6. (3100) Integralrechnung

Problem Flächenberechnungen durch beliebig genaue Annäherung mit Rechtecken, deren Flächen leicht zu berechnen sind

6.1 (3100) Zerlegung, Ober- und Untersummen

D6.1.1 (3100) $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $f: I\to\mathbb{R}$.

a) $Z=\{x_0,\dots x_N\}$ mit $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ heißt Zerlegung von I in Teilintervalle $I_k:=[x_{k-1},x_k]$ für $k=\{1,\dots,N\}$.
$|Z|=\max\{|I_k|:1\le k\le N\}$, $|I_k|:=x_{k-1}-x_k$ heißt Feinheit der Zerlegung Z

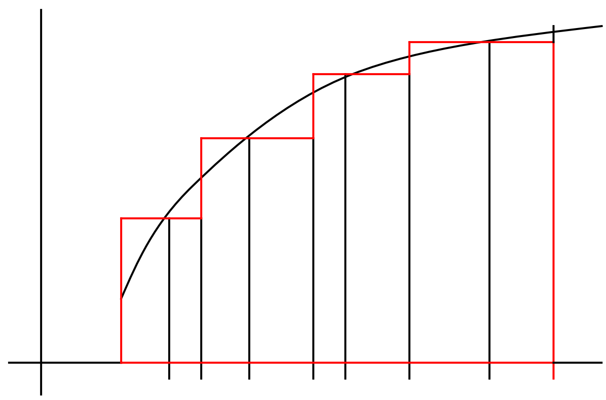
b) Eine <u>Folge</u> $(Z_n)_n$ von Zerlegungen heißt Zerlegungsnullfolge (ZNF), falls $\lim\limits_{n\to\infty}|Z_n|=0$ gilt.

c) Ein Vektor $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_N\}^T$ heißt ein Zwischenpunktvektor zu Z falls $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$ $\forall$ $k=1,\dots,N$.

d) $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $x\in[a,b]$:
$\forall$ Z und jeden Zwischenpunktvektor ξ zu Z heißt die Zahl

$S(Z,\xi,f)=\sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ die zu Z und ξ gehörige Riemannsche (Zwischen) summe von f.

Bsp N=4



$$S(Z,\xi,f)=\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

e) $|f(x)| \leq K \in \mathbb{R}_+ \ \forall\ x \in [a,b]$:

$$m_k := \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \underset{a)}{=} \inf(f(I_k)) = \underbrace{\inf}_{x \in I_K} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I_k\},$$

$$M_k := \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \underset{a)}{=} \sup(f(I_k)) = \underbrace{\sup}_{x \in I_K} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I_k\}, \text{ jeweils}$$

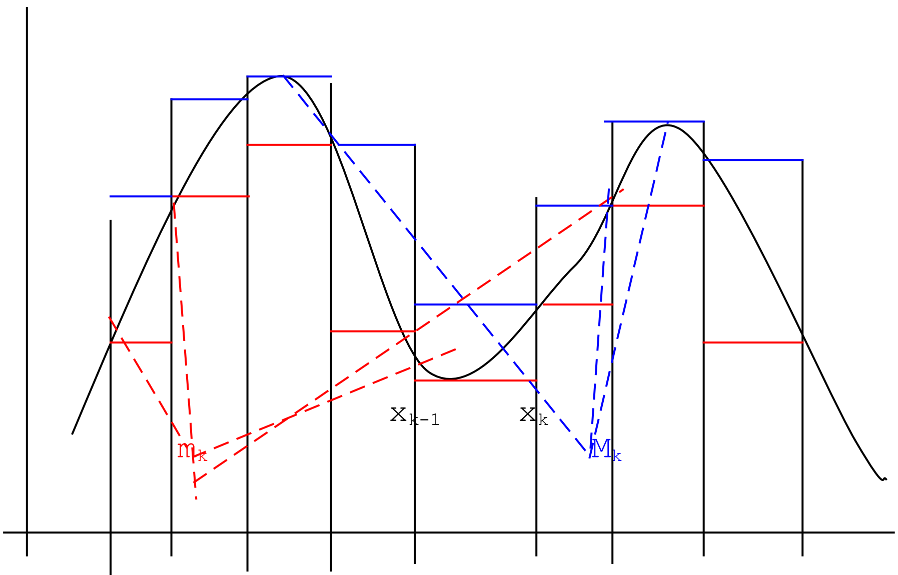
$k \in \{1, 2, ..., n\}$

Untersumme $\underline{S}(Z, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k |I_k| = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$

Obersumme $\overline{S}(Z, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k| = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$

Bem: $m_k \leq \xi_k \leq M_k \Rightarrow \underline{S}(Z, f) \leq S(Z, \xi, f) \leq \overline{S}(Z, f)$,

Skizzen Anschauungsbsp und Merkstütze



f) Z, Z_1, Z_2 Zerlegungen von I

- ● Z_1 enthält alle Zwischenpunkte von Z: Z_1 heißt Verfeinerung von Z
- ●● Z enthält alle Zwischenpunkte von Z_1 und Z_2: Z heißt Überlagerung von Z_1 und Z_2, Schreibweise $Z = Z_1 + Z_2$

Bezeichnungen: Manchmal wird auch z.B statt $\overline{S}(Z, f)$ nur $\overline{S}(Z)$ geschrieben

g) $f(x) : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq K \ \forall\ x \in I$

Nach Bew zu Bem unten, sind Obersummen (Untersummen) von f dann stets nach unten (oben) beschränkt, deshalb:

$$I_* f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underbrace{\sup}_{alle\ Z} \{\underline{S}(Z)\}, \quad I^* f(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underbrace{\inf}_{alle\ Z} \{\overline{S}(Z)\}$$

wobei das Supremum bzw Infimum jeweils über <u>alle</u> Zerlegungen von [a,b] gebildet wird.

Die so definierten Werte I_*, I^* heißen das Unter- bzw Oberintegral von f über [a,b]. (siehe auch S6.1.3(3107). Offenbar: $I_* f(x) \leq I^*$.

Bem: Schreibweisen... statt I_* auch $\underline{S}(f)$, statt I^* auch $\overline{S}(f)$
I_* und I^* sind wohldefiniert

*//**D1.3.2**(504)//*

// Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ heißt vollständig (bezüglich <): //

// $\Leftrightarrow\ \forall\ T \subset K$, $T \neq \emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists\ \sup T \in K$.//

Bew zur Bem: Sei $Z_0 \in Z(a,b) \Rightarrow$

Für beliebige Z von I: $\underline{S}(Z,f) \le \overline{S}(Z_0,f) \le \underbrace{\sup}_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \Rightarrow$

$\{\underline{S}(f,Z) \mid \underline{S}(f,Z) \le \underbrace{\sup}_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)\} \subset R$ ist nach oben beschränkt und $\neq \emptyset$

$\underset{D1.3.2}{\Rightarrow}$ $I_*f(x)$ existiert. Analog für $I^*f(x)$

Andere Formulierung Bew:

$\underbrace{\inf}_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \le \underline{S}(f,Z) \le \overline{S}(f,Z) \le \underbrace{\sup}_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \Rightarrow$

$\underline{S}(f,Z)$ und $\overline{S}(f,Z)$ sind beschränkt $\Rightarrow \exists \sup\{\underline{S}(Z)\}$ & $\inf\{\overline{S}(Z)\}$ $\forall$ Z

Wahlweise Definition Riemann-integrierbar durch h* oder h**, da S6.1.6. **h*)** $\Leftrightarrow$ **h**)** beweist. Die Beweiskette für S6.1.6 benutzt nur h*) in L6.1.2

h*) Falls $I^*(f)=I_*(f)$, so heißt f über [a,b] (Riemann)integrierbar.
Schreibweise: $R([a,b]):=\{f:[a,b]\to R \mid f$ R-integrierbar$\}$

Der gemeinsame Wert wird dann mit $I^*(f)=I_*(f)=\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet

und heißt bestimmtes (Riemann-)Integral von f über [a,b]

h)** Falls für jede zulässige Zerlegungsfolge und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren die zugehörige Folge von Riemannsummen konvergiert, dann heißt f über das Intervall [a,b] Riemann-integrierbar.

