Z}$: $(-1)^k\cos x>0$ $\forall$ $x\in((k-\frac{1}{2})\pi,(k+\frac{1}{2})\pi)$ $\Rightarrow$ Beh.

f) Wertetafel

f x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin x	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	½	0

Bem: (.) Sinus ist eine ungerade Funktion $\Rightarrow$ $\sin x<0$ auf $(-\pi,0)$
$\cos x<0$ auf $(\pi/2,3\pi/2)$.

(..) Sinus und Cosinus haben auch im Komplexen nur die oben genannten reellen Nullstellen, damit ist auch Definitionsbereich von tan z und cot z Klar.

//**S3.6.3**(2106) $\forall$ z=x+iy, $z_1,z_2\in C$ gilt:

//2.) $\sin z=-\sin(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion, KR=∞.

// $\cos z=\cos(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion, KR=∞.

// 3.) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$
// $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1 \sin z_2$
// speziell: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.
// 5.) $\cos 0=1$
//**S4.4.4** d) cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle $x_0\in(1,2)$
//**D4.4.2** (2534) Die reelle Zahl $2*\underset{aus\ S4.4.4\ d)}{x_0}$ heißt π
//Bem β) $\sin(\pi/2+\pi/2)=\sin(\pi)=2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)=0$ da $\cos(\pi/2)=0$
// δ) $\cos\pi=\cos^2(\pi/2)-\sin^2(\pi/2)=-1$

Bew: $\cos x \underset{S3.6.3\ 2)}{=} \cos(-x)$, $\cos 0 \underset{S3.6.3\ 5)}{=} 1$ und

S4.4.4 d): $\pi/2\in(1,2)$ ist kleinste positive Nullstelle des Cosinus ⇒ $\cos x>0\ \forall\ x\in(-\pi/2,\pi/2)$

S3.6.3 3.) ⇒

a) $\cos(x+\pi/2)=\cos x*\cos \pi/2-\sin x*\sin \pi/2=-\sin x$ und es gilt

$\sin(\mp\pi) \underset{D4.4.2\ \beta),\ S3.6.3\ 2.)}{=} 0$, $\cos \pi \underset{D4.4.2\ \delta)}{=} -1$

$\cos(x+\pi)=\cos x \cos \pi-\sin x*\sin \pi=-\cos x$

b) $\cos(x+2\pi)=-\cos(x+\pi)=+\cos x$ und analog für den Sinus,

insbesondere ist $\sin(x+\pi/2) \underset{a)}{=} -\cos((x+\pi/2)+\pi/2)=-\cos(x+\pi) \underset{a)}{=} \cos x$ und $\sin x>0$ auf $(-\pi/2+\pi/2,+\pi/2+\pi/2)=(0,\pi)$, da $\cos x>0$ auf $(-\pi/2,+\pi/2)$

Aufgrund dieser Überlegungen ist $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ und die Periodenlänge 2π. Analog für den Cosinus.

d) $e^{2k\pi i} \underset{S3.6.3\ 5.)\ und}{=} \cos(2\pi k)+i\sin(2\pi k)=1\ \forall\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow e^z=e^{z+2k\pi i}=e^{z2k\pi i}*e^{2k\pi i}\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$,

//**S3.6.3**(2106)
//3.) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$ (Additionstheoreme)
// $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1 \sin z_2$ Funktionalgleichungen)
// speziell: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

f) $0 \underset{S3.6.3\ 5.)\ oder}{=} \cos(\pi/4+\pi/4) \underset{S3.6.3\ 3.)}{=} \cos^2(\pi/4)-\sin^2(\pi/4)$, $\cos^2(\pi/4)=\sin^2(\pi/4)$

$1 \underset{S3.6.3\ 5)}{=} \cos(\pi/4-\pi/4)=\cos^2(\pi/4) \underset{S3.6.3\ 2.)}{+} \sin^2(\pi/4) \Rightarrow 2\cos^2(\pi/4)=2\sin^2(\pi/4)=1$

⇒ (beachte Vorz) $\cos(\pi/4)=\text{sinus}(\pi/4)=\sqrt{2}/2$.

