5.4 (3000) Vertauschung von Grenzwerten, Gliedweises Differenzieren

//**D4.2.4**(2304)//
//● Eine (reelle) Funktionenfolge ist eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Funktionen
// f_i: $R \to R$, Definitions (D)- und Zielmengen (Z) können auch andere //
// Mengen sein, z.B. Intervalle, müssen jedoch für alle f_i dieselben//
// sein f: $D\times N \to Z$, $(x,n) \mapsto f_n(x)$//
//● ● ● Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf X gegen f://
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon)}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \ \forall\ x\in X\ \ \forall\ n>N_{(\varepsilon)}$//

S5.4.1 (3000) Vertauschung von Grenzwertübergängen
Vor: (.) Funktionenfolge f_n: $I \to R$ auf $I \subseteq R$ definiert, nicht notwendig stetig
(..) $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$: $I \to R$ gleichmäßig konvergent #($\forall\ x\in I$)#
(...) x_0 fest: $\exists\ a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)\ \ \forall\ n$

Aussage: $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))$

*//**S4.5.1**(2601) Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz//*
//Vor: Sei $M\subset R$ oder $M\subset C$ und sei f_n: $M\to C$ für $n\in N$ gegeben.//
//Beh: $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M
// (gegen eine Funktion $f(z) := M\to C$) $\Leftrightarrow$
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall z\in M$ (d.h. unabhängig von $z\in M$) mit
// $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0(\varepsilon)$.//
*//**S2.1.2**(1250) Vor: Seien (z_n), a aus R, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$*
//Beh: 2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge, d.h. //
// (*) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$: $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_0$//

Beweisschritte: #1.) Mit Vor (..)&(...), S4.5.1, S1.2.1, rechte Seite gegen a
Beweis $\exists$ a: $a=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n=\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)$,
#2.) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ geht wegen Vor (...) auch
für $x\to x_0$ gegen a($=\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))$)

Bew: 1.) Sei $a_n=\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ & $\exists\ n_0=n_{0(\varepsilon)}\ \forall\ x\in I: |f_m(x)-f_n(x)| \underset{Vor\ (..)\ S4.5.1}{\leq} \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{>0,\ beliebig}\ \ \forall\ m,n>n_{0(\varepsilon)}$
(da die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, ist n_0 nicht von x abhängig).
#$f_m(x) \underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} a_m$, $f_n(x) \underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} a_n \Rightarrow$
#$\exists\ \delta>0$ mit $|x-x_0|<\delta$: $|f_m(x)-a_m|<\frac{\varepsilon}{3}$ & $|f_n(x)-a_n|<\frac{\varepsilon}{3}\ \ \forall\ x\in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$
#$|a_m-a_n|=|f_m(x)+a_m-f_m(x)-a_n+f_n(x)-f_n(x)|=$
#$|(f_m(x)-f_n(x))+(a_m-f_m(x))+(-a_n+f_n(x))|\leq$
#$|f_m(x)-f_n(x)|+|a_m-f_m(x)|+|-a_n+f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon\ \ \forall\ m,n>n_{0(\varepsilon)}, x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)\ \Rightarrow$
#$|a_m-a_n|<\varepsilon\ \ \forall\ m,n>n_{0(\varepsilon)}, x\in\overset{o}{U}_\delta(x_0)$,
#wobei a_m, a_n 2 Grenzwerte von 2 Funktionen, $f_m(x)$ und $f_n(x)$ der
#Funktionenfolge für ein x mit $x\to x_0$.... für irgend ein $x\in U_\delta(x_0)$.
Wahl $x\in I/\{x_0\}$ nahe genug bei $x_0 \underset{Vor\ (...)}{\Rightarrow} |a_m-a_n|<\varepsilon\ \ \forall\ m,n>n_0 \underset{S2.1.2}{\Rightarrow}$
(a_n) ist Cauchyfolge mit Grenzwert $a=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n=(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))$

// (..) $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f: I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent #($\forall$ x∈I)#

// (...) x_0 fest: $\exists\ a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ $\forall$ n