Andere Formulierung

$\sum_{\ell=1}^{n_K} f(\xi_\ell^{(k)})(x_{\ell-1}^{(k)}-x_\ell^{(k)})$ konvergiert $\forall$ k mit $|Z_k| \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$ #(egal welche n_k auftreten)

(d.h $\lim_{k\to\infty}\sum_{\ell=1}^{n_K} f(\xi_\ell^{(k)})(x_{\ell-1}^{(k)}-x_\ell^{(k)})=c$, mit $|Z_k| \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$)

S6.1.1(3103) $\tilde{Z}$ ist Verfeinerung von Z ⇒

$\underline{S}$ (Z, f) ≤ $\underline{S}$ (f, $\tilde{Z}$) & $\overline{S}$ (Z, f) ≥ $\overline{S}$ (f, $\tilde{Z}$)

Bew: • Z=(a=x_0<x_1<.................<x_n=b)

$\tilde{Z}$=(a=x_0<x_1<....<x_{j-1}<y<x_j<...<x_n=b) d.h genau 1 Punkt y zusätzlich

I_k:=[x_{k-1},x_k], k=1,..,N, $m_k=\underbrace{\inf}_{x\in I_K} f(x)$, $I_j := \underbrace{[x_{j-1},y]}_{:=I_j^{'}} \cup \underbrace{[y,x_j]}_{:=I_j^{''}}$,

$m_j^{'} := \underbrace{\inf}_{x\in I_j^{'}} f(x)$, $m_j^{''} := \underbrace{\inf}_{x\in I_j^{''}} f(x)$ ⇒ $m_j^{'} \underbrace{\geq}_{I_j^{'}\subset I_j} m_j$ & $m_j^{''} \underbrace{\geq}_{I_j^{''}\subset I_j} m_j$ ⇒

$\underline{S}$ (f, $\tilde{Z}$) − $\underline{S}$ (f, Z) = $\sum_{k=1,k\neq j}^{n} m_k(x_k-x_{k-1}) + m_j^{'}(y-x_{j-1}) + m_j^{''}(x_j-y) - \sum_{k=1,}^{n} m_k(x_k-x_{k-1}) =$

$\underbrace{m_j^{'}}_{\geq m_j}\underbrace{(y-x_{j-1})}_{>0} + \underbrace{m_j^{''}}_{\geq m_j}\underbrace{(x_j-y)}_{>0} - m_j(x_j-x_{j-1}) = \underbrace{m_j^{'}}_{\geq m_j}\underbrace{(y-x_{j-1})}_{>0} - m_j(y-x_{j-1}) + \underbrace{m_j^{''}}_{\geq m_j}\underbrace{(x_j-y)}_{>0} - m_j(x_j-y)$

≥0 ⇒ $\underline{S}$ (f, $\tilde{Z}$) ≥ $\underline{S}$ (Z, f)

• • Im Allgemeinen Fall wendet man obiges Argument sukzessive (schrittweise)an mit Induktion

Analog für Obersummen

S6.1.2(3103)Sei f auf [a,b] beschränkt. Für beliebige Zerlegungen Z_j von [a,b] gilt dann stets $\underline{S}$ (Z_1) ≤ $\overline{S}$ (Z_2)

//**S6.1.1**(3103)

// $\tilde{Z}$ ist Verfeinerung von Z ⇒ $\underline{S}$ (f,Z) ≤ $\underline{S}$ (f, $\tilde{Z}$) & $\overline{S}$ (f, Z) ≥ $\overline{S}$ (f, $\tilde{Z}$)//

//**D6.1.1 e)**(3100) f auf [a,b] beschränkt und sei Z={x_0,...,x_N) eine//

//Zerlegung von [a,b]. Bem: m_k≤M_k ⇒ $\underline{S}$ (Z, f) ≤ $\overline{S}$ (Z, f)//

Bew: In S6.1.1 a) Z= Z_1, $\tilde{Z}$ = Z_2 $\underset{S6.1.1}{\Rightarrow}$ $\underline{S}$ (Z_1) ≤ $\underline{S}$ (Z_1+ Z_2) $\underset{D6.1.1e)\,Bem}{\Rightarrow}$

$\underline{S}$ (Z_1+ Z_2) ≤ $\overline{S}$ (Z_1+ Z_2) $\underset{Z_1\leftrightarrow Z_2, S6.1.1}{\Rightarrow}$ $\overline{S}$ (Z_1+ Z_2) ≤ $\overline{S}$ (Z_2) ⇒ $\underline{S}$ (Z_1) ≤ $\overline{S}$ (Z_2).

Nach obigem **S6.1.2** sind die Obersummen(Untersummen) von f stets nach unten(oben) beschränkt:($\underline{S}$ (Z_1) ≤ $\overline{S}$ (Z_2)). Motivation für D6.1.1 g) (3100)

S6.1.3(3104)

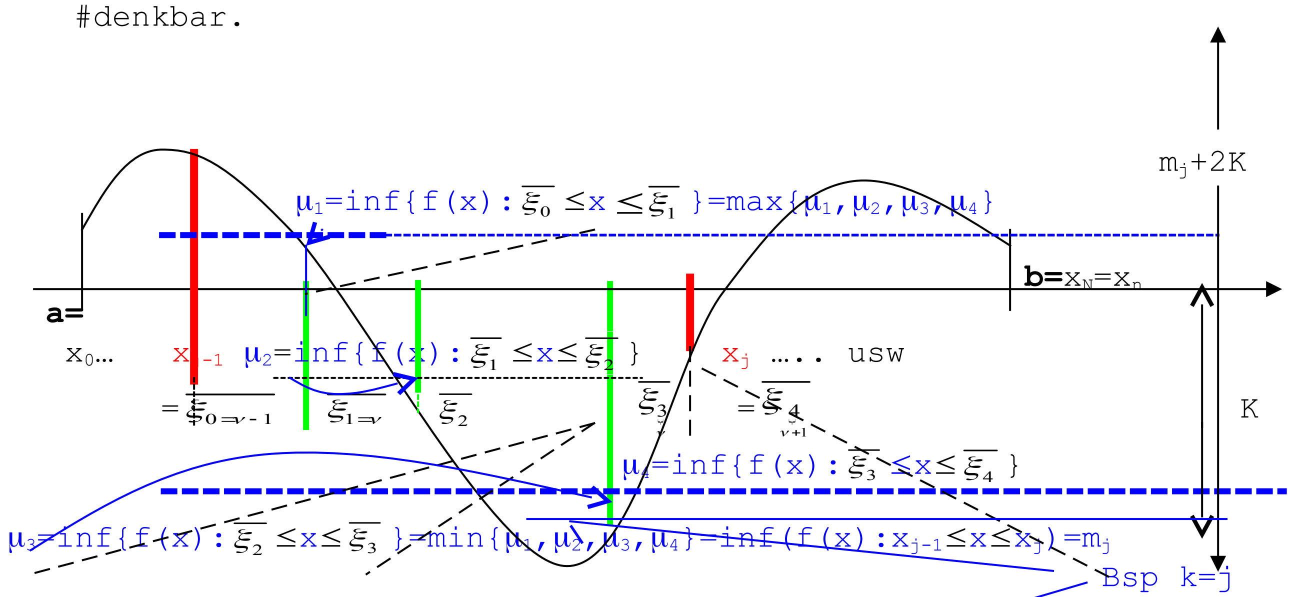
a) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $|f(x)|\le K\ \forall\ x\in[a,b]$ und sei
$\overline{Z}$ eine Zerlegung von [a,b] mit N Teilintervallen. Dann gilt für jede Zerlegung $Z=\{x_0,...,x_n\}$:

$\underline{S}(Z)\le\underline{S}(Z+\overline{Z})\le\underline{S}(Z)+2NK|Z|$, $\overline{S}(Z)\ge\overline{S}(Z+\overline{Z})\ge\overline{S}(Z)-2NK|Z|$

//**D6.1.1 a)**(3100) $|Z|=\max\{x_k-x_{k-1}:1\le k\le N\}$

Bew:#Bsp/Skizze

#Zur besseren Darstellung wurde $x_{j-1}…x_j$ breit gewählt, trotzdem
#sind natürlich noch beliebig zahlreiche j's mit zugehörigen m_j
#denkbar.



Untersummen:

- $Z+\overline{Z}=Z$ (also falls alle Teilpunkte von $\overline{Z}$ auch zu Z gehören), ist die Beh trivial erfüllt. Im andern Fall
- $Z+\overline{Z}\ne Z$. Betrachte ein j, $1\le j\le n$, für welches Teilpunkte von $\overline{Z}$ im Intervall (x_{j-1},x_j) liegen und bezeichne diese mit $\xi_1<...<\xi_\nu$. Seien m_k: ($m_k=\inf\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}$) wie in D6.1.1 f) und $\xi_0=x_{j-1}$, $\xi_{\rho+1}=x_j$ gesetzt, $\mu_\rho=\inf\{f(x):\xi_{\rho-1}\le x\le\xi_\rho\}$ für $1\le\rho\le\nu+1$ ⇒ $m_j=\min\{\mu_1,…,\mu_{\nu+1}\}\le\max\{\mu_1,…,\mu_{\nu+1}\}\le m_j+2K$ und deshalb folgt für jedes solches j

$m_j(x_j-x_{j-1})\le\sum_{\rho=1}^{\nu+1}\mu_\rho(\xi_\rho-\xi_{\rho-1})\le$

#$\sum_{\rho=1}^{\nu+1}\max\{\mu_1,…,\mu_\rho\}(\xi_\rho-\xi_{\rho-1})=$

#$(\max\{\mu_1,…,\mu_{\nu+1}\})\sum_{\rho=1}^{\nu+1}(\xi_\rho-\xi_{\rho-1})=(\max\{\mu_1,…,\mu_{\nu+1}\})(x_j-x_{j-1})\le$

#$m_j(x_j-x_{j-1})+2K(x_j-x_{j-1})$

$\le m_j(x_j-x_{j-1})+2K|Z|$, ($|Z|=\max\{x_k-x_{k-1}):1\le k\le N\}$)

#$\underline{S}(Z)=\sum_{j=1}^{N}m_j(x_j-x_{j-1})\le\sum_{j=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{\nu+1}\mu_{j_\rho}(\xi_{j_\rho}-\xi_{j_{\rho-1}})=\underline{S}(Z+\overline{Z})\le\sum_{j=1}^{N}(m_j(x_j-x_{j-1})+2K|Z|)=$

$\underline{S}(Z)+2NK|Z|$

Andere Formulierung:

Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $|f(x)|\le K\ \forall\ x\in[a,b]$, $Z=\{x_0,\dots,x_p\}$, $\overline{Z}=\{y_0,\dots,y_q\}$

Aussage: $\underline{S}(Z)\le\underline{S}(Z+\overline{Z})\le\underline{S}(Z)+2(q-1)K|Z|$, $\overline{S}(Z)\ge\overline{S}(Z+\overline{Z})\ge\overline{S}(Z)-2(q-1)K|Z|$

Bem: Bei Verfeinerungen nehmen Untersummen zu, Obersummen ab.

