6.2(3200) **Integrierbarkeit von Funktionen**

S6.2.1(3200) $f: I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $a\le b$, ● stetig oder ●● monoton ist Riemann-integrierbar

*//**D4.3.1**(2400) Stetigkeit//*
//Sei $D\subset\mathbb{R}$. Dann heißt $f: D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in D :\Leftrightarrow$ //
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: f(x)\in U^{\varepsilon}(f(x_0))\ \ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$//
*//***($\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$).//*
//f heißt stetig auf $A\subset D :\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.//
//Bem:Ist $x_0\in D\cap D'$, so ist f stetig in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.//
*//**D4.4.5** (2562)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$. $f: M\to\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf $M :\Leftrightarrow$ //
//$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0$ mit $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon\ \ \forall\ z_1,z_2\in M,\ |z_1-z_2|<\delta_\varepsilon$//
//Bem:$f: M\to\mathbb{C}$ ist gleichmäßig stetig auf M $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$//
// (δ unabhängig von $z\in M$) mit: $\forall\ z_0\in M,\ \forall\ z\in M\cap U_\delta(z_0)$ gilt//
// $f(z)\in U_\varepsilon(z_0)$.//
*//**S4.4.8**(2563)Gleichmäßige Stetigkeit//*
//Vor:Sei $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ und M kompakt, $f: M\to\mathbb{C}$ stetig auf M.//
//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.//
*//**S4.4.9**(2565)//*
//Vor:$M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ & M beschränkt, $f: M\to\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig auf M.//
//Beh:f(M) ist beschränkt, d.h. |f| ist auf M beschränkt//
// Zusatz: f läßt sich eindeutig stetig und gleichmäßig stetig von M//
// auf $\overline{M}$ (kompakt) fortsetzen. Damit ist f auf M beschränkt.//
//Bem:(.)Stetigkeit $\underset{\text{nicht}}{\Rightarrow}$ gleichmäßige Stetigkeit//
// ($f(x)=1/x$ auf $(0,1)$, δ_ε hängt von x_0 ab)//
// (..)Falls I kompakt und stetig $\underset{S4.4.8}{\underbrace{\Rightarrow}}$ f(I) kompakt, also beschränkt//

Bew: ● f stetig auf [a,b] & [a,b] ist kompakt $\underset{S4.4.8}{\underbrace{\Rightarrow}}$

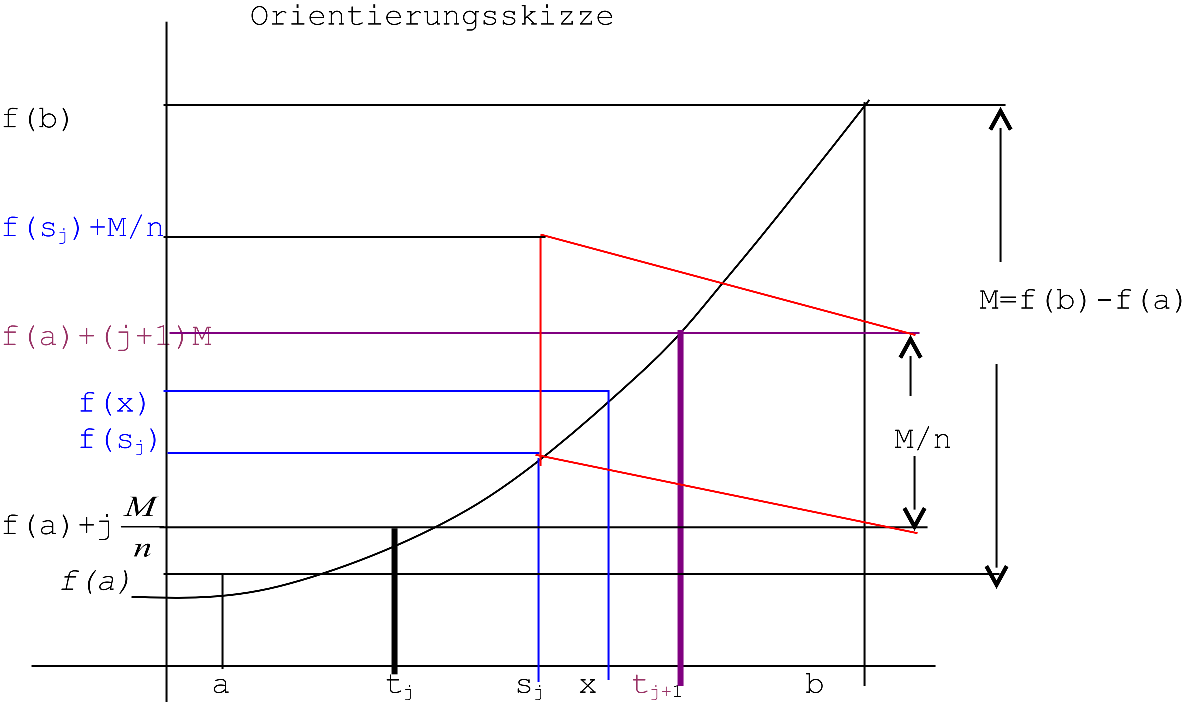
f gleichmäßig stetig auf $\underset{beschränkt}{\underbrace{[a,b]}}$ $\underset{S4.4.9}{\underbrace{\Rightarrow}}$ f([a,b]) ist beschränkt $\Rightarrow$
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0: |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, falls $|x_1-x_2|<\delta$.
Sei $|Z|<\delta \Rightarrow M_k-m_k<\varepsilon\ \ \forall\ k=1,\dots,N \Rightarrow \overline{S}(Z)-\underline{S}(Z)<\varepsilon\sum_{k=1}^{N}(x_k-x_{k-1})=\varepsilon(b-a)$ $\underset{S6.2.5}{\underbrace{\Rightarrow}}$
f integrierbar.