• $0=\cos(\pi/3+\pi/6)=\cos(\pi/3)\cos(\pi/6)-\sin(\pi/3)\sin(\pi/6)$ &

• • $\cos(\pi/6)=\cos(\pi/3-\pi/6)=\cos(\pi/3)\cos(\pi/6)+\sin(\pi/3)\sin(\pi/6)$

• +• • : $\cos(\pi/6)=2\cos(\pi/3)\cos(\pi/6)$ $\Rightarrow$

$\cos(\pi/3)=1/2=\cos((\pi/3-\pi/2)+\pi/2) \underset{a)}{=} -\sin(\pi/3-\pi/2)=\sin(\pi/6)$;

$1 \underset{S3.6.3\ 5)}{=} \cos\ 0=\cos((0-\pi/2)+\pi/2) \underset{a)}{=} -\sin(-\pi/2) \underset{S3.6.3\ 2)}{=} \sin(\pi/2)$ $\Rightarrow$

• $1=\sin(\pi/3+\pi/6) \underset{S3.6.3\ 3)}{=} \sin(\pi/3)\cos(\pi/6)+\cos(\pi/3)\sin(\pi/6)$

• • $\frac{1}{2}=\sin(\pi/6)=\sin(\pi/3-\pi/6) \underset{S3.6.3\ 2.)\&3)}{=} \sin(\pi/3)\cos(\pi/6)-\cos(\pi/3)\sin(\pi/6)$ $\Rightarrow$

• +• • : $3/2=2\sin(\pi/3)\cos(\pi/6)=2\sin(-\pi/6+\pi/2)\cos(\pi/6) \underset{a)}{=}$

$2\cos(-\pi/6)\cos(\pi/6) \underset{S3.6.3\ 2.)}{=} 2\cos(\pi/6)\cos(\pi/6)=2\cos^2(\pi/6)$ $\Rightarrow$

$\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2=\sin(\pi/3)$

***//S3.6.4**(2107)5.)cos 0=1*

*//**D4.4.2** (2534) Die reelle Zahl 2* $\underset{aus\,S4.4.4\,d)}{x_0}$ heißt π*

//Bem β) sin $(\pi/2+\pi/2)=\sin(\pi)=2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)=0$ da $\cos(\pi/2)=0$
// δ) $\cos\pi=\cos^2(\pi/2)-\sin^2(\pi/2)=-1$

//**D3.6.2**(2105)
//Bem:Mit Rechenregeln für komplexe Zahlen folgt für $x\in\mathbb{R}$:
// 3.) $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ (#d.h. f(x)=sin x bzw cos x: $\mathbb{R}\mapsto[-1,+1]$)
//**S4.4.4**(2532)
/(a) $\sin x>0\ \forall\ x\in(0,2]$
//b) cos x ist im Intervall [0,2] ↓
//#c) cos x ist im Intervall $[0,\pi]$ ↓
//d)Die Funktion cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle x_0, welche
// im Intervall (1,2) liegt. Es gilt $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$ für $0<x\leq 2$.
//e) $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$, $\sin x>0$ auf $(0,\pi)$,
// $\cos x=0 \Leftrightarrow x=k\pi+\pi/2$ mit $k\in\mathbb{Z}$, $\cos x>0$ auf $(-\pi/2,\pi/2)$,
// $(-1)^k\cos x>0\ \forall\ x\in((k-\pi/2)(k-\pi/2))$

g) Aus obigen Eigenschaften und S4.4.4 :

cos: $[0,\pi]\to[-1,1]$ ↓, sin: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ ↑,

tan: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$ ↑, cot: $[0,\pi]\to\mathbb{R}$ ↓

obige Funktionen sind surjektiv und streng monoton, deshalb

D4.4.3(2539) Umkehrfunktionen zu cos, sin ,tan und ctan sind die Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktion zu sin: $(-\pi/2,\pi/2)\to[-1,1]$ heißt Arkussinusfunktion:

arcsin: $[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\sin(\arcsin x)=x\ \forall\ x\in[-1,1]$

$\arcsin(\sin x)=x\ \forall\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

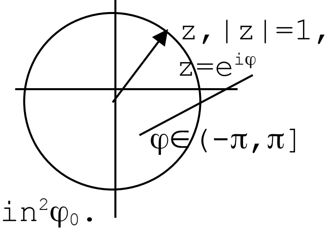
Die Umkehrfunktion zu cos: $[0,\pi]\to[-1,1]$ heißt Arkuscosinusfunktion:
arccos: $[-1,1]\to[0,\pi]$
Die Umkehrfunktion zu tan: $[-\pi/2,\pi]\to\mathbb{R}$ ↑ heißt Arcustangensfunktion:
arctan: $\mathbb{R}\to[-\pi/2,\pi/2]$
Die Umkehrfunktion zu ctan: $[0,\pi]\to\mathbb{R}$ heißt Arcuscotangensfunktion:
arcctan: $\mathbb{R}\to[0,\pi]$ ↓

*//**S4.4.3**(2530) Umkehrfunktion//*
//Ist $f:I\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf I, so besitzt f auf dem//
//Intervall J=f(I) eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig ist und im //selben Sinne wie f streng monoton ist.//

