5.3 (2900) Der Satz von Taylor

Anderer Weg siehe P66

D5.3.1 (2900)

$f: I \to \mathbb{R}$, n mal diffb auf I.

$m \le n$: f besitzt eine m fache Nullstelle in $x_0 \in I$, falls gilt:

(.) $f^{(\nu)}(x_0)=0,\ 0 \le \nu \le m-1$ (..) $f^{m}(x_0) \neq 0$

Bsp: $f(x)=x^4$, 4 fache Nullstelle bei $x_0=0$….

$f^{(0)}(x)=x^4,\qquad f^{(0)}(x_0)=x_0^4=0,$

$f^{(1)}(x)=4x^3,\qquad f^{(1)}(x_0)=4x_0^3=0,$

$f^{(2)}(x)=12x^2,\qquad f^{(2)}(x_0)=12x_0^2=0,$

$f^{(3)}(x)=24x,\qquad f^{(3)}(x_0)=24x_0=0,$

$f^{(4)}(x)=24\qquad f^{(4)}(x_0)=24 \neq 0$

...$\Rightarrow$ x^n besitzt eine m=n fache Nullstelle in $x_0=0 \in I$.

Gibt es eine Bedingung für die a_k, damit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergent mit KR R>0?

$\bullet\bullet\bullet\bullet$ (siehe unten) kann benutzt werden, um in Funkionen, die auch als Potenzreihen geschrieben werden können (z.B. $\frac{1}{1-x}$, sin x usw), die a_k zu berechnen. Es ist natürlich zu prüfen, für welche x die Entwicklung gilt.

*//**D5.1.1** (2700)//*
//(…)f ist n mal stetig diffb auf I (kurz:$f\in C^n(I)$), falls f //
//   n mal diffb ist $\forall$ $x\in I$ und $f^{(n)}:I\to \mathbb{R}$ stetig auf I ist.//
//(....)f ist beliebig oft diffb auf I(kurz $f\in C^\infty(I)$), falls//
// $f\in C^n(I)$) $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.//
//Bem: Wir schreiben $f\in C(I)$, falls $f:I\to\mathbb{R}$ stetig ist.//

S5.3.1(2901)

Vor: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konvergent mit KR R>0……...   (wenn...)

Aussage: $\bullet$ $\forall$ $x\in U_R(x_0)$: $f\in C^\infty(U_R(x_0))$

$\bullet\bullet$ $m\in\mathbb{N}$, $x\in U_R(x_0)$: $f^{(m)}(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(x-x_0)^{\nu-m}$,

$\bullet\bullet\bullet$ $m\in\mathbb{N}$: $f^{(m)}(x_0)=a_m*m!$

$\bullet\bullet\bullet\bullet$ $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ...# ($a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$)

//**S5.1.4**(2706)Vor:PR $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit $z,z_0\in\mathbb{C}$ und KR R>0.//

//Beh:$f(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ dort differenzierbar mit Ableitung //

// $f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$.//

#Bew: $\bullet$ Induktion: $n\in\mathbb{N}$

$n=1: f^{(1)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k}(z-z_0)^k$

#IA $n: f^{(n)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{a}_k(z-z_0)^k$

#IS $n+1: f^{(n+1)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k\tilde{a}_k(z-z_0)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{a_k}'(z-z_0)^k \underbrace{\Rightarrow}_{IA\wedge S5.1.4}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{a_k}'(z-z_0)^k$ ist differenzierbar $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

//● ● $m\in\mathbb{N},\ x\in U_R(x_0):\ f^{(m)}(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(x-x_0)^{\nu-m}$,

Bew:● ● : mit S5.1.4 und Induktion

Induktion: $m\in\mathbb{N},\ x\in U_R(x_0)$:

$m=1$: $f^{(1)}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu * a_\nu (x-x_0)^{\nu-1}$,

m: $f^{(m)}(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(x-x_0)^{\nu-m}$,

$m+1$: $f^{(m+1)}(x)=(f^{(m)}(x))'=$

$(a_m m(m-1)\dots(m-m+1)(x-x_0)^{m-m=0})'+\left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(x-x_0)^{\nu-m}\right)'=$

$(a_m m(m-1)\dots(m-m+1)*1)'+\left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(x-x_0)^{\nu-m}\right)'=$

$0+\left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(x-x_0)^{\nu-m}\right)' \underbrace{=}_{S5.1.4}$

$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(\nu-m)(x-x_0)^{\nu-(m+1)}=f^{(m+1)}(x)$

// ● ● ● $m\in\mathbb{N}$: $f^{(m)}(x_0)=a_m * m!$

● ● ● #$f^{(m)}(x_0)=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \nu(\nu-1)\dots(\nu-m+1)(\underbrace{x_0-x_0}_{=0})^{\nu-m}=a_m m(m-1)\dots(m-m+1)*\underbrace{0^0}_{1}=a_m * m!$

(alle anderen Summanden sind 0)

// ● ● ● ● $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ...#$(a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!})$

● ● ● ● Wegen ● ● ● $f^{(k)}(x_0)=a_k * k!\ \Rightarrow\ a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ \Rightarrow$ Aussage

Es gibt manche Funktionen, die sich als Potenzreihen darstellen lassen.
Dabei ist zu prüfen, ob die Darstellung für den ganzen
Definitionsbereich gilt, oder nur für Teile davon.

#Bsp: $f(x):\mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R};\ f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$.

Gibt es eine Potenzreihe, so dass gilt

$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\frac{1}{1-x}$?

Gewählt $x_0=0\ \Rightarrow\ a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

$a_0=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}=\frac{(1-0)^{-1}}{0!}=1$, $a_1=\frac{f^{(1)}(0)}{1!}=\frac{(-1)(1-\overbrace{x}^{0})^{-2}(-1)}{1!}=\frac{(1-\overbrace{x}^{0})^{-2}}{1!}=1$,

$a_2=\frac{f^{(2)}(0)}{2!}=\frac{(-2)(1-\overbrace{x}^{0})^{-3}(-1)}{2!}=1$, $a_3=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=\frac{2*3(1-\overbrace{x}^{0})^{-4}}{3!}=1$, usw. $a_k=1\ \forall\ k\in\mathbb{N}$

Damit ist noch nicht bewiesen, dass $\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\ \forall\ x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$

*//**S1.7.1**(901) $m\le n\in\mathbb{N}$, $a_k\in\mathbb{C}$, $m\le k\le n$. $\sum_{k=m,n\ge m}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_m-a_{n+1}$//*

Prüfung, ob $\left|\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$\left|\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n} x^k\right|=\left|\frac{1}{1-x}\left(1-\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k\right)\right|=\left|\frac{1}{1-x}\left(1-\sum_{k=0}^{n}(x^k-x^{k+1})\right)\right| \underbrace{=}_{S1.7.1}$

$|\frac{1}{1-x}(1-(1-x^{n+1}))|=|\frac{x^{n+1}}{1-x}|$

x>1: $|1-x|=\delta>0$, $|x^{n+1}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\infty \Rightarrow |\frac{x^{n+1}}{\delta}| \overbrace{\underset{nicht}{\rightarrow}}^{n\to\infty} 0$