● ● Sei f monoton wachsend (fallend entsprechender Bew),

d.h. $f(a) \le f(x) \le f(b)$, $x \in (a,b)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $M := f(b) - f(a)$, $n > \frac{2M}{\varepsilon(b-a)}$

Konstruktion Z wie folgt:

Orientierungsskizze



$a = t_0, \ldots, t_n$, $t_{j+1} := \sup\{x \in [t_j, b] \mid f(x) \le f(a) + (j+1)\frac{M}{n}\}$ $\forall\ j \in \{0, \ldots, n-1\}$

$s_0, \ldots, s_n$: $s_j := \min\{t_j + \frac{\varepsilon}{2*M*n}, t_{j+1}\}$ $\forall\ j \in \{0, \ldots, n-1\}$

$t_{j+1} := \sup\{x \in [t_j, b] \mid f(x) \le f(a) + (j+1)\frac{M}{n}\} \Rightarrow x_{t_{j+1}} \in [t_j, b] \Rightarrow x_{t_{j+1}} \ge t_j \Rightarrow t_{j+1} \ge t_j$

$s_j := \min\{t_j + \frac{\varepsilon}{2*M*n}, \sup\{x \in [t_j, b] \mid f(x) \le f(a) + (j+1)\frac{M}{n}\}\}$

1. Fall $s_j := \min\{t_j + \frac{\varepsilon}{2*M*n}, \sup\{x \in [t_j, b] \mid f(x) \le f(a) + (j+1)\frac{M}{n}\}\} =$

   $\sup\{x \in [t_j, b] \mid f(x) \le f(a) + (j+1)\frac{M}{n}\} \Rightarrow t_{j+1} \ge s_j$