Bem: S4.4.3 ⇒ Die Arcusfunktionen sind streng monoton und auf ihrem Definitionsbereich stetig

//***S4.3.2***(2408) *Expotential-, Trigonometrische, hyperbolische Funktionen*
// *sind stetig auf ganz C.*
//***S4.4.1***(2500) ***Z**wischenwertsatz (ZWS)*
//*Vor:Sei I⊂R ein Intervall, f:I→R stetig auf I, a,b∈I, a<b.*
//*Beh:1.) f(a)<y<f(b) : ∀ y ∃ mindestens ein x∈[a,b] mit f(x)=y.*
//***S3.6.3***(2106)
//*3.)* $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1 \cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$ *(Additionstheoreme)*
// $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1 \cos z_2-\cos z_1 \sin z_2$ *Funktionalgleichungen)*
// *speziell:* $\sin^2 z+\cos^2 z=1$

S4.4.7(2539)Parametrisierung des Einheitskreises in C .



Zu $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$ existiert genau ein $\varphi\in(-\pi,\pi]$ mit $z=e^{i\varphi}$.

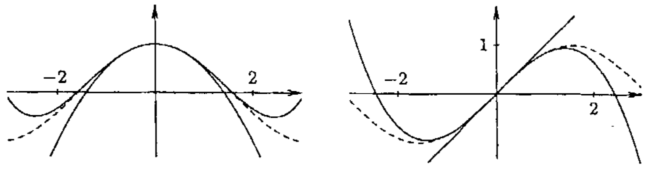
Bew:(.)Existenz: Es sei $z=x+iy$, dann gilt wegen $x^2+y^2=1$: $-1\le x\le 1$. Da $\cos 0=1$ und $\cos\pi=-1$ folgt aus ZWS die Existenz eines $\varphi_0\in[0,\pi]$ mit $\cos\varphi_0=x$ und $y^2=1-\cos^2\varphi_0=\sin^2\varphi_0$.
Somit leistet dieses z mit $y=\pm\sin\varphi_0=\sin(\pm\varphi_0)$ das Gewünschte, d.h. mit $\varphi=\pm\varphi_0$ gilt $z \underset{\cos\varphi_0=\cos(-\varphi_0)}{=} \cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$. Da $\varphi=\pm\pi$ denselben Wert $z=1$ ergeben, reicht es φ in $(-\pi,\pi]$ zu suchen.
(..)Eindeutigkeit:
Annahme es existieren φ_1,φ_2 mit $-\pi<\varphi_1<\varphi_2\le\pi$ mit dieser Eigenschaft.
Sei $\varphi^*=\varphi_2-\varphi_1\in(0,2\pi)$ $\Rightarrow$ $e^{i\varphi^*}=e^{i\varphi_2}/e^{i\varphi_1}=1$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi^* \underset{(.)}{=} 1$, $\sin\varphi^*=0$
$\underset{S3.6.3\ 3.)}{\Rightarrow}$ $1=\cos\varphi^*=\cos^2(\varphi^*/2)-\sin^2(\varphi^*/2)$ & $1=\cos^2(\varphi^*/2)+\sin^2(\varphi^*/2)$ $\Rightarrow$ $\sin^2(\varphi^*/2)=0$ mit dem Additionstheorem
$\cos|\varphi^*/2-\pi/2| \underset{\cos x=\cos -x}{=} \cos(\varphi^*/2-\pi/2)$
$\underset{S3.6.3\ 3.)}{=} \cos(\varphi^*/2)\cos\pi/2-\sin((\varphi^*/2)\sin\pi/2=0 \underset{\varphi^*/2\in(0,\pi)}{\Rightarrow}$
$|\varphi^*/2-\pi/2|<\pi/2$ ist Nullstelle des Kosinus, was im Widerspruch zu L4.4.1(2532). q.e.d.