//**S1.2.1**(407) Vor: $\mathbb{K}$ sei angeordneter Körper und a,b∈ $\mathbb{K}$
// 6.) |a+b|≤|a|+|b| (Dreiecksungleichung)

//Vor: (..) $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f: I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent #($\forall$ x∈I)#

2.) $\left|\underbrace{\overbrace{f(x)}^{=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)}}_{Vor(..): f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)} - a\right| \underbrace{\leq}_{S1.2.16.)} |f(x)-f_m(x)|+|f_m(x)-a_m|+|a_m-a|.$

Wahl m so groß, dass $|f(x)-f_m(x)| \underbrace{\leq}_{Vor\ (..)} \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall$ x∈I & $|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{3}$ $\forall$ x∈I &

$\delta>0$ so klein, dass $|f_m(x)-a_m| \underbrace{\leq}_{Vor:(...)} \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall$ x∈I mit $0<|x-x_0|<\delta$ ⇒

$|f(x)-a|\leq\varepsilon$ $\forall$ x∈I mit $0<|x-x_0|<\delta$ ⇒ $f(x) \underset{x\to x_0}{\rightrightarrows} a$ ⇒

$\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \underbrace{=}_{1.)} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \underbrace{=}_{1.)} \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x))$

S5.4.2(3002) Gliedweises differenzieren von Funktionsfolgen und -reihen

\# Beispiel für die Vor Seiten 3011

a) Vor:● Funktionenfolge $(f_n): I \to \mathbb{R}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $I=[a,b] \subset \mathbb{R}$,

●● Alle(f_n) auf I stetig und im Inneren differenzierbar

●●● $f_n{}'$ auf (a,b) gleichmäßig konvergent

●●●● Folge (f_n) wenigstens für ein $x=x^* \in I$ konvergent.

Aussage:

(.) Folge (f_n) auf I gleichmäßig konvergent und

(..) Grenzfunktion $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ ist auf (a,b) differenzierbar:

$(f(x))' = \lim_{n\to\infty} (f_n{}'(x))$ $\forall$ $x \in (a,b)$ d.h. $(f(x))' \underset{\dots}{=} (\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} (f_n{}')$

//**S4.5.1**(2601) *Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz Funktionenfolg*

//Vor: Sei $M \subset \mathbb{R}$ oder $M \subset \mathbb{C}$ und sei $f_n: M \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.//

//Beh: $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M //

// (gegen eine Funktion $f(z):=M \to \mathbb{C}$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)$//

// (unabhängig von $z \in M$) mit $|f_n(z) - f_m(z)|<\varepsilon$ $\forall$ $n,m \geq n_0(\varepsilon)$.//

//**S5.2.3**(2802) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)//

//Vor: $a<b$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)//

//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$//

*//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//Vor: Seien $(z_n),(w_n) \in \mathbb{C}$, konvergent mit $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, $w_n \xrightarrow{n\to\infty} w$, $w,z \in \mathbb{C}$.//

//Beh 5.) $\lim_{n\to\infty} (z_n+w_n)=z+w$/

Bew (.): ●●● & ●●●● $\underset{S4.5.1}{\overset{(f_n)\text{ in } x^* \text{ konvergent}}{\Rightarrow}}$

$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0=n_0(\varepsilon)$: $|f_m{}'(x) - f_n{}'(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ & $|f_m(x^*) - f_n(x^*)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\forall$ $m,n>n_0$ $\forall$ $x \in I$

Anwendung S5.2.3 auf $f_m - f_n$: $\forall$ $x,y \underset{Vor\,●●}{\in} (a,b)$, ($x,y$ Inneres), gewählt $\xi=x$

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > |f_m{}'(\xi) - f_n{}'(\xi)| \underset{f_m, f_n \text{ differenzierbar } S5.2.3}{=} \frac{|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(y) - f_n(y)|}{|x-y|} \quad \forall\ m,n>n_0 \Rightarrow$$

$$\frac{|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(y) - f_n(y)|}{|x-y|} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall\ m,n>n_0 \Rightarrow$$

(*) $|(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(y) - f_n(y))| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} * |x-y|$ $\forall$ $m,n>n_0$

x^* für y:

$|(f_m(x) - f_n(x))| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x^*) - f_n(x^*))| + |f_m(x^*) - f_n(x^*))|$