*//**D6.1.1 f**)(3102) Z, Z_1, Z_2 Zerlegungen von I*

//● ● Z enthält alle Zwischenpunkte von Z_1 und Z_2://

// Z heißt Überlagerung von Z_1 und Z_2, Schreibweise $Z=Z_1+Z_2$//

Bew: Sei $\overline{Z}_1=\{y_0=a,y_1,y_2=b\}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $k_0\in\{1,...,n\}$ mit $x_{k_0-1}\le y_1\le x_{k_0}$

$$m_{k'}=\inf\{f(x):x_{k_0-1}\le x\le y_1\}\ (\ge m_{k_0}=\inf\{f(x):x_{k_0-1}\le x\le x_{k_0}\})$$

$$m_{k''}=\inf\{f(x):y_1\le x\le x_{k_0}\}\ (\ge m_{k_0}=\inf\{f(x):x_{k_0-1}\le x\le x_{k_0}\}))\Rightarrow$$

$$m_{k_0}(x_{k_0}-x_{k_0-1})=m_{k_0}(y_1-x_{k_0-1})+m_{k_0}(x_{k_0}-y_1)\le m_{k'}(y_1-x_{k_0-1})+m_{k''}(x_{k_0}-y_1)\ \Rightarrow$$

$$\underline{S}(f,Z)=\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1,\,k\ne k_0}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})+m_{k_0}(x_{k_0}-x_{k_0-1})$$

$$\le\sum_{k=1,\,k\ne k_0}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})+m_{k'}(y_1-x_{k_0-1})+m_{k''}(x_{k_0}-y_1)=\underline{S}(Z+\overline{Z}_1,f)$$

$$\le\underline{S}(f,Z)-m_{k_0}(x_{k_0}-x_{k_0-1})+m_{k'}(y_1-x_{k_0-1})+m_{k''}(x_{k_0}-y_1)$$

$$=\underline{S}(f,Z)+m_{k_0}(+x_{k_0-1}+y_1-y_1-x_{k_0})+m_{k'}(+y_1-x_{k_0-1})+m_{k''}(x_{k_0}-y_1)$$

$$=\underline{S}(f,Z)+m_{k_0}(x_{k_0-1}-y_1)+m_{k_0}(y_1-x_{k_0})-m_{k'}(+x_{k_0-1}-y_1)+m_{k''}(+x_{k_0}-y_1)$$

$$=\underline{S}(f,Z)+m_{k_0}(+x_{k_0-1}-y_1)+m_{k_0}(y_1-x_{k_0})-m_{k'}(x_{k_0-1}-y_1)-m_{k''}(+y_1-x_{k_0})$$

$$=\underline{S}(f,Z)+(m_{k'}-m_{k_0})(+y_1-x_{k_0-1})+(m_{k''}-m_{k_0})(x_{k_0}-y_1)$$

$\le\underline{S}(f,Z)+K|Z|$, da $(x_{k_0-1}-y_1)\,\&\,(y_1-x_{k_0})<\max\{x_k-x_{k-1}:1\le k\le n\}=|Z|$ und

$(\underbrace{m_{k'}-m_{k_0}}_{\ge0})\,\&\,(\underbrace{m_{k''}-m_{k_0}}_{\ge0})\le K$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Induktin bis } q}\le\underline{S}(f,Z)+K(q-1)|Z|$$

Die Ungleichung für Obersummen beweist man analog oder man führt sie durch Übergang zu $-f$ auf die für Untersummen zurück mit

$$\sum_{k=1}^{n}\inf\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}-\sup\{-f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}(x_k-x_{k-1})$$

$\Rightarrow$ $\underline{S}(f,Z)=-\overline{S}(-f,Z)$

b) Vor: Seien $I=[a,b]$, $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f beschränkt: $|f(x)|\le K \ \forall\ x\in[a,b]$,
$Z: a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_n=b$ und $Z': a=\eta_0<\eta_1<\ldots,\eta_p=b$ 2 Zerlegungen von I,

Aussage: $\overline{S}(Z',f)\le\overline{S}(Z,f)+(n-1)(M-m)|Z'|$, $M=\underbrace{\sup}_{x\in I} f(x)$, $m=\underbrace{\inf}_{x\in I} f(x)$

#Bew: ObdA $m=0$, sonst betrachte $g(x)=f(x)-m$, $x\in I$

$I_k=[\xi_{k-1},\xi_k]$ mit $k=1,\ldots,n$, $M_k:=\underbrace{\sup}_{x\in I_K} g(x)$, $\overline{S}(Z,g)=\sum\limits_{k=1}^{n} M_k|I_k|$

$I'_\ell=[\eta_{l-1}-\eta_l]$ mit $l=1,\ldots,p$, $M'_\ell:=\underbrace{\sup}_{x\in I'_\ell} g(x)$, $\overline{S}(Z',g)=\sum\limits_{\ell=1}^{p} M'_\ell|I'_\ell|$

I'_ℓ fest..1.Fall $I_k\supset I'_\ell \Rightarrow l\in A$, $A:=\{l\in\{1,\ldots,p\}\mid I'_\ell\subset I_k\ \forall\ k\in\{1,\ldots,n\}\}$

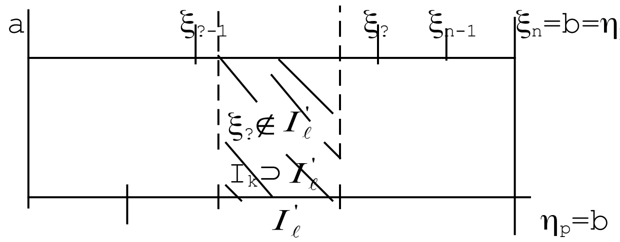
2.Fall $\xi_k\in I'_\ell \Rightarrow l\in B$, $B:=\{l\in\{1,\ldots,p\}\mid \xi_k\in I'_\ell\ \forall\ k\in\{1,\ldots,n-1\}\}$

$A\cup B=\{0,1,\ldots,p\}$ da

$\{l\in\{1,\ldots,p\}\mid I'_\ell\subset I_k\ \forall\ k\in\{1,\ldots,n\}$ oder $\xi_k\in I'_\ell)\ \forall\ k\in\{1,\ldots,n-1\}\}=$

$\{l\in\{1,\ldots,p\}\mid(\xi_k\notin I'_\ell$ oder $\xi_k\in I'_\ell)\ \forall\ k\in\{1,\ldots,n\}\}=$

$=\{0,1,\ldots,p\}$



$\xi_n=b=\eta_p \Rightarrow [\eta_{p-1}=\eta_p]=I'_{\ell=p}\subset I_k \Rightarrow p=l\in A$ oder
$I'_{\ell=p}\not\subset I_k \Rightarrow \xi_{n-1}>\eta_{p-1} \Rightarrow \xi_{n-1}\in I'_{\ell=p} \Rightarrow$
$p=l\in B$

Anzahl der Elemente in B, $|B|\le n-1 \Rightarrow \sum\limits_{\ell\in B}|I'_\ell|\le(n-1)|Z'|$

$\bigcup\limits_{\ell\in A} I'_\ell=\bigcup\limits_{I'_\ell\subset I_k} I'_\ell\subset I_k\ \forall\ k\in\{1,\ldots,n\} \Rightarrow \sum\limits_{\ell\in A}|I'_\ell|=\sum\limits_{I'_\ell\subset I_k}|I'_\ell|\le|I_k| \Rightarrow$

$\overline{S}(Z',g)=\sum\limits_{\ell=1}^{p} M'_\ell|I'_\ell|=\sum\limits_{\ell\in A} M'_\ell|I'_\ell|+\sum\limits_{\ell\in B} M'_\ell|I'_\ell|=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{I'_\ell\subset I_k} M'_\ell|I'_\ell|+\sum\limits_{\ell\in B} M'_\ell|I'_\ell|\le$

$\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\sum\limits_{I'_\ell\subset I_k}|I'_\ell|+M\sum\limits_{\ell\in B}|I'_\ell|\le$

$\sum\limits_{k=1}^{n} M_k|I_k|+M(n-1)|Z'|=\overline{S}(Z,f)+M(n-1)|Z'|$,

weil $M'_\ell\le M_k$ für $I'_\ell\subset I_k$ und $M'_\ell\le M\ \forall\ l\in\{1,\ldots,p\}$

$\overline{S}(Z,f)=\sum\limits_{k=1}^{n}(m|I_k|+(M_k-m)|I'_\ell|$

$\overline{S}(Z',f)=\sum\limits_{\ell=1}^{p}(m|I'_\ell|+(M'_\ell-m)|I'_\ell|=$

$\sum\limits_{\ell\in A}(m|I'_\ell|+(M'_\ell-m)|I'_\ell|)+\sum\limits_{\ell\in B}(m|I'_\ell|+(M'_\ell-m)|I'_\ell|)=$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{I'_\ell\subset I_k}(m|I'_\ell|+(M'_\ell-m)|I'_\ell|)+\sum\limits_{\ell\in B}(m|I'_\ell|+(M'_\ell-m)|I'_\ell|)=$