Graphen trig. Funktionen

Für $0<x<2$ gilt

$1-\frac{x^2}{2} \le \cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$

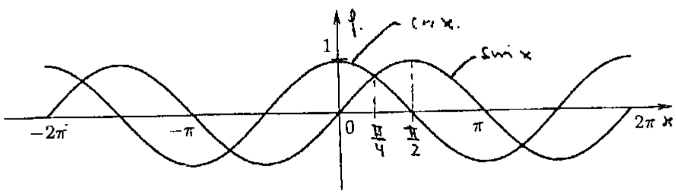
$x-\frac{x^3}{6} < \sin x < x$



Einschließung des Cosinus   Einschließung des Sinus

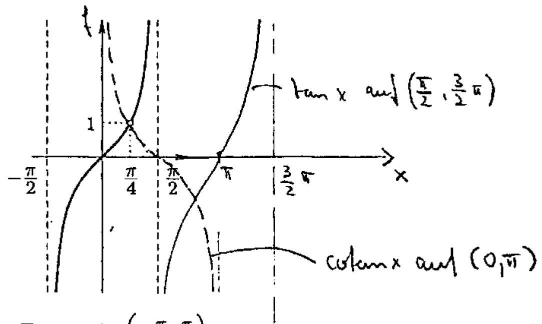
Graphen: Sinus, Cosinus

Graphen: Sinus, Cosinus



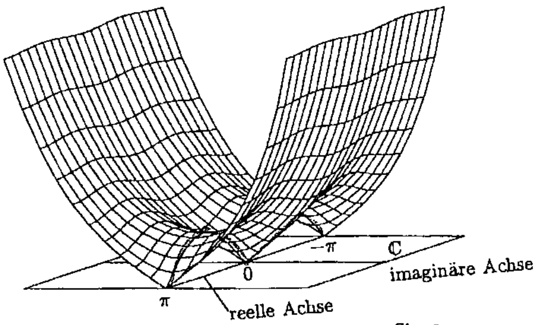
Cosinus und Sinus auf ℝ

Tangens, Cotangens



Tangens in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Bem: Der komplexe Sinus ist unbeschr.



Betrag des komplexen Sinus

A4.4.8 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $\forall\ a,b \in A,\ a<b: [a,b] \subset A$ (Zwischenwerteigenschaft).
Zeige: A ist ein Intervall.

A4.4.9

a) f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x)=sinh x. Zeige, dass f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Umkehrfunktion besitzt.

//**D3.6.4***(2150)* sinh z:=1/2$(e^{z}-e^{-z})$ $\forall$ z$\in\mathbb{C}$//
*//**S4.4.3** (2530)Umkehrfunktion//*
//Ist f:I$\to\mathbb{R}$ streng monoton und stetig, so besitzt f auf dem Intervall// //J=f(I) eine Umkehrfunktion f^{-1}, welche dort stetig ist und im selben// //Sinne wie f streng monoton ist.//

Bew:f(x)=sinh x=$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und $\uparrow$ auf $\mathbb{R}$, denn für $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

mit $x_1<x_2$ gilt: $e^{x_1}<e^{x_2}$ (da e-Fkt $\uparrow$), $e^{-x_1}>e^{-x_2}$, $-e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ $\Rightarrow$

$f(x_1)=1/2(\underbrace{e^{x_1}}_{<e^{x_2}}+(\underbrace{-e^{-x_1}}_{<-e^{-x_2}}))<1/2(e^{x_2}-e^{-x_2})=f(x_2)$

Sei $\underbrace{I}_{=\text{Intervall}}:=\mathbb{R}$ und J:=f($\mathbb{R}$) $\underset{S4.4.3}{\Rightarrow}$

Zu f $\exists$ Umkehrfkt f^{-1}: J$\to$I$\in\mathbb{R}$, die stetig und $\uparrow$.

Noch z.z.J=$\mathbb{R}$!

Es gilt:(*) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ und (**) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Sei $y_0\in\mathbb{R}$ bel., wegen(*) $\exists$ a<0:f(a)<y_0 und

wegen(**)$\exists$ b>0:f(b)>y_0 $\overset{\text{f stetig}}{\underset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}}$

$\exists$ $x_0\in$(a,b): f(x_0)=y_0 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}\subset f(\mathbb{R})$=J (d.h. f ist surjektiv) $\underset{J\subset\mathbb{R}}{\Rightarrow}$ J=$\mathbb{R}$.

Bem:Die stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion f^{-1}: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ von sinh heißt Area sinus hyperbolicus. Bez:Arsinh

b) Zeige:

- Die Funktion sinh x ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und die Wertemenge ist gleich $\mathbb{R}$.
  Ihre Umkehrfunktion Arsinh: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt Areasinus hyperbolicus.
- Die Funktion cosh x ist auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend und die Wertemenge ist gleich [1,∞].
  Ihre Umkehrfunktion Arcosh:[1,∞] $\to\mathbb{R}_+$ heißt Areacosinus hyperbolicus.

A4.4.10 Benutze die Beh5.5.1 um zu zeigen:
arcsin $x=\pi/2-\arccos x \ \forall \ x\in(-1,1)$
Finde eine analoge Beziehung zwischen arctan und arccot.