$< \dfrac{\varepsilon\,|x - x^*|}{2(b-a)} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall$ $m,n>n_0$ $\forall$ $x \in (a,b)$ $\underset{S4.5.1}{\Rightarrow}$

(f_n) gleichmäßig konvergent auf I gegen Grenzfunktion $f: I \to \mathbb{R}$

//Aussagen:

// (.) Folge (f_n) auf I gleichmäßig konvergent und

// (..) Grenzfunktion $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ ist auf (a,b) differenzierbar:

// $f'(x)=\lim_{n\to\infty}(f_n'(x))\ \forall\ x\in(a,b)$ d.h. $(\lim_{n\to\infty} f_n)'=\lim_{n\to\infty}(f_n')$

// *Seite 3002* $(*)\,|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(y)-f_n(y))|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}*|x-y|\ \forall\ m,n>n_0$

//***S2.1.2***(1250) *Eigenschaften konvergenter Folgen*//

//*Vor:Seien* (z_n), (w_n), w,z *aus* $\mathbb{C}$, *konvergent:* $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, $w_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$.//

//*Aussage:* 5.) $\lim_{n\to\infty}(z_n+w_n)=z+w$//

// (*) $|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(y)-f_n(y))|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}*|x-y|\ \forall\ m,n>n_0$ //

Bew (..): # (.) $\Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ & $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x_0)$ (da glm Konv⇒punktw Konv),#

Für $x_0\in I$ & $x\neq x_0$ sei $Q_n(x):=\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}$ & $Q(x):=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\underset{S2.1.2\,\&\,(.)}{\Rightarrow} Q_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} Q$ punktweise &

in (*) x_0 für y: $|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(x_0)-f_n(x_0))|<\frac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)} \Rightarrow$

$|(f_m(x)-f_m(x_0)-(f_n(x)-f_n(x_0))|<\frac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)} \Rightarrow$

$|Q_m(x)-Q_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ \forall\ m,n>n_0$

Wahl von x offenbar beliebig $\Rightarrow Q_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} Q$ gleichmäßig konvergent auf I.

$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0} Q(x)=\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} Q_n(x)) \underset{S5.4.1}{=} \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} Q_n(x))=\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$.

Da $x_0\in I$ beliebig: $f'(x)=(\lim_{n\to\infty} f_n')(x)$ d.h. $(\lim_{n\to\infty} f_n)'=\lim_{n\to\infty}(f_n')$

b) Sind alle g_k in einem Punkt x_0 stetig und ist die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf D gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig in x_0

Bew:Folgt aus a), angewandt auf $f_n=\sum_{k=1}^{n\to\infty} g_k$.

//a)Vor:● Funktionenfolge $(f_n): I\to \mathbb{R}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$,
// ●● Alle(f_n) auf I stetig und im Inneren differenzierbar
// ●●● f_n' auf (a,b) gleichmäßig konvergent
// ●●●● Folge (f_n) wenigstens für ein $x=x^*\in I$ konvergent.

A5.4.1 Zeige, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{x}{n^2})$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen eine auf $(0,\infty)$ differenzierbare Funktion konvergiert. Bestimme auch die Ableitung der Grenzfunktion (GF)

//**S5.1.6** (2750)2.)Kettenregel
// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in \overset{\circ}{B}$, und sei
// $g:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.
// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.

Lös:Gliedweises differenzieren:

● $I=[0,k], f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{x}{n^2})$

●● $f_n(x)=\log(1+x/n)$ auf $\mathbb{R}$ stetig, d.h. auf I stetig

$\forall$ $n\in\mathbb{N}$ im Inneren differenzierbar, da $(f_n(x))' \underset{S5.1.6\,2.}{\underbrace{=}} = \frac{1}{1+x/n^2}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2+x}$

●●● $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}$ gleichmäßig konvergent auf $[0,k]$, weil

$x>0: \frac{1}{n^2+x} \underset{x>0}{\underbrace{\le}} \frac{1}{n^2}$ $\forall$ $x\in(0,k)$ konvergent nach Majorantenkriterium

$x=0: g_n(0)=0$, also $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(0)=0$ konvergent $\Rightarrow$

●●●● erfüllt und

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+x/n^2)$ gleichmäßig konvergent auf $[0,k]$ gegen GF f ,

$\Rightarrow$ es gilt (..) differenzierbar auf $(0,k)$ mit $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x}$

Jedoch

$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+x/n^2)$ auf $[0,\infty)$ nicht gleichmäßig konvergent….