$x\in(0,1)$: $|1-x|=\delta\in(0,1)$, $|x^{n+1}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$, $|\frac{x^{n+1}}{1-x}|=|\frac{x^{n+1}}{\delta}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$,

x=0: $|\frac{x^{n+1}}{1-x}|=0$, $\frac{1}{1-\underbrace{x}_{0}}=1=\sum_{k=0}^{\infty} 0^k=0^0=1$

$x\in(0,-1)$: $|1-x|=\delta\in(1,2)$, $|x^{n+1}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$, $|\frac{x^{n+1}}{1-x}|=|\frac{x^{n+1}}{\delta}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$,

x=-1: $|1-x|=2$, $|x^{n+1}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\infty$, $|\frac{x^{n+1}}{1-x}|=|\frac{1}{2}|\overbrace{\underset{nicht}{\rightarrow}}^{n\to\infty} 0$,

x<-1: $|1-x|=\delta$, $|x^{n+1}|\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\infty$, $|\frac{x^{n+1}}{1-x}|=|\frac{x^{n+1}}{\delta}|\overbrace{\underset{nicht}{\rightarrow}}^{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nur für $|x|<1$,

bekannt von der geometrischen Reihe

//**D5.1.1**(2700)//

//3.) $f:M\to\mathbb{C}$ heißt auf offenem $D\subset M\subset\mathbb{C}$ n-mal stetig differenzierbar:$\Leftrightarrow$

// $\exists\ f^{(n)}(z)\ \forall\ z\in D$ und $f^{(n)}(z)$ ist stetig auf D (wobei in R in

// Intervallendpunkten $f^{(n)}(x):=f_+^{(n)}(x)$ bzw. $f^{(n)}(x):=f_-^{(n)}(x)$ sei)

D5.3.2 (2903) $I\subset\mathbb{R}$, $I=(a,b)$, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0\in I$, $n\in\mathbb{N}_0$:

- $T_{(n,x_0)}(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt ntes Taylorpolynom von f um x_0.

●● $R_n(x):=f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu$ heißt das n-te Restglied der PR

Ausgangspunkt: Es ist nicht bekannt, ob sich eine Funktion auch als Potenzreihe darstellen lässt. Wie folgt wird gezeigt, dass sich Funktionen, die bestimmte Vor erfüllen, an Potenzreihen annähern lassen und welche Fehler dabei entstehen; jedoch Fehler 0? endlich? Unendlich?

//**D4.1.1**(2200) K Körper, zum Bsp R oder C, M⊂K, M≠∅.
// Für z∈K und δ>0 sei
// $U_\delta(z_0):=\{z\in K \mid |z-z_0|<\delta\}=(z_0-\delta, z_0+\delta)=\delta$-Umgebung von z_0 in K.
// $\overset{o}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in K \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$.

S5.3.2(2904) Satz von Taylor

Vor: Beliebiges $I\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, $n\in\mathbb{N}_0$, $f:I\to\mathbb{R}$ ist n mal stetig differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)

Aussagen:

$\forall\ x\in I\ \exists\ \xi=\xi_{x,n,x_0}\in I,\ (x,x_0)\subset I:$

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\ !}(x-x_0)^\nu+R_n(x) \text{ und } R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*//**S5.1.6***
// (2750)Differentiationsregeln//
//1.)Vor:Seien f,g: M→C differenzierbar in $z_0\in\overset{o}{M}$.//
// c)f·g ist differenzierbar in z_0 und //
// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel).//
//2.) Vor:Sei f:A→B differenzierbar in $z_0\in\overset{o}{A}$, $f(z_0)\in\overset{o}{B}$, und sei //
// g:B→C differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh: $g\circ f:A\to C$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

Bew: $x=x_0$: $f(x_0)=\frac{f^{(0)}(x_0)}{\underbrace{0!}_{=1}}\underbrace{(x_0-x_0)^0}_{=1}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\ !}(x_0-x_0)^\nu=T_n(x_0)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{f(x_0)=T_n(x_0)+R_n(x_0)\Rightarrow R_n(x_0)=f(x_0)-T_n(x_0)}$ $R_n(x_0)=0$

...kein Widerspruch, nur $f(x_0)=f(x_0)$...kein Fehler in Aussage

$x\neq x_0$: Setze $\varphi,\psi:I(x,x_0)\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(t):=f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu\ !}(x-t)^\nu,\quad \psi(t):=(x-t)^{n+1}\quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Vor für f, S5.1.6 usw}}$$

φ,ψ stetig und differenzierbar auf $I[x,x_0]$

Sei $t\in I[x,x_0]$: $\varphi'(t)\ \underbrace{=}_{\text{Diffregeln..S5.1.6}}\ \underbrace{0}_{f(x)\text{ keine Fkt von } t}-\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu\ !}(x-t)^\nu\right)'\ \underbrace{=}_{\text{Diffregeln..S5.1.6}}$

$-\Bigg(\underbrace{\frac{f^{(0)}(t)}{\underbrace{0!}_{=1}}}_{=f(t)}\underbrace{(x-t)^0}_{=1}\Bigg)'-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu\ !}(x-t)^\nu\right)'\ \underbrace{=}_{\text{Diffregeln..S5.1.6}}$

$-f(t)'-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{f^{(\nu+1)}(t)}{\nu!}(x-t)^\nu+\frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu!}(-1)\nu(x-t)^{\nu-1}\right)=$

$-f(t)'-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{f^{(\nu+1)}(t)}{\nu!}(x-t)^\nu-\frac{f^{(\nu)}(t)}{(\nu-1)!}(x-t)^{\nu-1}\right)=$

$-f(t)'-\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{f^{(\nu)}(t)}{(\nu-1)!}(x-t)^{\nu-1}+\frac{f^{(\nu+1)}(t)}{\nu!}(x-t)^\nu\right)=$

//**S1.7.1**(901) $m\le n\in N$, $a_k\in C$, $m\le k\le n$. $\sum_{k=m,n\ge m}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_m-a_{n+1}$//

$$\# \quad \varphi'(t)=-f(t)'+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{f^{(\nu)}(t)}{(\nu-1)!}(x-t)^{\nu-1}-\frac{f^{(\nu+1)}(t)}{\nu!}(x-t)^{\nu}\right)\underbrace{\overset{a_n=\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}}{=}}_{S1.7.1}$$

$$\# \quad -f(t)'+\left(\frac{f^{(1)}(t)}{\underbrace{(1-1)!}_{=0!=1}}\underbrace{(x-t)^{1-1}}_{=1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}\right)=$$

$$\# \quad -f(t)'+f(t)'-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}$$

$$\# \quad \varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n}$$

$$\psi'(t)=((x-t)^{n+1})'\underbrace{=}_{Diffregeln}(-1)(n+1)(x-t)^{n}=-(n+1)(x-t)^{n}$$

$$\# \quad \varphi(x):=f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-x)^{\nu}=f(x)-\frac{f^{(0)}(x)}{\underbrace{0!}_{=1}}\underbrace{(0)^{0}}_{=1}=f(x)-f(x)\#=0$$