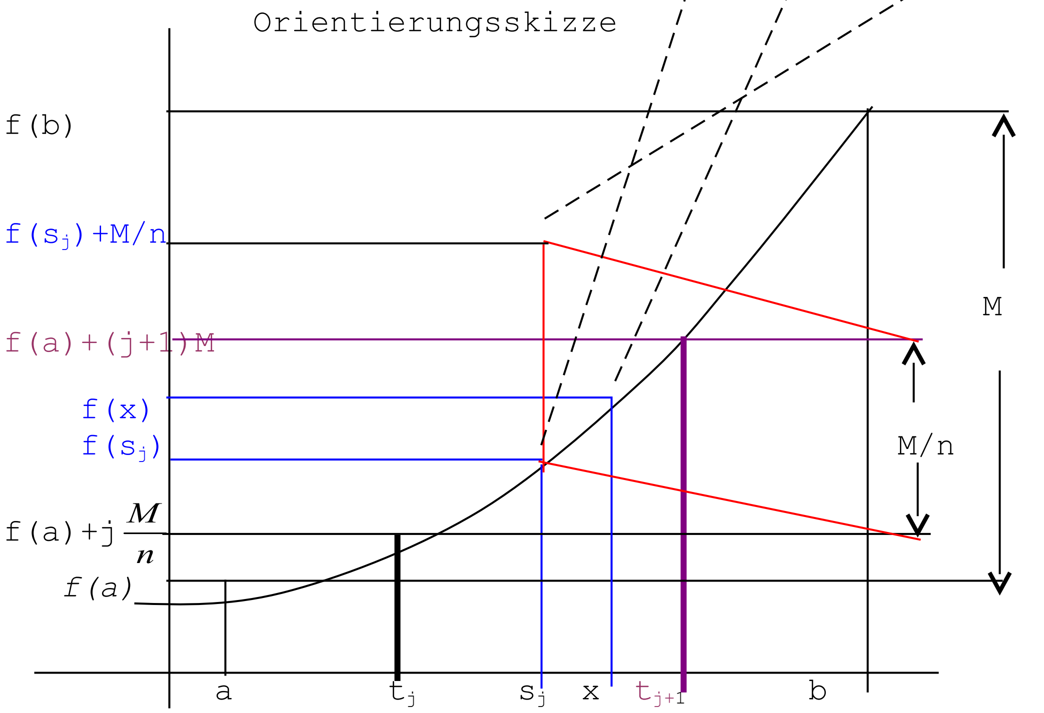
2. Fall $s_j := \min\{t_j + \frac{\varepsilon}{2*M*n}, \sup\{x \in [t_j, b] \mid f(x) \le f(a) + (j+1)\frac{M}{n}\}\} =$

   $t_j + \frac{\overset{>0}{\varepsilon}}{\underbrace{2*M*n}_{>0}} \Rightarrow t_j \le s_j \le t_{j+1}$

$\Rightarrow$ Damit gilt ⊗ $a = t_0 \le s_0 \le t_1 \le s_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n = b$ &

$\forall j\in\{0,..,n-1\},\ \forall x\in[s_j,t_{j+1}):\ f(s_j)\le f(x)\le f(s_j)+\frac{M}{n}$ (⊗ siehe weiter unten)

Orientierungsskizze



$\underset{\text{mehrfach auftretende Elemente streichen}}{\underbrace{\Rightarrow}}$ ergibt Z von [a,b] $\Rightarrow$

$\overline{S}(Z,f)-\underline{S}(Z,f)\ \underset{\otimes}{\underbrace{=}}$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\ (\sup\{f(x)|x\in[t_j,s_j)\}-\inf\{f(x)|x\in[s_j,t_j\}\ )*(s_j-t_j)$$

$$+\ (\sup\{f(x)|x\in[s_j,t_{j+1})\}-\inf\{f(x)|x\in[s_j,t_{j+1}\})(t_{j+1}-s_j)\Big)\ \underset{*}{\underbrace{\le}}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(M*(s_j-t_j)+\frac{M}{n}(t_{j+1}-s_j))\le n*M\frac{\varepsilon}{2*M*n}+\frac{M}{n}(b-a)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow$$