Z.z. $\exists$ $\varepsilon>0$ $\forall$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\exists$ $x\in[0,\infty)$, $\exists$ $n\in\mathbb{N}$ $n\ge N \Rightarrow |\log(1+x/n^2)|>\varepsilon$

Bew:Wähle $\varepsilon=\log 2$, Sei $N\in\mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle $x=2N^2$, $n=N$,

dann $1+x/n^2=1+\frac{2N^2}{N^2}=3>2$, $|\log(1+x/n^2)|>\varepsilon$

Eigener Versuch:

*//**D4.5.1** (2600)Gleichmäßige Konvergenz//*

// Sei $M\subset R$ oder $M\subset C$. Sei $f_n:M\to \mathbf{C}$ für $n\in N$ gegeben. Die Funktionsfolge//

// $(f_n)_{n=1}^{\infty}=(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M gegen $f(z):M\to C$: $\Leftrightarrow$//

//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit//

// $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$ <u>und</u> $\forall\ z\in M$.//

*//**S4.5.2** (2601)Majorantenkriterium von Weierstrass//*

//Vor:Sei $M\subset \mathbf{R}$ oder $M\subset \mathbf{C}$ und sei $f_n:M\to \mathbf{C}$ für $n\in N$ gegeben.//

// Sei $|f_n(z)|\leq a_n\ \ \forall\ n\in N$ und $\forall\ z\in M$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.//

//Beh:$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sind gleichmäßig auf M konvergent.//

\# Methode:Mit S5.4.2 Bew $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n^2})$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergent

\# gegen eine auf $(0,\infty)$ differenzierbare Funktion,dazu zunächst Prüfung der

\# Voraussetzungen.

\# Nach diesem Zeichen • Prüfung der Voraussetzungen für S5.4.2

\# •Vor •: Funktionenfolge $(f_n):I\to \mathbf{R}\ \ \forall\ n\in N$, $I=[a,b]\subset \mathbf{R}$ ok wie folgt:

Lt Aufgabe $x\in[0,\infty)$, d.h, $x\in[0,c]\ \ \forall\ c\in R_+ \Rightarrow$

$$(f_n)=\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{x}{n^2}):I\to \mathbf{R}\ \ \forall\ n\in N,\ \ I=[0,c]\subset \mathbf{R}$$

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//

//1.)Vor:Seien f,g: $M\to C$ differenzierbar in $x_0\in \overset{o}{M}$ bzw.$\mathbf{R}$://

// Funktionen f und $g:I\to \mathbf{R}$ seien differenzierbar in $x_0\in I$//

//Beh:a)$f\pm g$ sind differenzierbar in z_0 und $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$.//

// b)$\forall\ \alpha\in \mathbf{R}(\mathbf{C})$ ist αf differenzierbar in z_0 und //

// $(\alpha f)'(z_0)=\alpha f'(z_0)$.//

//2.)Kettenregel//

// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{o}{A}$,$f(z_0)\in \overset{o}{B}$, und sei $g:B\to \mathbf{C}$ //

// differenzierbar in $f(z_0)$.//

// Beh:$g\circ f:A\to \mathbf{C}$ ist differenzierbar in z_0 und //

// $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$ //

// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.//

//Folgerungen://

//4.)$(\log x)'=1/x,\ x>0$//

//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f:I\to \mathbf{R}$ in einem Punkt x_0 //

//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.//

\# • S5.4.2 Vor.•• Alle(f_n) auf I stetig und im Inneren differenzierbar ok

\# wie folgt:

$$f_n'=\left(\sum_{k=1}^{n} \log(1+x/k^2)\right)' \underset{S5.1.6\,1a),b),2.),Folgerungen 4.)}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x/k^2}\frac{1}{k^2} \underset{Vor:\ x\geq 0,\ k>0,\ Folgerungen\ 4.}{>} 0 \Rightarrow$$