$\sum\limits_{k=1}^{n} m|I'_\ell|+\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{I'_\ell\subset I_k}(M'_\ell-m)|I'_\ell|+\sum\limits_{\ell\in B}(M'_\ell-m)|I'_\ell|\le$

$\sum\limits_{k=1}^{n} m|I_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m)|I'_\ell|+\sum\limits_{\ell\in B}(M-m)|Z'|\le\overline{S}(Z,f)+(M-m)(n-1)Z'$

S6.1.4 (3107)

Vor: $f(x):I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $a<b$, $|f(x)|\leq K$

Aussage: $\forall$ Folgen von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in N}$ mit $|Z|_{k\in N} \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{S}(Z_k,f)=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty} \overline{S}(Z_k,f)$$

//**D6.1.1 g**)(3101)Vor: $f(x):I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $|f(x)|\leq K\ \forall\ x\in I$//

// $I^*f(x)=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z)\}$//

//**S6.1.3 b)**(3106)

//b)Seien $I=[a,b]$, $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f beschränkt: $|f(x)|\leq K\ \forall\ x\in[a,b]$,//

// $Z: a=\xi_0<\xi_1<...<\xi_n=b$ und $Z': a=\eta_0<\eta_1<...,\eta_p=b$ 2 Zerlegungen von I, //

// $M=\underbrace{\sup}_{x\in I} f(x)$, $m=\underbrace{\inf}_{x\in I} f(x)$ dann gilt $\overline{S}(Z',f)\leq\overline{S}(Z,f)+(n-1)(M-m)|Z'|$//

*//**D2.4.2''**(1508) 1.)Es gilt stets* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\leq\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ //

*//**S2.4.3** Eine beschränkte Folge* $(a_n)\subset R$ $|a|\leq k\ \forall\ n\in N$ *ist genau dann*

// konvergent, wenn $|H|=1$, *d.h.* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n\in R \Leftrightarrow |H|=1 \Leftrightarrow$

// $\lim_{n\to\infty} a_n=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n=\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, $a_n\in R$

Bew:Zu beweisen $I^*=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z,f)\}=\lim_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)$,

Sei Z_k beliebige Zerlegung.

D6.1.1 g) $I^*=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z,f)\}$ $\Rightarrow$ Aus der Existenz einer Teilfolge wegen

$I^*=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z,f)\}$ wie folgt, Schluß, dass alle Teilfolgen konvergieren

$\exists$ Teilfolge $(Z'_\ell)_{l\in N}$ aller Folgen $\underbrace{\overline{S}(Z)}_{alle\ Z}$: $\lim_{\ell\to\infty}(Z'_\ell)_{l\in N}=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z,f)\}=I^*$

$\underset{S6.1.3\ b)}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$$\overline{S}(Z_k,f)\underset{S6.1.3\ b)}{\underbrace{\leq}}\overline{S}(Z'_\ell,f)+(n'-1)(M-m)|Z_k|\underset{k\to\infty\Rightarrow|Z_K|\to 0}{\underbrace{\Rightarrow}}\overbrace{\underbrace{\overline{\lim}\,\overline{S}(Z_k,f)}_{k\to\infty}}^{Häufungswert}\leq\overline{S}(Z'_\ell,f)$$

$$\underset{\ell\to\infty}{\underbrace{\Rightarrow}}\ \underbrace{\overline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)\leq\lim_{\ell\to\infty}\overline{S}(Z'_\ell,f)=I^*\Rightarrow\underbrace{\overline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)\leq I^*$$

Es gilt aber auch $\underbrace{\overline{S}(Z_k,f)}_{nicht\ alle\ Z}\geq\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z,f)\}=I^*\ \forall\ k\in \mathbb{N}\Rightarrow\underbrace{\underline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)\geq I^*\Rightarrow$

$$\underbrace{\underline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)\geq I^*\geq\underbrace{\overline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)\Rightarrow\underbrace{\underline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)\geq\underbrace{\overline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)$$

$$\underset{D2.4.2''Bem1.)}{\underbrace{\Rightarrow}}\underbrace{\underline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)=\underbrace{\overline{\lim}}_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)=I^*\underset{S2.4.3}{\underbrace{=}}\lim_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)$$

Analog für Untersummen

Andere Formulierung Bew:

//**D2.1.1**(1200 Bem: 7.)Sandwhichsatz//

// Seien (x_n^+),(x_n^-)und (y_n) Folgen in R. Dann gilt //

// $\lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = x$ und $x_n^- \le y_n \le x_n^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = x$.//

//**S2.2.1**(1301)//

//Vor:Sei z_n konvergent mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z$//

//Beh:Jede (.)Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n), (.) Umordnung und (..)triviale

//**D6.1.1 g)** (3101) Vor: $f(x):I=[a,b]\rightarrow R$, $|f(x)|\le K$//

// $I_*f(x)=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{\underline{S}(Z)\}$, $I^*f(x)=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{\overline{S}(Z)\}$

// wobei das Supremum bzw Infimum jeweils über <u>alle</u> Zerlegungen von
// [a,b] gebildet wird.
// Die so definierten Werte I_*,I^* heißen das Unter- bzw Oberintegral
// von f über [a,b].

//**S6.1.2**(3103)Sei f auf [a,b] beschränkt. Für beliebige Zerlegungen Z_j //
// von [a,b] gilt dann stets $\underline{S}(Z_1)\le\overline{S}(Z_2)$ //

//**S2.2.4**(1307) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente
// Teilfolge//

Bew:Sei: $(Z_k)_{k\in N}$ beliebige Zerlegungsnullfolge (ZNF),

Z beliebige Zerlegung von [a,b] mit p Zwischenpunkten $\underset{S6.1.1}{\Rightarrow}$

(*) $\underline{S}(Z_k)\le\underline{S}(Z+Z_k)\le\underline{S}(Z_k)+2pK\underbrace{|Z_K|}_{\underset{K\to\infty}{\rightarrow}0}\ \forall\ k\in N,$

Annahme $\underline{S}(Z_k,f)\underset{K\to\infty}{\rightarrow}\alpha\in R\underset{k\to\infty}{\Rightarrow}\alpha\le\underline{S}(Z+Z_k)\le\alpha\ \underbrace{\overset{D2.1.1\,Bem\,7.)}{\Rightarrow}}_{(*)}\ \underline{S}(Z+Z_k))\ \underbrace{\overset{D2.1.1\,Bem\,7.)}{\rightarrow}}_{k\to\infty}\ \alpha$

$\underline{S}(Z,f)\le\underline{S}(Z+Z_k)\le I_*=\sup_{\text{alle Zerlegungen}}\{\underline{S}(Z)\},\ \forall\ k\in N\ \Rightarrow$

$\underline{S}(Z,f)\le\underset{\text{nicht alle Zerlegungen}}{\overset{\text{nur } Z_K}{\alpha}}\le\sup_{\text{alle Zerlegungen}}\{\underline{S}(Z)\}=I_*(f)\ \forall\ Z$ von [a,b] $\Rightarrow$

$\underline{S}(Z,f)\le\alpha\le I_*(f)\ \Rightarrow\sup_{\text{alle Zerlegungen}}\underline{S}(Z,f)=I_*(f)\le\alpha\le I_*(f)\ \Rightarrow\ \alpha=I_*(f)$

$\underline{S}(f,Z_k)\underset{k\to\infty}{\rightarrow}\alpha=I_*(f)$ für beliebige ZNF

Folge $\underline{S}((Z_k))_{k\in N}$ $\underbrace{\text{beschränkt}}_{S6.1.2}$ $\underset{S2.2.4}{\Rightarrow}\exists$ konvergente Teilfolge $\underline{S}((Z^{k_n}))_{k,n\in N}$

$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\underline{S}(f,(Z_{k_n}))_{k,n\in N}=I_*(f)\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty}\underline{S}(f,(Z_k))_{k\in N}=I_*(f)$

Andere Formulierung Bew:

//**D6.1.1 g)** (3102//

// Vor: $f(x): I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $|f(x)|\le K\ \forall\ x\in I$/

// $I_*f(x)=\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{\sup}_{alle\ Z}\{\underline{S}(Z)\}$, $I^*f(x)=\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z)\}$ //

//**S6.1.3**(3104) Sei $|f(x)|\le K\ \forall\ x\in[a,b]$ und sei $\overline{Z}$ eine Zerlegung von//
// [a,b] mit N Teilintervallen. Dann gilt für jede Zerlegung //
//$Z=\{x_0,\dots,x_n\}$: $\underline{S}(Z)\le\underline{S}(Z+\overline{Z})\le\underline{S}(Z)+2NK|Z|$, $\overline{S}(Z)\ge\overline{S}(Z+\overline{Z})\ge\overline{S}(Z)-2NK|Z|$//

Bew: $I_*=\int_a^b f(x)\,dx \underbrace{=}_{D6.1.2} \underbrace{\sup}_{alle\ Z}\underline{S}(Z)\} \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists$ Zerlegung $Z: I_*-\varepsilon\le\underline{S}(Z)\le I_*=\underbrace{\sup}_{alle\ Z}\underline{S}(Z)\}$