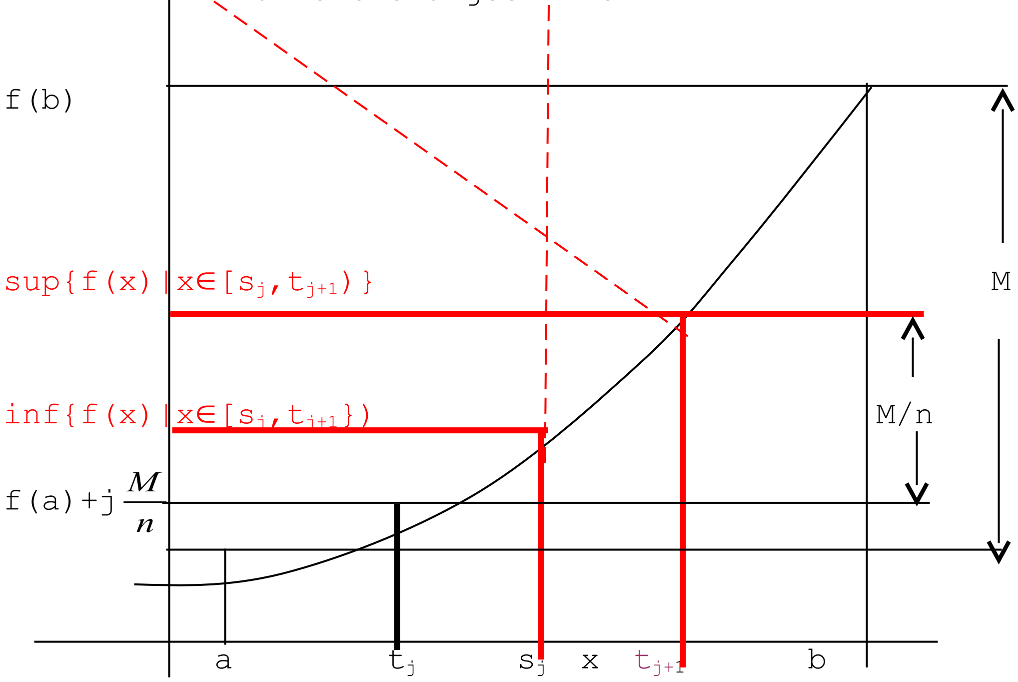
Riemann-integrierbar auf [a,b]

* siehe nächste Seite

$*(\sup\{f(x)\mid x\in[t_j,s_j)\}-\inf\{f(x)\mid x\in[s_j,t_j\}))\le M \quad \forall\ j$

$(\sup\{f(x)\mid x\in[s_j,t_{j+1})\}-\inf\{f(x)\mid x\in[s_j,t_{j+1}\})\le \frac{M}{n} \quad \forall\ j$

Orientierungsskizze



Bsp: • $f:[0,1]\to \mathbb{R},\ f(x):=\begin{cases}0, x\notin Q\\ 1, x\in Q\end{cases}$, Beh: f ist nicht integrierbar.

*//**D6.1.1**(3100) $I=[a,b],\ a,b\in\mathbb{R},\ f: I\to\mathbb{R}$.*

*//**e)** $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+\ \forall\ x\in[a,b]$:*

// $m_k:=\inf(f(I_k))=\underbrace{\inf}_{x\in I_K} f(x)=\inf\{f(x):x\in I_k\}$,

// $M_k:=\sup(f(I_k))=\underbrace{\sup}_{x\in I_K} f(x)=\sup\{f(x):x\in I_k\}$, jeweils $k\in\{1,2,...,n\}$

// Untersumme $\underline{S}(Z,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k|I_k|=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

// Obersumme $\overline{S}(Z,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k|I_k|=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$

Bew: Z beliebige Zerlegung von $[0,1]\Rightarrow m_k=0,\ M_k=1,\ k=1,2,...,n \Rightarrow$
$\underline{S}(f,Z)=0,\ \overline{S}(f,Z)=1\ \forall\ Z \Rightarrow I_*=0,\ I^*=1 \Rightarrow I_*\ne I^*$

• • $f:=[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x \Rightarrow f$ stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S6.2.1} f\in R(I)$.

$x_j=\frac{j}{k},\ 0\le j\le k,\ Z_k=(x_0,x_1,...,x_k),\ k\in\mathbb{N}$.

$\xi_j^{(k)}:=x_j=\frac{j}{k}$ (rechter Intervallendpunkt von I_j in $\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j^{(k)})(x_j-x_{j-1})$) $\Rightarrow$

$\sigma(Z_k,\xi^{(k)},f)=\sum_{j=1}^{k} f(\xi_j^{(k)})(x_j-x_{j-1})=(\overline{S}(f,Z_k))$ da $\nearrow$f $=\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}*\underbrace{\frac{1}{k}}_{Länge\ Teil\ int\ evall}=$

$\frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k} j=\frac{1}{k^2}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{k^2+k}{k^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)\underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty}\frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 x\,dx=\lim_{k\to\infty}\sigma(f,Z_k,\xi^{(k)})=\frac{1}{2}$

S6.2.2 (3204)
Vor: $f,g\in R(I)$
Aussagen:

- Sind f und g über [a,b] integrierbar, so gilt dasselbe auch für fg.