\# f_n auf I differenzierbar $\underset{S5.1.2}{\Rightarrow}$ f_n auf I stetig

//**D4.2.4**(2350) (Körper:K, z.B. R, C)
//● ● Die Funktionenfolge (f_n) heißt auf D gleichmäßig konvergent, falls
// sie punktweise konvergiert (gegen die Grenzfunktion f) und falls
// weiter gilt: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq N\ \forall z\in D: |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

//(1302)Bsp:1.) $\forall\ k\in\mathbb{N},\ a_n:=\sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \leq 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-1/k\right) \underset{S1.7.1}{=}$ //

// $1+1-1/n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 2 \underset{S2.2.2}{\Rightarrow}$ konvergent//

//***S2.2.2** (1301)Vor: $(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//*

\# ● Vor S5.4.2 ●●● $(f_n)'$ auf I gleichmäßig konvergent ok wie folgt:

$\forall\ x\in[0,c]$ gilt $(f_n)'=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x/k^2}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+x}\underset{x\geq 0}{\leq}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

\# $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+x}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4+x}+\ldots\frac{1}{n^2+x}\uparrow \Rightarrow 0<\frac{1}{1+x}<\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k^2+x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\underset{(1302)Bsp:1.)}{\leq} 2 \underset{S2.2.2}{\Rightarrow}$

\# $(f_n)'=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+x}$ konvergent $\Rightarrow$ $(f_n)' \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} (f)'$ (f Grenzfunktion)

\# ● Vor S5.4.2 ●●●● (f_n) wenigstens für ein $x=x^*\in I$ konvergent ok:

\# $x^*=0: (f_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{0}{n^2})=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1)=0$ konvergent

\#Deshalb $\underset{S5.4.2}{\overset{\text{Vor erfüllt}}{\Rightarrow}}$ $(f_n)=\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{k^2})$ konvergiert auf $I=[0,c]$ gleichmäßig

und

\#Grenzfunkt $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{k^2})$ ist auf $(0,c)$ differenzierbar:

\# $f'(x)=\lim_{n\to\infty}(f'_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2+x}\right)'=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log(1+\frac{x}{n^2})\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x}$

//**S5.4.2**(3002) Gliedweises differenzieren von Folgen und Reihen//
//Vor…Dann (.) konvergiert (f_n) auf $I=[a,b]$ gleichmäßig und //
// (..) Grenzfunktion $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ ist auf (a,b) differenzierbar:
// $f'(x)=(\lim_{n\to\infty} f_n')(x)$ d.h. $(\lim_{n\to\infty} f_n)'=\lim_{n\to\infty}(f_n')$ //

\# $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+x/n^2)$ auf $\underset{!!!}{[}\ 0,\infty)$ <u>nicht</u> gleichmäßig konvergent

//**S4.5.1**(2601)Funktionenreihe Cauchy-Kriterium für gleichm Konvergenz//
//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$, $f_n:M\to\mathbb{C}$ für $n\in\mathbb{N}$ gegeben.//
//Beh: $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf M (gegen Funktion $f(z):=M\to C$)

// $\Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\ n_0=n_0(\varepsilon)$ (unabhängig von $z\in M$) mit $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0(\varepsilon)$

\#Bew: $|f_n(z)-f_m(z)|=|\sum_{k=1}^{n}\log(1+x/k^2)-\sum_{k=1}^{m}\log(1+x/k^2)|=|\sum_{k=n+1}^{m}\log(1+x/k^2)|$

\# Z.z. $\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ N\in\mathbb{R}_+\ \exists\ x\in[0,\infty),\ \exists\ k\in\mathbb{N}\ k>n+1\geq N \Rightarrow |\log(1+x/k^2)|>\varepsilon$
\# Wähle $\varepsilon=\log 2$, Sei $N\in\mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle $x=2N^2$, $n=N$,
\# dann $1+x/k^2=1+\frac{2N^2}{N^2}=3>2 \Rightarrow |\log(1+x/k^2)|>\log 2=\varepsilon$

A5.4.2 Sei $f_n(x)=(1+x/n)^n$ für $x\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass die Voraussetzungen von S5.4.1 für jedes abgeschlossene Intervall [a,b] erfüllt sind. Gib durch Anwendung dieses Satzes einen neuen Beweis für die Differenzierbarkeit von e^x.