$$=(x-x)^{n+1}=\underbrace{=}_{\Psi(t)=(x-t)^{n+1}}\psi(x)$$

$$\psi'(t)=-(n+1)(x-t)^{n}\neq 0 \quad \forall\ t\in I(x,x_0)$$

//**S5.2.4**(2803) Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//
//Vor:(.)a<b, f,g: [a,b]→R seien stetig auf [a,b] und differenzierbar //
// auf(a,b). //
// (..)$g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g(b)-g(a)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$//
//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$./
// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

$$\exists\ \xi=\xi_{x,x_0}\in(x,x_0)\subset I:\ \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}=\frac{\varphi(x_0)-\overbrace{\varphi(x)}^{=0}}{\psi(x_0)-\underbrace{\psi(x)}_{=0}}\underbrace{=}_{S5.2.4}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\Rightarrow \varphi(x_0)=\psi(x_0)\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

$$\Rightarrow R_n(x)=f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu}\underbrace{=}_{Def\ \varphi}\varphi(x_0)=\psi(x_0)\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\underbrace{=}_{Def\ \varphi,\psi(t=x_0)}$$

$$(x-x_0)^{n+1}\left(-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n}\right)\left(\frac{1}{-(n+1)(x-\xi)^{n}}\right)=$$

$$(x-x_0)^{n+1}\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n}\right)\left(\frac{1}{(n+1)(x-\xi)^{n}}\right)=(x-x_0)^{n+1}\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Rightarrow \text{Behauptung}$$

// Seite 2903: $\varphi(t):=f(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu!}(x-t)^{\nu}$, $\psi(t):=(x-t)^{n+1}$

// siehe oben $\varphi'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)n \Rightarrow \varphi'(\xi)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n}$

// siehe oben $\psi'(t)=-(n+1)(x-t)^{n} \Rightarrow \psi'(\xi)=-(n+1)(x-\xi)^{n}$

Bem: Setzt man statt $\psi(t):=(x-t)^{n+1}$ wie oben

$\psi(t)=\psi_p(t):=(x-t)^{n+1-p}$, $p\in\{0,\dots,n\}$, $t\in[x_0,x]\subset I$ in den obigen Beweis, so erhält man

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^p\dfrac{(x-x_0)^{n+1-p}}{n+1-p}$ mit einem geeigneten

$\xi=\xi(x)=\xi_{p,n,x_0}(x)\in I(x,x_0)$

p=n: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$ mit einem geeigneten $\xi\in I(x,x_0)$

(Cauchy Form)

Andere Formulierung:

Vor: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit den Endpunkten $a<b$, $x_0, \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
Sei $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar auf I und (n+1)-mal differenzierbar auf (a,b).

Beh: $\forall\ x \in I$ gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) = T_n(x_0, x) + R_n(x)$ wobei für das Restglied $R_n(x)$ folgendes gilt:

- $R_n(x_0) = 0\ \ \forall\ x \neq x_0$,
- $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(g(x) - g(x_0))}{g'(\xi)} (x-\xi)^n$

$g: I \to \mathbb{R}$, stetig auf I,
differenzierbar auf (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ (für S5.4.2 siehe unten) &

$\forall\ x:\ a<x<b\ \exists\ \xi = \xi_{(x,g)} \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$:

Mit $g(t) := (x-t)^p$, $p \in \mathbb{N}$, ergibt sich:

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \frac{(x - x_0)^p}{p} (x-\xi)^{n-p+1}$ (Schlömilch).

Für $p=1$ ergibt sich:

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-x_0)(x-\xi)^n$ (Cauchy).

Für $p=n+1$ ergibt sich:

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ (Lagrange)

//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ in einem Punkt x_0
//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.
//**S4.3.4**(2410) Rechenregeln für Stetigkeit
//2.) Vor: $M\subset\mathbb{K}$, f,g mit $M\to\mathbb{K}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.
// $\alpha f+\beta g$ stetig in x_0 $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{K}$),
// fg stetig in x_0

//**S1.7.1**(901) $m\le n\in\mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_k\in\mathbb{C}$, $m\le k\le n$. $\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_m$

//**S5.2.4**(2804) Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung
//Vor: (.) $a<b$, f,g: $[a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar
// auf (a,b).
// (..) $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g(b)-g(a)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$
//Beh: Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b)$: $f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$.
// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Bew: O.B.d.A. $x<x_0$, $\forall\ t: x_0\le t\le x$ sei $F(t):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$,

Vor: $f^{(k)}(t)$, $(x-t)^k$ differenzierbar auf I $\underset{S5.1.2}{\Rightarrow}$

$f^{(k)}(t)$, $(x-t)^k$, stetig auf $[x_0,x]\subset I \Rightarrow$

S4.3.4 2.): $F(t):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ stetig auf $[x_0,x]$.

$\forall\ t: x_0\le t\le x$ gilt $F'(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$

$\underset{S1.7.1}{=}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!})(x-t)^n \Rightarrow$ F differenzierbar auf $x_0\le t\le x$

$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k=\frac{f^{(0)}(x)}{0!}0^0$

$=f(x)$

$F(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$,

Beh: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x) \Rightarrow R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow$

$\exists\ \xi\in(x_0,x)$ mit $R_n(x)=F(x)-F(x_0)$, $\frac{F(x)-F(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\underset{S5.2.4}{=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow$

$R_n(x)=F(x)-F(x_0)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x)-g(x_0))=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(g(x)-g(x_0))}{g'(\xi)}(x-\xi)^n$ da

$f(\xi)=F(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k \Rightarrow f'(\xi)=F'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!})(x-\xi)^n$

Andere Formulierung Bew Form Lagrange:
//**S5.2.4**(2803) Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung//
//Vor:(.)$a<b$, $f,g: [a,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar //
// auf (a,b). //
// (..)$g'(x)\neq 0 \ \forall\ x\in(a,b) \Rightarrow g(b)-g(a)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$//
//Beh:Gilt (.) so $\exists\ \xi\in(a,b): f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))$./
// Gilt zusätzlich (..) so folgt $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.//

*//**S5.1.6***

// 1.)Vor:Seien $f,g: M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{M}$.//
// c)$f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel).//
//2.)Kettenregel
// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei
// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.
// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und
// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

Bew Lagrange: $t_n(y,x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-y)^k$

$$t_n(x_0,x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(0)^k=\frac{f^{(0)}(x_0)}{k!}(0)^0=f(x_0)$$

Definition! $R_{n+1}(y,x):=f(x)-t_n(y,x)$, x fest, $f(y)=R_{n+1}(y,x)$.
$R_{n+1}(x,x):=f(x)-t_n(x,x)=f(x)-f(x)=0$,
#Für $t_n(y,x)$ wurde $f(x)$ n mal differenziert.
#$f(x)$ lässt sich nach Vor. n+1 mal differenzieren $\Rightarrow$
$R_{n+1}(y,x)$ mindestens 1 mal nach y differenzierbar $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dy}R_{n+1}(y,x)=\frac{d}{dy}(f(x)-t_n(y,x))=\#\frac{d}{dy}f(\underset{!}{x})-\frac{d}{dy}t_n(y,x))\#$$

$$=0-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k\right)'$$

$$\underset{2S5.1.6\ 1.)\,c);\ 2.)}{\underbrace{=}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}k(x-y)^{k-1}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(y)}{(k)!}(x-y)^k=-\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n,$$