S4.4.8(2541) Für $x\in\mathbb{R}$ ist die Expotentialfunktion e^x streng monoton Wachsend, nimmt jedes $y\in\mathbb{R}_+$ als Wert an und ist bijektiv

*//**S2.3.18**(1409)7.)(1411) $1+x\leq \exp(x) \ \forall \ x\in\mathbb{R}$//*
//**S4.4.1**(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall \ y \ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

Bew: $x\in\mathbb{R}$ & $h>0 \Rightarrow e^h \underset{S2.3.18\,7.)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} h^k/k!>1 \Rightarrow e^{x+h}=e^xe^h>e^x \Rightarrow e^x \uparrow$

$y_0\in\mathbb{R}_+$: $e^x \underset{S2.3.18\,7.)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!>1+x \ \forall \ x\geq 0 \Rightarrow \exists \ x', x''\in\mathbb{R}$: $e^{x'}\geq y_0$,

$e^{x''} \underset{e^{-x}=1/e^x}{\leq} y_0$.

$\underset{ZWS4.4.1}{\Rightarrow} e^{x_0}=y_0$ gilt für ein $x_0\in\mathbb{R} \Rightarrow e^x$ ist bijektiv

#Bem:
// **D0.2.4**(200) Eine Abbildung(Funktion) f: $X\to Y$ heißt
// 3.)bijektiv oder Bijektion: $\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv
// Zu jedem $y\in Y$ gibt es genau ein $x\in X$ mit $f(x)=y$.
// In diesem Fall heißt die Funktion/Abb. $f^{-1}:Y\to X$ def. Durch
// $f^{-1}(y):=x$ für $y=f(x)$ Umkehrfunktion zu f, wobei x dasjenige
// Element aus X sei, für das $y=f(x)$ gilt.
$y=f(x)=e^x$ ist bijektiv nach S4.4.8 $\underset{ZWS4.4.1\,Bem2.)}{\Rightarrow}$ $\exists$ Umkehrfkt $f^{-1}(y):=x$

*//**S4.4.3**(2530) Umkehrfunktion und Stetigkeit*
//Vor: ● Intervall $I\subset R$,
// ● ● $f:I\to R$ stetig auf I, $J=f(I)$ $\underset{ZWS4.4.1\,Bem2.)}{\Rightarrow}$ $J:=f(I)$ ein Intervall.
// ● ● ● $f:I\to R$ streng monoton
//Aussage: Auf dem Intervall $J=f(I)$ gilt
// ● Zu f $\exists$ im gleichen Sinn wie f streng monotone f^{-1}
// ● ● Zu f $\exists$ stetige f^{-1} auf dem Intervall $J=f(I)$

Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=f^{-1}(e^x)$ ist im gleichen Sinn wie
$f(x)=e^x$ streng monoton, d.h. streng monoton wachsend.

D4.4.4(2542) Logarithmus (ausführlicher P54_55_56 in 5.6)
Die streng monoton wachsende Umkehrfunktion zu $\exp:R\to R_+$ heißt der natürliche Logarithmus und wir schreiben $\log:R_+\to R$, $x=\exp(\log x)$.
Bem:
● $y=\log x$ ist per Def äquivalent mit $x=e^y$.
● ● Für $a\in R_+$ & $b\in C$ setzen wir noch $a^b=e^{b\log a}$. #$(\underbrace{e^{\log a}}_{a})^b= a^b$#
● ● ● D4.4.4 $\underset{a\in R_+,b\in R}{\Rightarrow}$ $a^b\in R_+$ & $\log a^b=b*\log a$ $\forall$ $a\in R_+$, $b\in R$, beachte aber, dass im Allgemeinen a^b eine komplexe Zahl ist, und deshalb $\log a^b$ nicht definiert ist.

A4.4.10 Zeige die Stetigkeit des Logarithmus auf R_+.

A4.4.11 Funktionalgleichung des Logarithmus
Zeige: $\forall$ $x,y\in R_+$ ist $\log(xy)=\log x+\log y$

A4.4.12 Zeige a) $\forall$ $a\in R_+$ $\forall$ $b,c\in C$: $a^ba^c=a^{b+c}$,
b) $\forall$ $a\in R_+$ $\forall$ $b\in R$ $\forall$ $c\in C$: $(a^b)^c=a^{bc}$.
Lös: a) $a^ba^c=e^{b\log a}e^{c\log a}=e^{b\log a+c\log a}=e^{(b+c)\log a}=a^{b+c}$.
b) $(a^b)^c=(e^{b\log a})^c=e^{c\log(e^{b\log a})}=e^{bc\log a}=a^{bc}$.

A4.4.13 Zeige, dass die oben gegebene Def von a^b mit der üblichen übereinstimmt, wenn $b\in Z$ oder $1/b\in Z\{0\}$ ist.