A5.4.3 Untersuche, ob S5.4.1 auf die Folge (f_n) mit $f_n(x)=(1-x)x^n$, $0\leq x\leq 1$ angewandt werden kann.

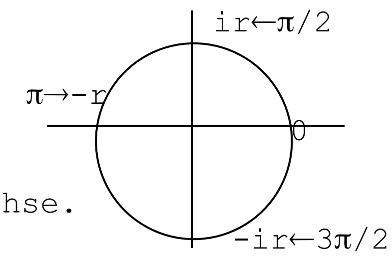
5.5 zur Zeit leer

5.6(3007)Das Argument und der Logarithmus einer komplexen Zahl

*//**S1.6.1** $z=x+iy$ $x,y\in R$, $i^2=-1$ 4.) $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ Abstand von z zum 0 Punkt*
*//**S3.6.3**(2104)Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen//*
// $\forall$ $z=x+iy$ gilt://
//1.) $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ (Eulersche Formel),//
// $e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.//
//7.) $\forall$ $z=x+iy\in C$ gilt $\cos^2 z+\sin^2 z=1$, $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\, z}$//

Seien $r\in\mathbb{R}_+$ und $\Phi\in\mathbb{R}$ gegeben. Dann wird durch
$z=r(\cos\Phi+i\sin\Phi)=re^{i\Phi}$ eine komplexe Zahl z gegeben.
Ihr Realteil ist offenbar $x=r\cos\Phi$, ihr Imaginärteil gleich $y=r\sin\Phi$
$\underset{S3.6.3\,1.),7.)}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $r=|z|$, also liegt z auf dem Kreis um 0 mit Radius r und kann insbesondere nicht gleich 0 sein.

Weiter gilt folgendes hinsichtlich des Verhaltens von z in Abhängigkeit von Φ:



1.) Für $0\leq\Phi\leq\pi/2$ ist $x,y\geq 0$ und
   x ↓ von r nach 0, y ↑ von 0 nach r
   Also wandert z auf dem besagten Kreis im Gegenuhrzeigersinn von der positiv-reellen zur positiv-imaginären Achse.
2.) Für $\pi/2\leq\Phi\leq\pi$ ist $x\leq 0, y\geq 0$ und
   x ↓ von 0 nach -r, y ↓ von r nach 0.
   Also wandert z im selben Sinn weiter bis zur negativ-reellen Achse.
3.) Für $\pi\leq\Phi\leq 3\pi/2$ folgt $x,y\leq 0$ und
   x ↑ von -r nach 0, y ↓ 0 nach -r.
   Somit wandert z weiter bis zur negativ-imaginären Achse.

4.) Für $3\pi/2\leq\Phi\leq 2\pi$ folgt $x\geq 0$, $y\leq 0$ und
   x ↑ und y ↑ von 0 bis r bzw von −r bis 0.
   Also wandert z weiter zur positiv-reellen Achse.

*//**S1.6.1** $z=x+iy$ $x,y\in R$, $i^2=-1$ 4.) $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ Abstand von z zum 0 Punkt*
*//**S3.6.3**(2104)Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen//*
// $\forall$ $z=x+iy$ gilt://
//1.) $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ (Eulersche Formel),//
// $e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.//
//7.) $\forall$ $z=x+iy\in C$ gilt $\cos^2 z+\sin^2 z=1$, $|e^z|=e^{Re\, z}$//
//**S3.6.4** 6.) $\cos(z+k2\pi)=\cos z$, $\sin(z+k2\pi)=\sin z$, $e^{z+i2k\pi}=e^z$ $\forall$ $k\in Z$.
Das bedeutet, dass die Zahl z mit wachsendem Φ auf dem Kreis um 0 mit Radius r wandert und zwar im Gegenuhrzeigersinn. Ersetzt man Φ durch $\Phi\pm 2\pi$, so erhält man wegen Beh5.5.1 die gleiche Zahl z, d.h., nachdem Φ ein Intervall der Länge 2π durchlaufen hat, beginnt die Reise wieder von vorn.