//***S6.1.8*** *(3102) Jede über [a,b] integrierbare Funktion ist dort*

//beschränkt und es gilt $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le b-a)\sup\{|f(x)|:a\le x\le b\}$.

//***S1.2.1*** *(406) Vor: K sei angeordneter Körper und* $a,b\in K$*//*
// Beh: 6.) $|a+b|\le|a|+|b|$ *(Dreiecksungleichung)//*
//**D6.1.1**(3100)
//**h*)** Falls $I^*(f)=I_*(f)$, so heißt f über [a,b] (Riemann)integrierbar.
// Schreibweise: $R([a,b]):=\{f:[a,b]\to \mathbb{R} \mid f \text{ R-integrierbar}\}$

// Der gemeinsame Wert wird dann mit $I^*(f)=I_*(f)=\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet

// und heißt bestimmtes (Riemann-)Integral von f über [a,b]

Bew: f,g integrierbar $\underset{S6.1.8}{\Rightarrow}$ $\exists\ K\in\mathbb{R}$: $|f(x)|,|g(x)|\le K\ \forall\ x\in[a,b] \Rightarrow$

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)+f(x)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(y)| \underset{S1.21\ 6.)}{\le}$$

$$|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)|\le K(|g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)|).$$

Ist Z eine beliebige Zerlegung und
$f(x)=\overline{S}_f$, $f(y)=\underline{S}_f$ bzw $g(x)=\overline{S}_g$, $g(y)=\underline{S}_g$, $f(x)g(x)=\overline{S}_{fg}$, $f(y)g(y)=\underline{S}_{fg}$
Für die zugehörigen Unter- und Obersummen von f bzw g, bzw fg $\Rightarrow$

$$\overline{S}_{fg}-\underline{S}_{fg}\le K(\underbrace{\overline{S}_f-\underline{S}_f}_{=0}+\underbrace{\overline{S}_g-\underline{S}_g}_{=0}) \Rightarrow \overline{S}_{fg}-\underline{S}_{fg}=0 \underset{D6.1.1\,h^*)}{\Rightarrow} \text{Beh.}$$

- - Zusätzliche Vor: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Aussage: $\alpha f+\beta g\in R(I)$ und $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b (f(x)dx+\beta\int_a^b g(x))dx$

//***S1.2.1*** *(406) Vor: K sei angeordneter Körper und* $a,b\in K$
// Beh: 6.) $|a+b|\le|a|+|b|$ *(Dreiecksungleichung)*
//***S6.1.7*** *(3116) Riemannsches Integrabilitätskriterium*
// Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ist genau dann über [a,b]*
// integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ *eine Zerlegung Z von [a,b] gibt*
// mit $O(Z)-U(Z)<\varepsilon$ *.*
Bew: $h:=\alpha f+\beta g$, $\varepsilon>0$, $x,x'\in I \Rightarrow$

$$\otimes|h(x)-h(x')|= |\alpha(f(x)-f(x')|+ \beta(g(x)-g(x')|$$

$$\underset{S1.2.1}{\le} |\alpha||f(x)-f(x')|+ \beta|g(x)-g(x')|$$

Z von I, $f(x)=\overline{S}(Z,f)$, $f(x'=\underline{S}(Z,f)$, $g(x)=(\overline{S}(Z,g)$, $g(x')=\underline{S}(Z,g \Rightarrow$

$$\overline{S}(Z,h)-\underline{S}(Z,h)=\sum_{k=1}^{n}(\underbrace{\sup h}_{I_K}-\underbrace{\inf h}_{I_K})(x_k-x_{k-1}) \underset{\otimes}{\le}$$

$$|\alpha|(\overline{S}(Z,f)-\underline{S}(Z,f))+|\beta|(\overline{S}(Z,g)-\underline{S}(Z,g) \underset{S6.1.7}{\Rightarrow}$$

$$\exists\ Z_1, Z_2: (\overline{S}(Z_1,f)-\underline{S}(Z_1,f))\le\frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} \quad \text{und}$$

$$(\overline{S}(Z_2,g)-\underline{S}(Z_2,g))\le\frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)}$$

Wähle $Z = Z_1 \& Z_2 \Rightarrow \overline{S}(h,Z) - \underline{S}(h,Z) \le |\alpha| \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|+|\beta|)} \le$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{S6.1.7} (\alpha f + \beta g) \in R(I)$

● ● ● Aussage: $f(x) \le g(x) \quad \forall\ x \in I \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

//**L6.1.2**//

//Vor: $\underbrace{I}_{=[a,b]} \to R$ integrierbar, (Z_n) eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$.