$g(y):=(x-y)^{n+1}$,

$$\Rightarrow\frac{R_{n+1}(y,x)}{(x-y)^{n+1}}=\frac{\overbrace{R_{n+1}(x,x)}^{=0}-R_{n+1}(y,x)}{\underbrace{(x-x)^{n+1}}_{=0}-(x-y)^{n+1}}\underset{S5.2.4}{\underbrace{\overset{\xi\in(a,b)\wedge x<\xi<y}{\overbrace{=}}}}$$

$$\frac{\frac{d}{dy}(-R_{n+1}(y,x))}{\frac{d}{dy}(-(x-y)^{n+1})}=\frac{-\frac{d}{dy}R_{n+1}(y,x)}{-(-1)(n+1)(x-y)^n}\underset{y=\xi}{\underbrace{=}}\frac{+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{+(n+1)(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Rightarrow$$

$$R_{n+1}(y,x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}\underset{y=x_0}{\underbrace{\Rightarrow}}$$

$$f(x)\underset{y=x_0}{\underbrace{=}}t_n(x_0,x)+R_{n+1}(x_0,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

#Eigener Versuch:
#Vor: $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit den Endpunkten $a<b$, $x, x_0 \in I$ und $n \in \mathbb{N}_0$.
$f: I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar auf I und (n+1)-mal
differenzierbar auf (a,b).
Beliebige Funktion $g: I \to \mathbb{R}$, stetig auf I, differenzierbar auf (a,b)
mit $g'(x) \neq 0$

#Aussage: $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!}(x-x_0)^{\nu}+R_n(x) \Rightarrow$

$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x-x_0)^{k}$

• $R_n(x_0)=0 \ \forall\ x=x_0$,

•• $\exists\ \xi=\xi_{(x,g)} \in (x_0,x)$ wobei $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(g(x)-g(x_0))}{g'(\xi)}(x-\xi)^{n}\ \forall\ x \in (a,b)$

//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0 differenzierb, so ist sie dort auch stetig.

*//**S5.1.6***
// (2750)Differentiationsregeln//
//1.)Vor:Seien $f,g: M \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{o}{M}$ .//
// a) $f \pm g$ sind differenzierbar in z_0 und $(f \pm g)'(z_0)=f'(z_0) \pm g'(z_0)$.
// c) $f \cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(f \cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel).//
//2.) Vor:Sei $f: A \to B$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{o}{A}$, $f(z_0) \in \overset{o}{B}$, und sei //
// $g: B \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh: $g \circ f: A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g \circ f)'(z_0)=g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

#Bew: • $R_n(x_0)=f(x_0)-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x_0-x_0)^{k}=f(x_0)-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(0)^{k}=f(x_0)-\frac{f^{(0)}(x_0)}{k!}(0)^{0}=$
$f(x_0)-f(x_0)=0$ für $x=x_0$
•• O.B.d.A. $x<x_0$, $\forall\ t: x_0 \le t \le x$ sei

$F(t):=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^{k} \underset{\text{Diffregeln, S5.1.2}}{\Rightarrow}$ F diffb auf $x_0 \le t \le x$, stetig auf $[x_0,x]$,

$F'(t)=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!})(x-t)^{n}$,

$F(x):=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^{k} = \frac{f^{(0)}(x)}{0!}0^{0}=f(x)$

$F(x_0):=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}$

$\Rightarrow$
F stetig auf $[x_0,x]$, differenzierbar auf $x_0 \le t \le x$
$\forall\ t: x_0 \le t \le x$ gilt $F'(t):=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^{k}-\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$

$\underset{S1.7.1}{=} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!})(x-t)^{n} \Rightarrow$

Aussage: $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x-x_0)^{k}$ folgt

$\exists\ \xi \in (x_0,x)$ mit $R_n(x)=F(x)-F(x_0)$, $\frac{F(x)-F(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \underset{S5.2.4}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow$

\# $R_n(x)=F(x)-F(x_0)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(g(x)-g(x_0))=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,\frac{(g(x)-g(x_0))}{g'(\xi)}(x-\xi)^n$

\# Mit $g(t):=(x-t)^p$, $p\in\mathbb{N}$, ergibt sich:

\# $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,\frac{(g(x)-g(x_0))}{g'(\xi)}(x-\xi)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-x)^p-(x-x_0)^p}{((x-\xi)^p)'}(x-\xi)^n=$

\# $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-x)^p-(x-x_0)^p}{p(x-\xi)^{p-1}}(x-\xi)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-x_0)^p}{p}(x-\xi)^{n-p+1}$ (Schlömilch).

\# Für p=1 ergibt sich: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n$ (Cauchy).

\# Für p=n+1 ergibt sich: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (Lagrange)

Bem:
a)Spezialfälle von S5.3.1 sind:
//**S5.2.3**(2803) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//
//Vor:a<b, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a,b)//
//Beh: ∃ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$//
//**D5.3.2** (2901) $I\subset R$, $I=(a,b)$, $f:I\to R$ stetig differenzierbar, $x_0\in I$, $n\in N_0$:
// $T_{n(x_0,x)}:=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$//

- $n=0: f(x)=T_n(x)+R_n(x)=T_0(x)+R_0(x)=\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0+\frac{f^{(0+1)}(\xi)}{0!}(x-x_0)^{0+1}=$
  $=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ (MWS5.2.3).#$\xi\in(x,x_0)\subset I$
- • $n=1: f(x)=T_1(x)+R_1(x)=\sum_{k=0}^{1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(1+1)}(\xi_x)}{2!}(x-x_0)^{1+1}=$
  $f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-x_0)^2=$
  $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-x_0)^2$.

b) $T_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}*\underbrace{k}_{0\ \text{für}\ k=0}*(x-x_0)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!})(x-x_0)^{k-1}$

$T_n'(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x_0-x_0)^{k-1}=\frac{f^{(1)}(x_0)}{(1-1)!})(x_0-x_0)^{1-1}=\frac{f^{(1)}(x_0)}{(1-1)!})^0=f'(x_0)$
usw...
$T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad\forall\ 0\le k\le n$

Bsp:

*//**S5.3.1**(2903) Taylor*

//Vor: Beliebiges $I\subset R$, $x_0\in I$, $n\in N_0$, $f:I\to R$ ist n mal stetig

// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und

// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)

//Aussagen:

// $\forall\ x\in I\ \exists\ \xi=\xi_{(x)}=\xi_{n,x_0,x}\in I(x,x_0)$:

// $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\ !}(x-x_0)^{\nu}+R_n(x)$ und

// $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ und $R_n(x_0)=0$

a) näherungsweise Berechnung von $\sqrt{1{,}1}=1{,}048808\ldots$ $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\sqrt{x}$

$x_0=1$, $x=1{,}1$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ $\Rightarrow$

$$T_1(x)=\sum_{k=0}^{1}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k=\frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0+\frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1=f(1)+f'(1)(x-1)=1+\frac{1}{2}(x-1)$$

$T_1(1{,}1)=1+\frac{1}{2}0{,}1=1{,}05$ ist Näherung an $\sqrt{1{,}1}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.3.1}$

Fehlerabschätzung...