//**D5.5.2**(3004)Die Umkehrfunktion//
// $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ heißt Arcuscosinusfunktion.
//**S3.6.4**(2107)
//6.) $\cos(z+\pi)=-\cos z$, $\sin(z+\pi)=-\sin z$,
// $\cos(z+k2\pi)=\cos z$, $\sin(z+k2\pi)=\sin z$ $\forall$ $k\in Z$.
Ein Paar (r,Φ) legt also eine Zahl $z=r(\cos\Phi+i\sin\Phi)=re^{i\Phi}\neq 0$ fest.
Umgekehrt, sei $(z=x+iy)\in C\setminus\{0\}$ gegeben und $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ gesetzt $\Rightarrow$ $x/r,\ y/r\in[-1,1]$.

- $y\geq 0$: sei $\Phi=\arccos(x/r)$ $\Rightarrow$
  $0\leq\Phi\leq\pi$ und $x=r\cos\Phi$, $y=\sqrt{r^2-x^2}=r\sqrt{1-\cos^2\Phi}=r\sin\Phi$.
- $y<0$: sei $\Phi=\pi+\arccos(-x/r)$ gewählt $\Rightarrow$
  $\cos\Phi=\cos(\pi+\arccos(-x/r))\underbrace{=}_{S3.6.4\ 6.)}-\cos(\arccos(-x/r))=x/r\Rightarrow x=r\cos\Phi$.

  $y=-\sqrt{r^2-x^2}=-r\sqrt{1-\cos^2\Phi}\underbrace{\Rightarrow}_{\Phi\in[\pi,2\pi]\Rightarrow\sin\Phi\leq 0}y=r\sin\Phi$.

Das bedeutet: Zu jedem $z\in C\setminus\{0\}$ gibt es ein $r\in R_+$ und $\Phi\in R$ so, dass $z=r(\cos\Phi+i\sin\Phi)=re^{i\Phi}$ gilt und Φ ist eindeutig bestimmt, wenn wir verlangen, dass Φ in irgendeinem halboffenen Intervall der Länge 2π liegt.

D5.6.1(3008) Sei $\forall$ $z\in C\setminus\{0\}$. Ein $\Phi\in R$, mit $z=r(\cos\Phi+i\sin\Phi)=re^{i\Phi}$, heißt ein Argument für z. Wir schreiben auch etwas ungenau $\Phi=\arg z$. Derjenige Wert für Φ im halboffenen Intervall $[-\pi,\pi)$ heißt auch der Hauptwert des Arguments. Der komplexen Zahl 0 wird entweder überhaupt kein Argument zugeordnet, oder man sagt, dass sie jedes Argument haben kann.
Für $z=re^{iF}$ mit $r=|z|>0$, $F=\arg z\in[-\pi,\pi]$ heißt die Zahl
$\log z=\log(re^{i\Phi})=\log(|z|*e^{i\Phi})=\log|z|+\log(e^{i\Phi})=\log|z|+i*\Phi\log e=$
$=\log|z|+i*\Phi*1=\log|z|+i*\arg z$
der Hauptwert des Logarithmus der komplexen Zahl z.
Beachte, dass damit jeder komplexen Zahl außer 0 ein Logarithmus zugeordnet ist.

//**S3.6.2**(2102)//

//Vor:Sei $\alpha \in R$, $\alpha > 0$ und der Kreisbogen C_α: //

//Summe der $e^{i\Delta t}$, $e^{it} \neq e^{i\alpha}$ $\forall$ $0 \le t \le \alpha$. //

// $\forall$ $n \in N$ sei $Z_n: 0=t_0<t_1...<t_n=\alpha$ mit $\Delta_\nu := t_\nu - t_{\nu-1} = \alpha/n$ für //

// $\nu=1,2,..n$, eine Zerlegung von $[0,\alpha]$ und $L(Z_n) := \sum_{\nu=0}^{n} |e^{it_\nu} - e^{it_{\nu-1}}|$.//

//Beh:$\exists$ $L_\alpha := \lim_{n\to\infty} L(Z_n)$ und es gilt $L_\alpha = \alpha$. # $\frac{e}{z} = e^{i\alpha} = e^{iL_\alpha}$ # //

Dass das Argument einer komplexen Zahl gleich dem Winkel im sogenannten Bogenmaß zwischen der positiv-reellen Achse und der von 0 durch z gehenden Halbgeraden ist, folgt aus S3.6.2 bzw wird erst aus der Theorie der Kurvenlänge (Analysis 2) folgen.