Sei N=Zahl der Teilintervalle von Z

S6.1.3 $\Rightarrow$ $\underline{S}(Z_k)\le\underline{S}(Z+Z_k)\le\underline{S}(Z_k)+2N\underbrace{K}_{|f|\le K}|Z_k|\ \ \forall\ k\ge1$

& $\overline{S}(Z_k)\ge\overline{S}(Z+Z_k)\ge\overline{S}(Z_k)-2N\underbrace{K}_{|f|\le K}|Z_k|\ \ \forall\ k\ge1 \Rightarrow$

$I_*-\varepsilon-2NK\underbrace{|Z_k|}_{\xrightarrow[K\to\infty]{}0}\le\underline{S}(Z)-2NK\underbrace{|Z_K|}_{\xrightarrow[K\to\infty]{}0}\le\underbrace{\sup}_{alle\ Z}\{\underline{S}(Z)\}=I_*\Rightarrow$

$I_*-\varepsilon-2NK\underbrace{|Z_k|}_{\xrightarrow[K\to\infty]{}0}\le\underline{S}(Z_k)\le I_*=\underbrace{\sup}_{alle\ Z}\{\underline{S}(Z)\}\ \ \forall\ k\ge1.$

$I_*-\underbrace{\varepsilon}_{\to0}-2NK\underbrace{|Z_k|}_{\xrightarrow[K\to\infty]{}0}\le\underline{S}(Z_k)\le I_*\underbrace{\to}_{K\to\infty}I_*\le\underline{S}(Z_k)\le I_*\Rightarrow$

$\underline{S}(Z_k)\underbrace{\to}_{K\to\infty}I_*\Rightarrow I_*f(x)=\lim_{K\to\infty}\underline{S}(Z_k)$,

Für die Obersummen schließt man genau so.

Bsp: //**A1.5.7 f)**(713**)** $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ //

$f:[0,b]\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3.$

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x_0=0,\ x_1=\frac{b}{n},\dots\frac{kb}{n},\dots,\frac{nb}{n}=x_n=b$

$\underline{S}(Z_n,f)=\sum_{k=1}^{n}\inf(f[x_{k-1}-x_k])\frac{b}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}b\right)^3\frac{b}{n}=\frac{b^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3=\frac{b^4}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}k^3\underbrace{=}_{A1.5.7\,f)}$

$\frac{b^4}{n^4}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{b^4}{4}\ \Rightarrow\ I_*(f)=\frac{b^4}{4}$

$\overline{S}(f,Z_n)=\sum_{k=1}^{n}\sup(f[x_{k-1}-x_k])\frac{b}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}b\right)^3\frac{b}{n}=\frac{b^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3\underbrace{=}_{A1.5.7\,f)}$

$\frac{b^4}{n^4}\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{b^4}{4}\ \Rightarrow\ I^*(f)=\frac{b^4}{4}\Rightarrow$ f R integrierbar: $\int_0^b x^3dx=\frac{b^4}{4}$

S6.1.5(3110) Vor: $I=[a,b]$, $a<b$, $f:I\to\mathbb{R}$, $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+$, 2 Zerlegungen $\tilde{Z}$, $\overline{Z}$
Aussage:

$$\underbrace{\underline{S}(\tilde{Z},f)}_{nicht\ alle\ Z} \underbrace{\le}_{Def\ \sup} I_*f(x)=\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{\sup}_{alle\ Z}\{\underline{S}(Z)\}\le$$

$$I^*f(x)=\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z,f)\} \underbrace{\le}_{Def\ \inf} \underbrace{\overline{S}(\overline{Z},f)}_{nicht\ alle\ Z}$$

//**D6.1.1 e)**(3100)Bem: $m_k\le M_k \Rightarrow \underline{S}(Z,f)\le\overline{S}(Z,f)$//

Bew: Nur $I_*f(x)=\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{\sup}_{alle\ Z}\{\underline{S}(Z)\}\le I^*f(x)=\int_a^b f(x)\,dx=\underbrace{\inf}_{alle\ Z}\{\overline{S}(Z)\}$,

zu beweisen (kürzer $I_*f(x)\le I^*f(x)$

Sei $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ZNF...$|Z_k|\xrightarrow[K\to\infty]{}0 \underbrace{\Rightarrow}_{S6.1.4} I^*f(x)=\lim_{K\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)$, $I_*f(x)=\lim_{K\to\infty}\underline{S}(Z_k,f)$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D6.1.1\,Bem} \underline{S}(Z_k,f)\le\overline{S}(f,Z_k)$ $\forall$ $k\in\mathbb{N} \underbrace{\overset{alle\ Z}{\Rightarrow}}_{K\to\infty} I_*f(x)\le I^*(f(x)$

L6.1.1(3110)

//**D6.1.1 e)** $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $x\in[a,b]$:

// $m_k:=\inf\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k,\ k\in\{1,2,...,n\}$, $\underline{S}(Z,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

// Bem: $m_k\le\xi_k\le M_k \Rightarrow \underline{S}(Z,f)\le S(Z,\xi,f)\le\overline{S}(Z,f)$,
Vor: $Z=\{x_0,...,x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$, $|f(x)|\le K$,
Zwischenstellen $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $\xi=\{\xi_1,...,\xi_n\}$, $1\le k\le n$
$\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$, $\eta=\{\eta_1,..,\eta_n\}$, $1\le k\le n$,

$\sigma(f,Z_n,\xi_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k-1},x_k)$, $\sigma(f,Z_n,\eta_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_{k-1},x_k)$

Aussage: $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ ξ & η : $\underline{S}(Z,f)\le\sigma(Z_n,\xi_n,f)\le\underline{S}(Z,f)+\varepsilon$ &
$\overline{S}(Z,f)\ge\sigma(Z_n,\eta_n,f)\ge\overline{S}(Z,f)-\varepsilon$

\# $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ passende ξ bzw η, und damit passende n.

*//**S1.3.1**(501) Vor.:Sei K angeordnet und $T\subset K$, $T\ne\emptyset$, $s\in K$//*
//Beh:1.) $\underline{s}=\inf T:\Leftrightarrow$ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //
// β) $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //
// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$: $t\ge\underline{s}$ und $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$//

Bew: $\forall$ $m_k=\inf\{f(x):x_{k-1}\le x\le x_k\}$ $\exists$ $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$: $m_k\le f(\xi_k)\le m_k+\frac{\varepsilon}{b-a}$ $\Rightarrow$

$$\underline{S}(Z,f)=\sum_{k=1}^{p} m_k(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=S(f,Z,\xi)$$

$$\le\sum_{k=1}^{p}\left(m_k+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_k-x_{k-1})=$$

$$\sum_{k=1}^{p} m_k(x_k-x_{k-1})+\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{p}(x_k-x_{k-1})=\underline{S}(f,Z)+\varepsilon \Rightarrow$$

$\underline{S}(f,Z)\le\sigma(f,Z,\xi)\le\underline{S}(f,Z)+\varepsilon$, nach gleichem Muster
$\overline{S}(f,Z)\ge S(f,Z,\xi))\ge\overline{S}(f,Z)-\varepsilon$

Andere Formulierung:
Sei $I=[a,b]$, $a<b$, $f:I\to\mathbb{R}$, $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $x\in[a,b]$ (beschränkt)//

$(\forall\ \varepsilon>0\ \&\ \forall\ Z)\ \exists\ (\xi_k)_{k\in N}\ \&\ (\eta_k)_{k\in N}$://
$\underline{S}(f,Z)\le\sigma(f,Z,\xi_n)\le\underline{S}(f,Z)+\varepsilon$ und $\overline{S}(f,Z)\ge\sigma(f,Z,\eta_n)\ge\overline{S}(f,Z)-\varepsilon$//

//**D6.1.1 f)** (3100) $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $f: I\to\mathbb{R}$, $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+$ $\forall\ x\in[a,b]$://

// $m_k:=\inf(f(I_k))=\underbrace{\inf}_{x\in I_K} f(x)=\inf\{f(x):x\in I_k\}$, $k\in\{1,2,...,n\}$

// Untersumme $\underline{S}(f,Z)=\sum_{k=1}^{n} m_k|I_k|=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

//Bem: $m_k\le M_k\Rightarrow\ \underline{S}(f,Z)\le\overline{S}(f,Z)$,

*//**S1.3.1**(501) Vor.:Sei K angeordnet und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*
//Beh:1.) $\underline{s}=\inf T:\Leftrightarrow$ $\alpha)$ $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //
// $\beta)$ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //
// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T$: $t\ge\underline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$//

Bew: $Z=\{x_0,...x_n\}$ Zerlegung $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1}$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \xi_k\in[x_{k-1},x_k]:\ 0\le f(\xi_k)-\inf f([x_{k-1},x_k])\le\frac{\varepsilon}{b-a}\ \underbrace{\Rightarrow}_{x_k>x_{k-1}}$

$0\le(f(\xi_k)-\inf f([x_{k-1},x_k]))(x_k-x_{k-1})\le\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})\ \Rightarrow$

$0\le\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)-\inf f([x_{k-1},x_k]))(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_k-x_{k-1})\ \underbrace{\Rightarrow}_{\sum_{K=1}^{n}(x_K-x_{K-1})=b-a}$