$$\exists\ \xi\in(1;1{,}1):\ |R_1(1{,}1)|=|f(1{,}1)-T_1(1{,}1)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(1{,}1-1)^2\right|=$$

$$\left|-\frac{1}{4\sqrt{\xi^3}}\frac{1}{2}(0{,}1)^2\right|=\left|-\frac{1}{800}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{\xi^3}}_{\geq 1}}\right|\leq\frac{1}{800}$$

*//**S5.3.1**(2903)*

//Vor: Beliebiges $I\subset R$, $x_0\in I$, $n\in N_0$, $f:I\to R$ ist n mal stetig

// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und

// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)

//Aussagen:

// $\forall\ x\in I\ \exists\ \xi=\xi_{(x)}=\xi_{n,x_0,x}\in I(x,x_0)$:

// $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\ !}(x-x_0)^{\nu}+R_n(x)$ und

// $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ und $R_n(x_0)=0$

b) $f: R\to R$, $f(x)=e^x$, $x_0=0$, $f^{(k)}(x)=e^x\ \forall\ k\in N \Rightarrow f^{(k)}(0)=1\ \forall\ k\in N \Rightarrow$

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\ !}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k\ !}(x-0)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\ !}x^k.$$

n? damit $|e^x-T_n(x)|\leq 10^{-4}\ \forall\ x\in[0,1]$?

S5.3.1 $\Rightarrow\ \forall\ x\in(0,1]$ und $n\in N_0\ \exists\ \xi\in(0,x)$:

$$|R_n(x)|=|f(x)-T_n(x)|=|e^x-T_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}\right|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{e^1}{(n+1)!}*1$$

$$\frac{e^1}{(n+1)!}\leq 10^{-4}\ \forall\ n\geq 7$$

c) f(x)=sin(2x)+cos x, $x_0=0$, n=3

$f^{(0)}(x_0)=\sin(2x_0)+\cos x_0=1$ $\quad T_0(x)=\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-0)^0=1$

$f^{(1)}(x_0)=2\cos(2x_0)-\sin x_0=2$ $\quad T_1(x)=\sum_{k=0}^{1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=1+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-0)^1=1+2x$

$f^{(2)}(x_0)=-1$ $\quad T_2(x)=\sum_{k=0}^{2}\ldots=1+2x+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}x^2=1+2x-\frac{1}{2}x^2$

$f^{(3)}(x_0)=-8$ $\quad T_3(x)=\sum_{k=0}^{2}\ldots=1+2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}x^3=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3$

d) f(x)=ln(x+1)...x=1… ln 2=?

$x_0=0$

$f(0)=0$, $f^{(1)}(x)=(x+1)^{-1}$, $f^{(2)}(x)=(-1)(x+1)^{-2}$, $f^{(3)}(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3}$,

$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$, $f^{(5)}(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)(x+1)^{-5}$,

mit Induktion $f^{(k)}(x)=(-1)^{k+1}(k-1)!(x+1)^{-k}$

$f^{(k)}(x_0)=(-1)^{k+1}(k-1)!(0+1)^{-k}=(-1)^{k+1}(k-1)!$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k.$$

Fehler in x=1: $|R_n(x)|=|\frac{f^{(n+1)}(\overbrace{\xi}^{\in(0,1)})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}|=$

$$|\frac{(-1)^{n+1+1}(n+1-1)!(\xi+1)^{-(n+1)}}{(n+1)!}\overbrace{(\underbrace{x}_{=1}-\underbrace{x_0}_{=0})^{n+1}}^{=1}|=|\frac{1}{(n+1)\underbrace{(\xi+1)^{n+1}}_{¿1}}|<\frac{1}{n+1}\underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty}0\Rightarrow$$

„Fehler in x=1 $\underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty}0$" $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}T_{n}(\underbrace{x}_{=1},\underbrace{x_0}_{=0})\underbrace{=}_{Fehler\to 0}\ln(1+1)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(1-0)^k=$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ...alternierende harmonische Reihe

*//**S5.3.1**(2901) Taylor//*

//Vor: Beliebiges $I\subset R$, $x_0\in I$, $\exists\ n\in N_0$: $f:I\to R$ ist n mal stetig //

// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und //

// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)//

//Aussagen: $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu+R_n(x)\quad\forall\ x\in I$//

// $R_n(x_0)=0$, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit geeignetem $\xi=\xi(x)=\xi_{n,x_0}(x)\in I(x,x_0)$

//**S5.3.1**(2901) Taylor//
//Vor: Beliebiges $I\subset R$, $x_0\in I$, $\exists\ n\in N_0$: $f:I\to R$ ist n mal stetig //
// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und //
// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)//

//Aussagen: $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\ !}(x-x_0)^\nu+R_n(x)\quad \forall\ x\in I$//

// $R_n(x_0)=0$, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ mit geeignetem $\xi=\xi(x)=\xi_{n,x_0}(x)\in I(x,x_0)$

//**D5.3.2** (2901) $I\subset R$, $I=(a,b)$, $f:I\to R$ stetig differenzierbar, $x_0\in I$, $n\in N_0$:

// $T_n(x_0,x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\ !}(x-x_0)^k$ heißt ntes Taylorpolynom von f um x_0.//

//**S3.6.3**(2104) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen//

//2.) $\cos z=\cos(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu}}{(2\nu)\ !}$, gerade Funktion, $KR=\infty$.//

// $\sin z=-\sin(-z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)\ !}$, ungerade Funktion

// $\sin x: R\to[-1,1]$... $(\sin x)'=\cos x$
// $\cos x: R\to[-1,1]$...$(\cos x)'=-\sin x$

e) $f(x)=\cos x$, $x\in R$

$f^{(2k)}(x)=(-1)^k*\cos x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^{k+1}*\sin x$, $\forall\ k\in N_0$, d.h $\forall\ n\in N_0$, $x_0=0$:

$$T_{2n}(x)=\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{(\nu)}(\overbrace{0}^{x_0})}{\nu!}x^\nu=$$

$$\frac{\cos(0)}{0!}x^0+\frac{-\sin 0}{1!}x^1+\frac{-\cos 0}{2!}x^2+\frac{+\sin 0}{3!}x^3+\frac{\cos 0}{4!}x^4+..\pm\frac{\cos 0}{2n!}x^{2n}\left(\pm\underbrace{\frac{\sin 0}{(2n+1)!}}_{=0}x^{2n+1}\right)$$

$$=1\quad +0\quad -\frac{x^2}{2!}\quad +0\quad +\frac{x^4}{4!}+..\quad \pm\frac{x^{2n}}{2n!}\quad (\quad \pm 0\quad)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}x^\nu\ (=T_{2n+1}(x))\quad \underset{S5.3.1}{\Rightarrow}$$

$$\forall\ x\in R\ \exists\ \xi\in R:\ \cos x-T_{2n}(x)=R_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}=\frac{(-1)^{(n+1))}\cos(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\Rightarrow$$

$$|\cos x-T_{2n}(x)|\le\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\Rightarrow$$

$$|\cos x-T_2(x)|=|\cos x-1+\frac{x^2}{2}|\le\frac{x^4}{4!}\ \text{ und }\ |\cos x-T_4(x)|=|\cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}|\le\frac{x^6}{6!}$$