A5.6.1 Diskutiere, in welchem Sinne folgende Aussage richtig ist: Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen addieren sich deren Argumente

A5.6.2 Finde den Hauptwert des Arguments und des Logarithmus für die folgenden Zahlen -1, i, $1+i$, $2(1-i)$, $-i$

A5.6.3 Zeige: Genau dann ist $e^z=1$, wenn $z=2k\pi$ ist für ein $k\in\mathbb{Z}$.

A5.6.4 Zeige $e^{\pm\pi i}=-1$

A5.6.5 Berechne die folgenden Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$

//**S5.2.8**(2850)Grenzwertregeln von de l'Hospital//

//Vor:Sei $-\infty<a<b\le\infty$, $I=[a,b)\subset\mathbb{R}$. Die Funktionen $f,g:I\to\mathbb{R}$ seien //

// differenzierbar auf I und $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in I$. $\exists\ \lambda:=\lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.//

//Beh: Gilt (.) $\lim\limits_{x\to b_-}f(x)=\lim\limits_{x\to b_-}g(x)=0$ oder (..) $\lim\limits_{x\to b_-}|g(x)|=\infty$ so//

// $\exists\ \lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda=\lim\limits_{x\to b_-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda=\infty$, $\lambda=-\infty$)//

Lös: $$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}\underbrace{=}_{S5.2.8}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1\cdot e^x}{1+e^x}}{\dfrac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-xe^{x/2}}{x^3}$

Lös:...$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}-1-x\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^k k!}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}-x(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{8})-\sum\limits_{k=4}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^{k-1}(k-1)!}}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{8}}{x^3}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-3}}{k!}-\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-3}}{2^{k-1}(k-1)!}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{8}}{x^3}+x\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-4}}{k!}-x\sum_{k=4}^{\infty}\frac{x^{k-4}}{2^{k-1}(k-1)!}\right)=$$
$$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$$

c) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$.

Lös:$\cdots=\lim\limits_{x\to\pi/4}e^{\log(\tan x)^{\tan 2x}}\ \lim\limits_{x\to\pi/4}e^{\tan 2x*\log(\tan x)}=e^{-1}$.

$$\text{NR: }\lim_{x\to\pi/4}\frac{\log(\tan x)}{\dfrac{1}{\tan 2x}}\underbrace{=}_{d'lHosp\ \lim\limits_{x\to\pi/4}\log(\tan x)=0=\lim\limits_{x\to\pi/4}1/\tan 2x}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\dfrac{1}{\tan x}\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{(\tan 2x)^2}\cdot\dfrac{1\cdot 2}{(\cos 2x)^2}}=$$

$$\frac{\dfrac{1}{\sin x\cos x}}{-\dfrac{2}{(\sin 2x)^2}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin^2 2x}{-2\sin x\cos x}=\frac{1}{-1}=-1$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin^3 x)(1-\cos x)}{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2}$

Lös:..$=\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^3 x(1-\cos x)(1+\cos x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}{(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2)(1+\cos x)(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}=$

$=\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}{(1+\cos x)((\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3})^2-4)}=\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)}{(1+\cos x)2(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}-1)}=$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{(1+\cos x)2(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}-1)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}=$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{(1+\cos x)2((1+x^3)(1-x^3)-1)}=$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{(1+\cos x)2((1-x^6-1)}=$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^5 x(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{-(1+\cos x)2x^6}=$

$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^5}_{\to 1} \underbrace{\frac{(\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}+2)(\sqrt{1+x^3}\sqrt{1-x^3}+1)}{-2(1+\cos x)}}_{\to -2} =-2$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4}=1$