$0\le\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{n}\inf f([x_{k-1},x_k]))(x_k-x_{k-1})\le\varepsilon\ \Rightarrow$

$\underline{S}(f,Z)\#=\sum_{k=1}^{n}\inf(f(I_k))(x_k-x_{k-1})\#\le\sigma(f,Z,\xi_n)=\#\sum_{k=1}^{n}\underbrace{f(\xi_n)}_{\ge\inf(f(I_K)}f(\xi_n)(x_k-x_{k-1})\#$

$\le\underline{S}(f,Z)+\varepsilon$

analog $\overline{S}(f,Z)\ge\sigma(f,Z,\xi_n)\ge\overline{S}(f,Z)-\varepsilon$

L6.1.2(3112)

Vor: f: $\underbrace{I}_{=[a,b]} \to \mathbb{R}$ integrierbar, (Z_n) eine ZNF d.h. $|Z_n| \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$,

Folge von Zwischenstellen $\xi^{(n)}=\{\xi_1^{(n)},\ldots,\ \xi_p^{(n)}\}$, $|f(x)|\le K$

$$\sigma(Z_n,\xi^{(n)},f)=\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k^{(n)})(x_{k-1}-x_k)$$

Aussage: $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(Z_n,\xi^{(n)},f)=\int_a^b f(x)dx$ #noch keine Aussage für alle Nullfolgen#

*//**D6.1.1 e)** (3100)* $m_k=\underbrace{\inf}_{x\in I_K} f(x)$, $\underline{S}(f,Z)=\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k-x_{k-1})$ //

// $M_k:=\sup(f(I_k))=\underbrace{\sup}_{x\in I_K} f(x)=\sup\{f(x):x\in I_k\}$, *jeweils* $k\in\{1,2,\ldots,n\}$//

// **h*)** (3100)Falls I*(f)=I$_*$(f), so heißt f über [a,b]
// (Riemann)integrierbar.

// Der gemeinsame Wert wird dann mit $I^*(f)=I_*(f)=\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet

*//**S6.1.4** (3107)*
//Vor: $f(x):I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $a<b$, $|f(x)|\le K$

//Aussage: $\forall$ *Folgen von Zerlegungen* $(Z_k)_{k\in N}$ *mit* $|Z|_{k\in N} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ *gilt:*

// $$\lim_{k\to\infty}\underline{S}(Z_k,f)=\underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)$$

*//**D2.1.1**(1200) Bem: 7.)Vor:* (x_n^+), (x_n^-), (y_n) *Folgen in* $\mathbb{R}$. //

// *Aussage:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^-=x$ *und* $x_n^-\le y_n\le x_n^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n=x$.

Bew: $\underline{S}(Z_n,f)\ \underbrace{\overset{D6.1.1e)}{\le}}_{m_K\le f(\xi_K^{(n)})}\ \sigma(Z_n,\xi^{(n)},f)\ \underbrace{\overset{D6.1.1e)}{\le}}_{M_K\ge f(\xi_K^{(n)})}\ \overline{S}(Z_n,f)$ &

$$\int_a^b f(x)dx\ \underbrace{\overset{D6.1.1h)}{=}}_{S6.1.4}\ \lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,Z_n)\ \underbrace{\overset{D6.1.1h)}{=}}_{S6.1.4}\ \lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,Z_n)\ \underbrace{=}_{D2.1.1\,Bem\,7.)}\ \lim_{n\to\infty}\sigma(f,Z_n,\xi^{(n)})$$

S6.1.6(3113)

a) Wenn für jede ZNF und jede Wahl von Zwischenpunktvektoren die zugehörige Folge von Riemannsummen konvergiert, dann ist der Grenzwert immer der gleiche, also unabhängig von der Wahl der Zerlegungsfolge oder der Zwischenpunktvektoren.

*//**S2.2.1**(1301)//*

//Vor:Sei z_n konvergent mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z$//

//Beh:Jede (.)Teilfolge (z_{ν_n}) von (z_n), (.) Umordnung und (..)triviale

// Abänderung ist konvergent mit $z_{\nu_n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z$//

Bew: Seien (Z_n) und $(\tilde{Z}_n)$ 2 zulässige Zerlegungsfolgen und seien (ξ_n) bzw $(\tilde{\xi}_n)$ zugehörige Folgen von Zwischenpunktvektoren.
Durch Mischen der Folgen bilden wir 2 weitere Folgen

$(\hat{Z}_n)$ und $(\hat{\xi}_n)$ mit $\hat{Z}_n = \begin{cases} Z_k\ (n=2k) \\ \tilde{Z}_k\ (n=2k+1) \end{cases}$, $\hat{\xi}_n = \begin{cases} \xi_k (n=2k) \\ \tilde{\xi}_k (n=2k+1) \end{cases}$.

Dabei entsteht wieder eine zulässige Zerlegungsfolge (da $\lim\limits_{n\to\infty} |\hat{Z}_n|=0$) mit zugehörigen Zwischenpunktvektoren, welche beide Ausgangsfolgen als Teilfolgen besitzt. Da die zu $(\hat{Z}_n)$ und $(\hat{\xi}_n)$ gehörigen Riemannsummen konvergieren müssen, müssen also die beiden Teilfolgen den gleichen Grenzwert besitzen, was zu beweisen war.

#Andere Formulierung Bew, eigener Versuch:

Vor: • Z_{j_n} ist eine ZNF: $\lim\limits_{n\to\infty} |Z_{j_n}|=0 \quad \forall j$

•• $\lim\limits_{n\to\infty} S_j(Z_{j_n}, \xi_j, f)=c_j \quad \forall j, \xi_j$.

Beh: $c_j=c \quad \forall j$

#Bew: Seien (Z_{t_n}) & (Z_{u_n}) beliebige Zerlegungen:

$\lim\limits_{n\to\infty} |(Z_{t_n})|=c_t$ $\lim\limits_{n\to\infty} |(Z_{t_n})|=0$ & $\lim\limits_{n\to\infty} |(Z_{u_n})|=0$

$(Z_k)_{k\in N}: Z_{t_1}, Z_{u_1}, Z_{t_2}, Z_{u_2}, \ldots Z_{t_K}, Z_{u_K} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |(Z_k)|=0 \underset{Vor}{\rightrightarrows} \lim\limits_{k\to\infty} S_k(Z_k, \xi_k, f)=c_k$

$\underset{S2.2.1}{\rightrightarrows} \lim\limits_{n\to\infty} S_t(Z_{t_n}, \xi_t, f)=c_t=c_k \ \lim\limits_{n\to\infty} S_u(Z_{u_n}, \xi_u, f)=c_u=c_k=c \quad \forall u \Rightarrow$ Beh

//**D6.1.1 h*)** I*(f)=I*(f)..f über [a,b] R-integrierbar..

// $I^*(f)=I_*(f)=\int_a^b f(x)dx$

b)Vor: • I=[a,b], a<b, f: I→ R, |f(x)|≤K ∀ x∈I

•• Eine (die n-te) von allen ZNF: $(Z_k^{(n)})_{k\in N}$ mit $|Z_k^{(n)}| \underbrace{\rightrightarrows}_{k\to\infty} 0$ ∀ n

••• $\xi_k^{(n)}=\{\xi_1^{(n)},\dots\xi_{p_k^{(n)}}^{(n)}\}$ Zwischenpunkte einer Zerlegung $Z_k^{(n)}$ nach ••,

d.h. $\xi_\ell^{(n)}\in I_\ell^{(n)}$ ∀ l =1,… $p_k^{(n)}$, d.h der l– te Zwischenpunkt von p_k

Zwischenpunkten einer Zerlegung $Z_k^{(n)}$

•••• $\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)=\sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{l-1},x_l)$

Aussage: f über I Riemann-integrierbar ⇔

⊗ $\sigma(Z_k^{(n)}),\xi_k^{(n)},f)=\sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)}-x_\ell^{(n)})$ konvergiert ∀ n

und es gilt $\lim_{k\to\infty}\sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)}-x_\ell^{(n)})=\int_a^b f(x)dx$ (wenn $|Z_k^{(n)}| \underbrace{\rightrightarrows}_{k\to\infty} 0$ ∀ n)

Überlegungen

$\sigma(\underbrace{Z_{k\to\infty}^{(1)}}_{|Z_k^{(1)}|\xrightarrow[k\to\infty]{}0}),\xi_{k\to\infty}^{(1)},f)=\sum_{\ell=1}^{p_{k\to\infty}^{(1)}} f(\xi_\ell^{(1)})(x_{\ell-1}^{(1)}-x_\ell^{(1)})=$

$\sigma(\underbrace{Z_{k\to\infty}^{(2)}}_{|Z_k^{(2)}|\xrightarrow[k\to\infty]{}0}),\xi_{k\to\infty}^{(2)},f)=\sum_{\ell=1}^{p_{k\to\infty}^{(2)}} f(\xi_\ell^{(2)})(x_{\ell-1}^{(1)}-x_\ell^{(2)})=\dots\dots\sigma_{k\to\infty}^{(alle\,n\in N)}$ (∀ n∈N)

$\lim_{k\to\infty}\sum_{\ell=1}^{p_{k\to\infty}^{(1)}} f(\xi_\ell^{(1)})(x_{\ell-1}^{(1)}-x_\ell^{(1)})=\lim_{k\to\infty}\sum_{\ell=1}^{p_{k\to\infty}^{(2)}} f(\xi_\ell^{(2)})(x_{\ell-1}^{(1)}-x_\ell^{(2)})=\dots\sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)}-x_\ell^{(n)})$

Somit ist der konvergente Wert für alle Strukturen der
Zerlegungs(Null)folgen gleich. Zur Riemannintegrierbarkeit gehört
also, dass bei Wahl verschiedener Strukturen keine unterschiedlichen
Integralwerte entstehen dürfen.