D5.3.3 (2913) Seien $f: I\to \mathbb{R}$, $\exists\ f^{(k)}\ \forall\ k\in\mathbb{N}$, $x_0\in I$. Dann heißt

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Bem:
- Das Konvergenzverhalten der Taylorreihe kann mit den Methoden aus 3.5 untersucht werden.
- • • Falls die Taylorreihe konvergiert, so konvergiert sie nicht notwendig gegen die Funktion f.
  # Näherung an f(x) durch Berechnung $R_{n,x_0,(x)}$
- • • • Sei $f: I\to\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, $x, x_0\in I \Rightarrow$
  $f(x) = T_{f,x_0}(x) \underset{f(x)=T_{n,x_0}(x)+R_{n,x_0,(x)}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x) = 0$

*//**S5.1.6** (2750) Differentiationsregeln//*

//1.) Vor: Seien $f,g: M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{M}$.//
// c) $f\cdot g$ ist differenzierbar in z_0 und //
// $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ (Produktregel).//
//2.) Kettenregel//
// Vor: Sei $f: A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei //
// $g: B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh: $g\circ f: A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.//

Bsp: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}: & x\neq 0\\ 0: & x=0\end{cases} = \begin{cases} e^{-(x)^{-2}}: & x\neq 0\\ 0: & x=0\end{cases}$ Polynom zu

2 Aussagen

(.) $f^{(n)}(x)=P_n(\underbrace{y}_{=x^{-1}})\, e^{-\frac{1}{x^2}}\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\neq 0$, mit $\mathrm{grad}(P_n(\underbrace{y}_{=x^{-1}}))=3n$

Bew per Induktion

n=1: S5.1.6 $\Rightarrow$ f differenzierbar $\forall\ x\neq 0$,

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}{}'*((x)^{-2})'=-e^{-\frac{1}{x^2}}*(-2)(x)^{-3})=2\underbrace{y}_{=x^{-1}}{}^3 e^{-\frac{1}{x^2}}\ \forall\ x\neq 0 \Rightarrow$$

$P_1(\underbrace{y}_{=x^{-1}})=2y^3 \Rightarrow \mathrm{grad}(P_1(y))=3*1=3n$

$P_1'(y)=6y^2$ d.h. $\mathrm{grad}(P_1'(y))=3*\underbrace{1}_{n}-1=3n-1$

n=2: $f''(x)=\left(P_{\underbrace{1}_{n}}(y)\,e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=\left(P_{\underbrace{1}_{n}}(y)\right)' e^{-\frac{1}{x^2}}+P_{\underbrace{1}_{n}}(y)\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=$

$6y^2 e^{-\frac{1}{x^2}}+2y^3*2y^3*e^{-\frac{1}{x^2}}=(6y^2+4y^6)e^{-\frac{1}{x^2}}=P_2\, e^{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \mathrm{grad}(P_n(\underbrace{y}_{=1/x}))=3*2=3n$

$P_2'(y)=12y+24y^5$ d.h. $\mathrm{grad}(P_2'(y))=3*\underbrace{2}_{n}-1=5=3n-1$

IH n: $f^{(n)}(x)=P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\, e^{-\frac{1}{x^2}}\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x\neq 0$,

$\mathrm{grad}(P_n(\underbrace{y}_{=1/x}))=3n$, $\mathrm{grad}\big(P_n'(\underbrace{y}_{=1/x})\big)=3n-1$,

$n \mapsto n+1$: $f^{(n+1)}(x) = \left(P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\, e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \underbrace{=}_{S5.1.6\ 1.)c)} \left(P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n(\underbrace{y}_{=1/x}) \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' =$

$\left(P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\, 2\underbrace{y}_{=x^{-1}}{}^3 \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) =$

$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)\left((P_n(\underbrace{y}_{=1/x}))' + P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\, 2\underbrace{y}_{=x^{-1}}{}^3\right) \underset{IH}{\Rightarrow}$

$\mathrm{grad}(P_n(\underbrace{y}_{=1/x}))' = 3n-1$, $\mathrm{grad}\left(P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\, 2\underbrace{y}_{=x^{-1}}{}^3\right) = 3n+3 \Rightarrow$

$\mathrm{grad}\left((P_n(\underbrace{y}_{=1/x}))' + P_n(\underbrace{y}_{=1/x})\, 2\underbrace{y}_{=x^{-1}}{}^3\right) = 3n+3 = 3(n+1)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{Induktion}$ Aussage **(.)**

Aussage **(..)** $f = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}: & x \neq 0 \\ 0: & x=0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-(x)^{-2}}: & x \neq 0 \\ 0: & x=0 \end{cases}$

ist beliebig oft in 0 diffb. mit $f^{(n)}(0)=0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

//**S2.3.21**(1459) *4.)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{e^n} = 0\ (p>0)$// ($\Rightarrow p=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$)

Bew: Sei Q ein Polynom $\Rightarrow$ $\left|\frac{Q(x)}{e^{x^2}}\right| \underbrace{\overset{S2.3.21\ 4.)}{\overbrace{\rightarrow}}}_{x\to\infty} 0$ (mit Hilfe von $\frac{x^q}{e^x} \underbrace{\overset{S2.3.21\ 4.)}{\overbrace{\rightarrow}}}_{x\to\infty} 0$)

Sei $(\underbrace{x_n}_{\neq 0})_{n=1}^{\infty}$, $x_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}\right| \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \infty \Rightarrow^{**} \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{Q(\frac{1}{x_n})}{e^{\frac{1}{x_n^2}}}\right| \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Q(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$,

f(x) ist beliebig oft differenzierbar für $x \neq 0$ und

(.): $f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-\frac{1}{x^2}}$, P_n ist Polynom.

n=1: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(0)}(x) - f^{(0)}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \underbrace{=}_{S2.3.21} 0 \Rightarrow$

f diffb in 0 mit $f'(0)=0$

n: f n mal diffb mit $f^{(n)}(0)=0 \Rightarrow$

$\mapsto n+1$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{P_n(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x^2}}} \underbrace{=}_{**} 0 \Rightarrow f^{(n)}$ ist in 0 diffb mit

$f^{(n+1)}(0) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

$\underbrace{\Rightarrow}_{Induktion}$ Beh **(..)** $\Rightarrow$

$T_{f,x_0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(k)}(x_0)}^{=0}}{k!}(x-x_0)^k = 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, aber $f(x) \neq 0 \ \forall\ x \neq 0$

Bsp:

a) $f(x)=e^x$, $I=\mathbb{R}$, $x_0=0 \Rightarrow f^k(x)=e^x$, $f^k(0)=1 \Rightarrow$
Taylorreihe von f Entwicklungspunkt 0:

//**S2.3.21**(1459)Wichtige Grenzwerte//

//#6.) $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{c}\,\frac{x^n}{n!}=0$, $x, \tilde{c}\in R$, $n\in N$//

$$T_{f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\frac{f^{(k)}(\overbrace{x_0}^{=0})}{k!}}^{=1}(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=e^x \Rightarrow T_f(x)=f(x)\quad\forall\ x\in R \Rightarrow$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{\overbrace{e^{\xi}}^{\tilde{c}}}{(n+1)!}x^{n+1}\underbrace{\overbrace{\longrightarrow}^{S2.3.21\ 6.)}}_{n\to\infty}0$$

b)

//**S3.1.4**(1606) Vor: $(a_n)\subset R$, $a_n\searrow 0\ (n\to\infty)$. //

//Aussage: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent.//

//(2755)Folgerungen:

// 4.) • $(\log x)'=1/x$, $x>0$

$$f(x)=\ln(x),\ f:(0,\infty)\to R,\ x_0=1 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\ \ldots\ f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\quad\forall\ k\in N\ldots$$

$$f^{(n+1)}(\xi)=(-1)^k\frac{n!}{\xi^{n+1}}\quad\forall\ n\in N,$$

$$\xi\in(x,x_0)=(0,1)\cup(1,\infty)$$

$$\Rightarrow T_f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\overbrace{x_0}^{=1})}{k!}(x-\underbrace{x_0}_{=1})^k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(\underbrace{x_0}_{=1})^k k!}(x-1)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

Konvergenzradius: $\rho=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{\frac{1}{k}}}=1 \Rightarrow T_f(x)$ konvergiert $\forall\ x\in(0,2)$ ($\Leftrightarrow |x-1|<1$)

und auch für $x \underbrace{=}_{S3.1.4} 2$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\underbrace{1}_{x_0})^{n+1}\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+1}}\right|=\frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1}.$$

Sei $x\in[\frac{1}{2},2]$, Beh: $R_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0$

Fall 1: $1\le x\le 2 \Rightarrow \xi\ge 1 \Rightarrow \frac{x-1}{|\xi|}=\frac{x-1}{\xi}\le 1$

Fall 2: $\frac{1}{2}\le x\le 1 \Rightarrow \xi\ge\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|x-1|}{|\xi|}\le\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow \forall\ x[\frac{1}{2},2]$: $|R_n(x)|\le\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0 \Rightarrow$

$$\ln x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k=T_f(x)\quad\forall\ x\in[\tfrac{1}{2},2],\ \text{insbesondere}$$

$$\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots.$$

Sei $x\in(0,\frac{1}{2}]$: $\frac{\frac{1}{2}}{n+1}\frac{1}{|\xi|}\le|R_n(x)|=\frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{n+1}<\frac{1}{n+1}\frac{1}{|\xi|} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$

S5.3.3(2916)Hinreichende Bedingung für lokale Extrema bzw. Wendepunkte
Vor: $I\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$ (z.B. offenes Intervall $I=(a,b)\subset\mathbb{R}$)
1.)Aussage:
f 2n-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, $n\in\mathbb{N}$,
$f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=1,3,..,2n-1$, $f^{(2n)}(x_0)\neq 0$ $\Leftrightarrow$
f besitzt in x_0 ein lokales Extremum und zwar

ein lokales $\begin{cases} Maximum, wenn\ f^{(2n)}(x_0)<0 \\ Minimum, wenn\ f^{(2n)}(x_0)>0 \end{cases}$

*//**S5.3.1**(2901) Taylor//*
//Vor: Beliebiges $I\subset R$, $x_0\in I$, $\exists\ n\in N_0$: $f:I\to R$ ist n mal stetig //
// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und //
// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)//

//Aussagen: $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!}(x-x_0)^\nu+R_n(x)\quad\forall\ x\in I$*//*

// $R_n(x_0)=0,\ R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

// *mit geeignetem* $\xi=\xi(x)=\xi_{n,x_0}(x)\in I(x,x_0)$

*//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f:I\to R$ in einem Punkt x_0 //*
//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.//
*//**S4.3.4**(2409) Rechenregeln für Stetigkeit//*
//Vor:$M\subset R$, f,g mit $M\to R$, stetig im Punkt $x_0\in M$.//
//Beh:1.) $f(x_0)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$) $\Rightarrow$ *//*
// $\exists\ \delta>0$ mit $f(x)>a$ ($<a$ bzw. $\neq a$) $\forall\ x\in M\cap U_\delta(x_0)$.*//*
#Bew: Es gilt: f 2n-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, $n\in\mathbb{N}$,
$f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=1,3,..,2n-1$, $f^{(2n)}(x_0)\neq 0$ $\Rightarrow$

$T_{2n-1}(x_0)=\sum_{\nu=0}^{2n-1}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!}(x-x_0)^\nu=\frac{f^{(0)}(x_0)}{\underbrace{0!}}(x-x_0)^0+0+...+0=f(x_0)$

• $f^{(2n)}(x_0)>0$.
Wahl $\delta>0$: $f^{(2n)}(\xi)\ \underset{S5.1.2,\ S4.3.4}{>}\ 0\quad\forall\ \xi\in U_\delta(x_0)\ \underset{S5.3.1}{\Rightarrow}$

$\forall\ x\in U_\delta(x_0)\ \exists\ \xi=\xi_x\in U_\delta(x_0)$: $f(x)-\underbrace{f(x_0)}_{=T_{2n-1}(x_0)}=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\underbrace{(x-x_0)^{2n}}_{>0}\geq 0\ \Rightarrow$

$f(x)\geq f(x_0)$ $\forall\ x\in U_\delta(x_0)$ $\Rightarrow$ x_0 lokales Minimum
• $f^{(2n)}(x_0)<0$ analog $\Rightarrow$ x_0 lokales Maximum

Es gilt nicht:
f 2n-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, $n\in\mathbb{N}$,
\# $f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=1,3,..,2n-1$, $f^{(2n)}(x_0)\neq 0$ d.h. $\Rightarrow$
\# sondern
\# f (2n+1)-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, $n\in\mathbb{N}$,
\# $f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=2,4,..,2n$, $f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$ $\Rightarrow$

\# $T_{2n}(x_0)=\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!}(x-x_0)^{\nu}=\frac{f^{(0)}(x_0)}{\underbrace{0!}_{1}}(x-x_0)^0+0+...0=f(x_0)$

\# ● ● $f^{(2n+1)}(x_0)>0$.
\# Wahl $\delta>0$: $f^{(2n+1)}(\xi)>0$ $\forall$ $\xi\in U_\delta(x_0)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.3.1}$

\# $\forall$ $x\in U_\delta(x_0)$ $\exists$ $\xi=\xi_x\in U_\delta(x_0)$: $f(x)-f(x_0)\underbrace{=}_{S5.3.1}\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}$

\# $(x-x_0)^{2n+1}\underbrace{>}_{x_0<x<x_0+\delta}0$ und $(x-x_0)^{2n+1}\underbrace{<}_{x_0-\delta<x<x_0}0$ $\Rightarrow$

\# $f(x)\underbrace{\geq}_{x_0<x<x_0+\delta}f(x_0)$ und $f(x)\underbrace{\leq}_{x_0-\delta<x<x_0}f(x_0)$ und $\forall$ $x\in U_\delta(x_0)$ $\Rightarrow$
\# x_0 kein Extremum

\# ● ● $f^{(2n+1)}(x_0)<0$ analog

2.) Sei f (2n+1)-mal differenzierbar auf $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, $n\in\mathbb{N}$,
$f^{(k)}(x_0)=0$ für $k=2,..,2n$, $f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$.
Beh: x_0 ist ein Wendepunkt von f.