*//**D6.1.1 h*)** (6100) Falls I*(f)=I*(f), so heißt f über [a,b] integrierbar*

*//**D6.1.1 h*)** (6100) Falls I*(f)=I*(f), so heißt f über [a,b] integrierbar*

//**S6.1.4** (3107) Vor: f(x):I=[a,b]→ R , a<b,|f(x)|≤K//

//Aussage: ∀ Folgen von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in N}$ mit $|Z|_{k\in N} \underbrace{\rightrightarrows}_{n\to\infty} 0$ gilt://

// $\lim_{k\to\infty}\underline{S}(Z_k,f)=\underline{\int_a^b} f(x)dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k,f)$//

//# In Beweiskette wird D6.1.1 h** nicht benutzt#//

//***D2.1.1**(1200) Bem: 7.) Vor: (x_n^+),(x_n^-), (y_n) Folgen in R. //*

// *Aussage:* $\lim_{n\to\infty} x_n^+=\lim_{n\to\infty} x_n^-=x$ *und* $x_n^-\le y_n\le x_n^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n=x$. //

//**D6.1.1 c)**(3101) I:=[a,b], f:I→R auf I beschränkt, Z={x_0,...,x_N)

eine // //Zerlegung von I, I_k:=[x_{k-1},x_k] k=1,..,N, $m_k=\underbrace{\inf}_{x\in I_k} f(x)$, $M_k=\underbrace{\sup}_{x\in I_k} f(x)$//

Bew: „⇒“ f über I Riemann-integrierbar,

$m_\ell^{(n)}\le f(\xi_\ell^{(n)})\le M_\ell^{(n)}$ mit $m_\ell^{(n)}=\underbrace{\inf}_{x\in I_\ell^{(n)}}(f(x)$, $M_\ell^{(k)}=\underbrace{\sup}_{x\in I_\ell^{(n)}}(f(x)$ ⇒

$\underline{S}(Z_k^{(n)},f)\le\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)\le\overline{S}(Z_k^{(n)},f)$ ⇒

$\lim_{k\to\infty}\underline{S}(Z_k^{(n)},f)\le\lim_{k\to\infty}\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)\le\lim_{k\to\infty}\overline{S}(Z_k^{(n)}),f)\ \underbrace{\rightrightarrows}_{D6.1.1h^*,\ S6.1.4}$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\underline{S}\,(Z_k^{(n)}),\quad \int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\overline{S}\,(Z_k^{(n)}),\ \text{jeweils}\ \forall\ n$$

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)\ \underbrace{=}_{D2.1.1\,Bem\,7.)}\ \int_a^b f(x)\,dx\quad \underbrace{\forall}_{a)}\ n$$

„⇐" siehe nächste Seite

*//**L6.1.1**(3110)*
//Vor: $Z=\{x_0,...,x_p\}$ Zerlegung von $[a,b]$, beschränkt $|f(x)|\le K$,
// Zwischenstellen $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, $1\le k\le p$, $\xi:=\{\xi_1,...,\xi_p\}$
// $\eta_k\in[x_{k-1},x_k]$, $1\le k\le p$, $\eta:=\{\eta_1,..,\eta_p\}$,
// $\sigma(f,Z,\xi)=\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_{k-1},x_k)$, $\sigma(f,Z,\eta)=\sum_{k=1}^{p} f(\eta_k)(x_{k-1},x_k)$
//Aussage: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \xi\ \&\ \eta$: $\underline{S}(f,Z)\le\sigma(f,Z,\xi)\le\underline{S}(f,Z)+\varepsilon$ &
// $\overline{S}(f,Z)\ge\sigma(f,Z,\eta)\ge\overline{S}(f,Z)-\varepsilon$

//**S6.1.4** (3107)//
//Vor: $f(x):I=[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, $|f(x)|\le K$//
//Aussage: ∀ Folgen von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in N}$ mit $|Z|_{k\in N}\ \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\ 0$ gilt://

// $\lim_{k\to\infty}\underline{S}\,(Z_k,f)=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,\ \overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\overline{S}\,(Z_k,f)$//

*//**D2.1.1**(1200) Bem: 7.)Vor: (x_n^+),(x_n^-), (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. //*
// Aussage: $\lim_{n\to\infty} x_n^+=\lim_{n\to\infty} x_n^-=x$ und $x_n^-\le y_n\le x_n^+\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} y_n=x$. //

//**D6.1.1**(3100) $I:=[a,b]$, $f:I\to\mathbb{R}$ auf I beschränkt, $Z=\{x_0,...,x_N)$ eine //
//Zerlegung von I, $I_k:=[x_{k-1},x_k]$ k=1,..,N, $m_k=\underbrace{\inf}_{x\in I_k} f(x)$, $M_k=\underbrace{\sup}_{x\in I_k} f(x)$//

*//**S2.2.1**(1301) Vor:Sei z_n konvergent mit $z_n\ \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\ z$//*

//Beh:Jede (.)Teilfolge (z_{ν_n}) von z_n ist konvergent mit $z_{\nu_n}\ \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\ z$//

Im Bew wird nur D6.1.1 h*) benutzt (in L6.1.2)

" ⇐" In L6.1.2 Wahl $Z_k^{(n)}\in(Z_k^{(n)})_{k\in N}$ mit zugehörigen $\xi_k^{(n)}$ und $\eta_k^{(n)}$, $\varepsilon=\frac{1}{k}$

$$\underline{S}\,(,Z_k^{(n)},f)\le\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)\le\underline{S}\,(Z_k^{(n)},f)+\frac{1}{k}\quad\&$$

$$\overline{S}\,(Z_k^{(n)},f)\ge\sigma(Z_k^{(n)},\eta_k^{(n)},f)\ge\overline{S}\,(Z_k^{(n)},f)-\frac{1}{k}$$

$$\lim_{k\to\infty}(\underline{S}\,(f,Z_k^{(n)}))\le\lim_{k\to\infty}(\sigma(f,Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)}))\le\lim_{k\to\infty}(\underline{S}\,(f,Z_k^{(n)})+\underbrace{\frac{1}{k}}_{\xrightarrow[K\to\infty]{}0})\quad\&$$

$$\lim_{k\to\infty}(\overline{S}\,(Z_k^{(n)},f))\ge\lim_{k\to\infty}(\sigma(Z_k^{(n)},\eta_k^{(n)},f))\ge\lim_{k\to\infty}(\overline{S}\,(Z_k^{(n)},f)-\underbrace{\frac{1}{k}}_{\xrightarrow[K\to\infty]{}0})\ \underbrace{\Rightarrow}_{D2.1.1\,Bem\,7.)}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}(\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)) = \lim\limits_{k\to\infty}(\underline{S}(Z_k^{(n)},f)) \underbrace{=}_{S6.1.4} \underline{\int_a^b} f(x)dx \underbrace{\forall}_{a)}$ n&

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma(Z_k^{(n)},\eta_k^{(n)},f)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\overline{S}(Z_k^{(n)},f)) \underbrace{=}_{S6.1.4} \overline{\int_a^b} f(x)dx \underbrace{\forall}_{a)}$ n (ab jetzt deshalb

Index n nicht mehr erforderlich)

$\underbrace{\Rightarrow}_{\otimes\, rechts}$ Zwischensummenfolge, gebildet aus den Teilfolgen

$(\sigma(f, Z_k,\xi^{(k)})_{k\in N}$ und $(\sigma(f, Z_k,\eta^{(k)})_{k\in N}$:

$(\sigma(f, Z_1,\xi^{(1)}, (\sigma(f, Z_1,\eta^{(1)}, \sigma(f, Z_2,\xi^{(2)}, \sigma(f, Z_2,\eta^{(2)}, .., \sigma(f, Z_k,\xi^{(k)}, (\sigma(f, Z_k,\eta^{(k)}))_k$

ist nach rechter Seite von ⊗ (siehe oben) konvergent

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.1}$ Teilfolgen konvergieren zum gleichen Grenzwert d.h.

$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \underbrace{\Rightarrow}_{D6.1.1\ h^*)}$ f integrierbar

Damit ist gezeigt, dass D6.1.1 h*) und h**) äquivalent sind.

S6.1.7(3117) Riemannsches Integrabilitätskriterium

Vor: $f:[a,b]\to R$ beschränkt

Aussagen: f integrierbar ⇔

a) $f:[a,b]\to R$ ist genau dann über [a,b] integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung Z_ε von [a,b] gibt mit $\overline{S}(Z_\varepsilon)-\underline{S}(Z_\varepsilon)<\varepsilon$.