// **S5.2.10**(2857) Konvexität//
//Vor: Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a<b$ und $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I.
// 2.) Ist f auf (a,b) 2 mal differenzierbar, so gilt:
// (.) f konvex auf I $\Leftrightarrow$ $f''\geq 0$ auf (a,b)
// (..) f konkav auf I $\Leftrightarrow$ $f''\leq 0$ auf (a,b)
//**D5.2.3**(2861)//
//Sei $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ gegeben. Ein $x_0\in\overset{o}{M}$ heißt Wendepunkt von f: $\Leftrightarrow$//
//$\exists$ $\delta>0$ mit $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset M$ und f ist konvex auf $(x_0-\delta,x_0]$ und konkav auf //
//$[x_0,x_0+\delta)$ oder f ist konkav auf $(x_0-\delta,x_0]$ und konvex auf $[x_0,x_0+\delta)$.//

\#Bew: Vor $\Rightarrow$ $T_{2n}(x_0)=\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!}(x-x_0)^{\nu}=\frac{f^{(0)}(x_0)}{\underbrace{0!}_{1}}(x-x_0)^0+0+...0=f(x_0)$

\# ● $f^{(2n+1)}(x_0)>0$.
\# Wahl $\delta>0$: $f^{(2n+1)}(\xi)>0$ $\forall$ $\xi\in U_\delta(x_0)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.3.1}$

\# $\forall$ $x\in U_\delta(x_0)$ $\exists$ $\xi=\xi_x\in U_\delta(x_0)$: $f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}$ $\Rightarrow$

\# $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(2n+1)(x-x_0)^{2n}$ $\Rightarrow$

\# $f''(x)=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(2n+1)2n(x-x_0)^{2n-1}=\underbrace{c}_{>0}(x-x_0)^{2n-1}$

\# $(x-x_0)^{2n-1}\underbrace{\geq}_{x_0<x<x_0+\delta}0$ & $(x-x_0)^{2n-1}\underbrace{\leq}_{x_0-\delta<x<x_0}0$ $\Rightarrow$ $f''(x)\underbrace{\geq}_{x_0<x<x_0+\delta}0$ & $f''(x)\underbrace{\leq}_{x_0-\delta<x<x_0}0$

\# $\underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.10}$ f konvex auf $(x_0,x_0+\delta)$ & f konkav auf $(x_0-\delta,x_0)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{D5.2.3}$
\# x_0 ist Wendepunkt

• $f^{(2n+1)}(x_0)<0$ analog

Bsp: 1.) $f(x):=(x-x_0)^{2n}$ hat Minimum in x_0.
2.) $f(x):=(x-x_0)^{2n+1}$ hat Wendepunkt in x_0.

A5.3.1 $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x}$.

a) $T_{(3,0)}f(0,x)$ d.h. 3. Taylorpolynom von f, Entwicklungspkt $x_0=0$?

*//**D5.3.2** (2903) $I\subset\mathbb{R}$, $I=(a,b)$, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0\in I$, $n\in\mathbb{N}_0$:*
// • $T_{(n,x_0)}(x):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ heißt ntes Taylorpolynom von f um x_0.//
*//**D4.1.1**(2200) Für $x\in\mathbb{R}$ und $\delta>0$ sei*
// $U_\delta(x_0):=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\delta$-Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}$.
// $\overset{o}{U}_\delta(x_0):=U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\{x\in\mathbb{R}/0<|x-x_0|<\delta\}$.
//Sei $M\subset\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$.
//1.) $x_0\in M$ heißt innerer Punkt von M:$\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $U_\delta(x_0)\subset M$.
// $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M
*//**S5.3.1**(2903) Satz von Taylor*
//Vor: Beliebiges $I\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I$, $n\in\mathbb{N}_0$, $f:I\to\mathbb{R}$ ist n mal stetig
// differenzierbar (d.h $f\in C^n(I)$) und
// n+1 mal differenzierbar auf $\overset{o}{I}$ (d.h. $f^{(n+1)}$ existiert auf $\overset{o}{I}$)
//Aussagen:
// $\forall$ $x\in I$ $\exists$ $\xi=\xi_{(x)}=\xi_{n,x_0,x}\in I(x,x_0)$:
// $f(x)=T_n(x)+R_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu+R_n(x)$ und
// $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
//Bsp (2758): 3.) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x>-1$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}*1$, $x>-1$

Lös: $\overset{o}{I}\underbrace{=(-1,\infty)}_{D4.1.1}$, $x-x_0=x-0=x$

$$T_{(3,0)}f(0,x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3$$

$f(0)=1$, $f'(0)=\left.\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$, $f''(0)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}|_{x=0}=-\frac{1}{4}$,

$f'''(0)=\frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}|_{x=0}=\frac{3}{8}$

$$T_{(3,0)}f(0,x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

f in $[-1,\infty)$ $\underbrace{4x\,diffb}_{Bsp(2758)}$, 3x stetig diffb d.h Vor S5.3.1 erfüllt in $\overset{o}{I}$

$\frac{1}{(\sqrt{1+x})^p}$, $p\in\mathbb{N}$ stetig wegen

Bsp: (2401) (...) $h(x)=\sqrt{x}$, stetig in x_0 $\forall$ $x_0>0$ $\Rightarrow$
$\sqrt{1+x}$, stetig in x_0 $\forall$ $x_0>-1$ d.h. in $\overset{o}{I}$

*//**S4.3.4**(2415) Vor:$M\subset \mathbb{R}$, f,g mit $M\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in M$.*
// Beh: 2.) fg stetig in x_0,
// f/g stetig in x_0, falls $g(x_0)\neq 0$ (und folglich $g(x)\neq 0$ in $U_\delta(x_0)\cap M$

$\sqrt{1+x}\,)^p$, $\frac{1}{(\sqrt{1+x})^p}$ stetig $\forall$ x>-1

Da Vor S5.3.1 erfüllt gilt

$f(x)=T_{(3,0)}f(0,x)+R_4(0,x)$ mit $R_4(0,x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$,

$\xi\in(0,x)$, $\xi\in(x,0)=\frac{-\frac{15}{16}(1+\xi)^{-\frac{7}{2}}}{4!}x^4=-\frac{5}{128}\frac{x^4}{(1+\xi)^{\frac{7}{2}}}$

b) Zeige für $|x|\leq\frac{1}{5}$ die Restgliedabschätzung $|R_4(0,x)|<\frac{1}{4}10^{-3}$ und berechne $\sqrt{10}$ bis auf einen Fehler von 10^{-3}

Für $|x|\leq\frac{1}{5}$ gilt $|R_4(0,x)|\leq\frac{5}{128}\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{4*325^3}<\frac{1}{4*1000}$

Für $x=\frac{1}{9}$: $\sqrt{10}=3*\sqrt{\underbrace{1+1/9}_{\frac{10}{9}}}=3(1+\frac{1}{2}\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}\right)^3+R_4(0,\frac{1}{9})$)

Bis auf einen Fehler von $3\frac{1}{4*10^{-3}}<10^{-3}$ gilt

$\sqrt{10}$ ¿ $3(1+\frac{1}{2}\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}\right)^3)=3\frac{12295}{11664}=\frac{12295}{3888}=3,16229$