Bew:"⇒" f integrierbar $\underbrace{\Rightarrow}_{S6.1.6}$

$\forall$ ZNF $(Z_n)_{n\in N}$: $\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{S}(f,Z_n)-\underline{S}(f,Z_n))=0<\varepsilon$ ⇒ Beh

„⇐" $\overline{S}(Z_n)-\underline{S}(Z_n)<\varepsilon \Rightarrow \#(\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}(Z)=I^*)-(\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}(Z)=I_*)<\varepsilon\ \#\Rightarrow$

$I^*-I_*<\varepsilon$ beliebig klein ⇒ $\underline{\int_a^b}(fx)dx=I_*=\overline{\int_a^b} f(x)dx \underbrace{\Rightarrow}_{D6.1.1}$

f integrierbar

Andere Formulierung Bew:

Bew:"⇒" f integrierbar $\underbrace{\Rightarrow}_{S6.1.6}$

$\forall$ ZNF $(Z_n)_{n\in N}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}(f,Z_n)-\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}(f,Z_n))=\int_a^b(fx)dx \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{S}(f,Z_n)-\underline{S}(f,Z_n))=0 \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n=n(\varepsilon)$: $(\overline{S}(f,Z_n)-\underline{S}(f,Z_n))<\varepsilon$ ⇒ Aussage

„⇐" $\overline{S}(f,Z_n)-\underline{S}(f,Z_n)<\varepsilon \Rightarrow$

$\forall\ \varepsilon\ \exists\ Z_\varepsilon: \overline{\int_a^b}(fx)dx-\underline{\int_a^b}(fx)dx\le\overline{S}(f,Z_\varepsilon)-\underline{S}(f,Z_\varepsilon))<\varepsilon \Rightarrow$

$I^*-I_*<\varepsilon$ beliebig klein ⇒ $\overline{\int_a^b}(fx)dx=I_*=\underline{\int_a^b} f(x)dx \underbrace{\Rightarrow}_{D6.1.1}$

f integrierbar

b) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ Z_\varepsilon=\{x_0,...,x_p\}$: $\sum_{k=1}^{p}$ $\sup\{|f(x)-f(y)|\ x_{k-1}\le x,y\le x_k\}<\varepsilon$

Bew: a)$\Leftrightarrow$b): Für beliebige $Z=\{x_0,...,x_p\}$ ist

$$\overline{S}(Z,f)-\underline{S}(Z,f)=\sum_{k=1}^{p}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\sup\{f(x)\,|\,x_{k-1}\le x\le x_k\}-\inf\{f(y)\,|\,x_{k-1}\le y\le x_k\})(x_k-x_{k-1}) \underbrace{=}_{siehe*}$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\sup\{|f(x)-f(y)|\,x_{k-1}\le x,y\le x_k\}(x_k-x_{k-1}\}$$

* Für beliebige, beschränkte $A\subset\mathbb{R}$ gilt:

$$\sup A-\inf A \overbrace{\underbrace{=}_{A1.3.13a)}}^{A1.3.6b)} \sup A+\sup(-A) \underbrace{=}_{A1.3.6a)} \sup(A-A) \underbrace{=}_{A1.3.6} \sup\{a-a'\,|\,a,a'\in A\} \underbrace{=}_{siehe**}$$

$$\sup\{|a-a'|:a,a'\in A\}$$

//**A1.3.13** *Es sei K ein angeordneter Körper*
//a)*Definiere für $A\subset K$ die Menge $-A:=\{-x:x\in A\}$.*
// *Zeige:Es existiert $\inf A\in K$ genau dann, wenn $\sup(-A)\in K$ existiert*
// *und dann gilt: $\inf A=-\sup(-A)$.*
//**A1.3.6** *Seien A,B Teilmengen eines geordneten Körpers.*
// *Definiere $A+B=\{a+b:a\in A\ \&\ b\in B\}$, $A-B=\{a-b:a\in A\ \&\ b\in B\}$. Nimm an, dass*
// *für alle 4 Mengen A,B,A+B,A-B sup und inf existieren. Zeige:*
//a)*$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$*
//b)*$\sup(A-B)=\sup A-\inf B$*
** Sei $k=\sup\{a_s-a_s'\,|\,a,a'\in A\}$, $k<\sup\{a_s'-a_s\,|\,a,a'\in A\}$
Tausche Bezeichnungen $a_s=a_s'$ $a_s'=a_s$ $\Rightarrow$ $a_s,a_s'\in A$ $\Rightarrow$
$k=\sup\{-a_s+a_s'\,|\,a,a'\in A\}$ $\Rightarrow$ $\sup\{a-a'\,|\,a,a'\in A\}=\sup\{|a-a'|\,|\,a,a'\in A\}$

S6.1.8 (3119)

Fundamentalabschätzung
Jede über [a,b] integrierbare Funktion ist dort beschränkt und es
gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le$ (b-a) sup{|f(x)|:a≤x≤b}.

#Vor: f(x) integrierbar über [a,b], d.h.

$\lim_{n\to\infty} S_j(Z_{j_n}, \xi_j, f) = c_j \underset{S6.1.1}{=} c$ und $\lim_{n\to\infty} |Z_{j_n}| = 0$ ∀ j,ξ_j in [a,b]

#Beh: • $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le$ (b-a) sup{|f(x)|:a≤x≤b} & • • |f(x)|≤k ∀ x∈[a,b]

//**S6.1.6 b**)(3113)

//Vor: • I=[a,b], a<b, f: I→ *R*, |f(x)|≤K ∀ x∈I

// • • Eine von allen ZNF: $(Z_k^{(n)})_{k\in N}$ mit $|Z_k^{(n)}| \underset{k\to\infty}{\to} 0$ ∀ n

// • • • $\xi_k^{(n)} = \{\xi_1^{(n)}, \dots \xi_{p_{n_k}}^{(n)}\}$ Zwischenpunkte einer Zerlegung $Z_k^{(n)}$ nach • •,
d.h.

// $\xi_\ell^{(n)} \in I_\ell^{(n)}$ ∀ l =1,… p_{n_k}, d.h der l– te Zwischenpunkt von p_n

// Zwischenpunkten einer Zerlegung $Z_k^{(n)}$

// • • • • $\sigma(Z_k^{(n)}, \xi_k^{(n)}, f) = \sum_{\ell=1}^{p_{n_k}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{l-1}, x_l)$

//Aussage:

// f über I Riemann-integrierbar ⇔

// $\sigma(Z_k^{(n)}), \xi_k^{(n)}, f) = \sum_{\ell=1}^{p_{n_k}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)} - x_\ell^{(n)})$ konvergiert ∀ n

// und es gilt $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{p_{n_k}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)} - x_\ell^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$, wenn $|Z_k^{(n)}| \underset{k\to\infty}{\to} 0$

*//**D3.1.1** (1600)//*

//(..)Eine unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ heißt konvergent: ⇔//

// ∃ $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in K$. Dann schreibt man auch $S = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.//

*//**S1.3.1** (501)Vor.:K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*

// 1.) $\overleftarrow{s}$ = supT: ⇔ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und//

// β) ∀ ε>0 ist $\overleftarrow{s}$ –ε keine obere Schranke von T//

// ⇔ ∀ t∈T: t≤$\overleftarrow{s}$ und ∀ ε>0 ∃ t_ε∈T mit t_ε>$\overleftarrow{s}$ -ε//

#Bew:• Berücksichtigung |f(x)|≤K erst in • •

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{p_{n_k}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)} - x_\ell^{(n)})\right| \le$

$|\sup\{|f(x)|:a\le x\le b\} * \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{p_{n_k}} |(x_k - x_{k-1})| = (b-a)\sup\{|f(x)|:a\le x\le b\}$.

oder

$|S(Z_N, \xi, f)| = \left|\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \underset{S1.3.1}{\le} \left|\sum_{k=1}^{N} \sup\{f(\xi_k): a \le (\xi_k) \le b\}(x_k - x_{k-1})\right| \le$

$|\sup\{f(\xi_k): a\le(\xi_k)\le b\}|\,|(\sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1})| =$

$|\sup\{f(\xi_k): a \le (\xi_k) \le b\}|(b-a) \quad \forall\ \xi_k \in [a,b],\ N \in \mathbb{N}$

$\underbrace{\Rightarrow}_{f\ \text{integrierbar}} \underbrace{\lim}_{\substack{|Z_N| \to 0 \\ N \to \infty}} |S(Z_N, \xi)| \underbrace{=}_{S6.1.6} |\int_a^b f(x)\,dx| \le (b-a)|\sup\{f(\xi_k): a \le (\xi_k) \le b\}|$

- ● #Widerspruchsbeweis mit Annahme f(x) unbeschränkt:

  Sei jetzt f auf [a,b] nach oben unbeschränkt und sei Z_n eine ZNF.

  Für jedes n ist dann f in mindestens einem Teilintervall von Z_n nach oben unbeschränkt und deshalb kann man in einem solchen Teilintervall den Zwischenpunkt so wählen, dass die zugehörige Riemannsumme $\ge n$ ausfällt,d.h. Riemannsummen konvergieren nicht. Deshalb kann f nicht integrierbar sein. Durch Übergang zu –f folgt, dass auch nach unten unbeschränkte Funktionen nicht integrierbar sind.

A6.1.1 Zeige: die sog Dirichletsche Sprungfunktion $f(x) = \begin{cases} 0 (x \in Q) \\ 1 (x \notin Q) \end{cases}$ ist über [a,b] nicht integrierbar.

A6.1.2 Zeige:Eine konstante Funktion ist über jedes abgeschlossene Intervall integrierbar. Finde den Wert des Integrals