// Folge von Zwischenstellen $(\xi_n)_n = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$, $|f(x)| \le K$

// $\sigma(f, Z_n, (\xi_n)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k-1}, x_k)$

//Aussage: $\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi) = \int_a^b f(x)dx$

Bew: Sei ZNF $(Z_n)_n$ und $|Z_n| \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$

$$\sigma(Z_n, \xi^{(n)}, f) = \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_{k-1}, x_k) \le \sum_{k=1}^{p} g(\xi_k)(x_{k-1}, x_k) = \sigma(Z_n, \xi^{(n)}, g)$$

$$\int_a^b f(x)dx \underbrace{=}_{L6.1.2} \lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) \le \lim_{n\to\infty} \sigma(g, Z_n, \xi^{(n)}) \underbrace{=}_{L6.1.2} \int_a^b g(x)dx$$

● ● ● ● $|f|$ über $[a,b]$ integrierbar

Bew: Für $g(x) = |f(x)|$ folgt aus dem obigem ● ● ● die Integrierbarkeit

von $|f|$ und

● ● ● ● ● $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Bew: $f(x) \le |f(x)| \quad \forall\ x \in I$, $-f(x) \le |f(x)| \quad \forall\ x \in I \underbrace{\Rightarrow}_{S6.2.2\bullet\bullet\bullet}$

$$\int_a^b f(x)dx \underbrace{\le}_{\bullet\bullet\bullet} \int_a^b |f(x)|dx, \quad -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-f(x))dx \underbrace{\Rightarrow}_{S6.2.2\bullet\bullet\bullet} \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

//Lipschitzbedingung f auf D: $\exists\ L\in\mathbb{R}_+: |f(x_0)-f(x_1)| \le L|x_0-x_1|\ \ \forall\ x_0,x_1\in D$//

S6.2.3(3206)

a) Sei $f:[a,b]\to A\subset\mathbb{R}$ über [a,b] integrierbar und es gelte für $g:A\to\mathbb{R}$ eine Lipschitzbedingung auf A. Dann ist $g\circ f$ über [a,b] integrierbar.

//**S6.1.7**(3117) Riemannsches Integrabilitätskriterium
//a) Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann über [a,b]
// integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung Z von [a,b] gibt
// mit $O(Z)-U(Z)<\varepsilon$.
//b) Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt
// Aussage: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ Z_\varepsilon=\{x_0,\ldots,x_p\}: \sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x)-f(y)|\ x_{k-1}\le x,y\le x_k\}<\varepsilon$

Bew: $|g(\xi)-g(\eta)|\le L|\xi-\eta|\ \ \forall\ \xi,\eta\in f([a,b])$

Zu $\frac{\varepsilon}{L}\ \exists\ Z_{\frac{\varepsilon}{L}}=\{x_0,\ldots,x_p\}$ von [a,b]:

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x)-f(y)|:x_{k-1}\le x,y\le x_k\}(x_k-x_{k-1}) \underbrace{<}_{S6.1.7b)} \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|g(f(x))-g(f(y))|:x_{k-1}\le x,y\le x_k\}(x_k-x_{k-1}) \underbrace{\le}_{|g(f(x))-g(f(y))|\le L|f(x)-f(y)|}$$

$$L\sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x)-f(y)|:x_{k-1}\le x,y\le x_k\}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{S6.2.5} g\circ f \text{ integrierbar}$$

S6.2.4(3207)

(.)(beschränkte) $f:[a,b]\rightarrow R$ Riemann integrierbar ⇒

$f: [a',b']\rightarrow R$ mit $[a',b']\subset[a,b]$ Riemann integrierbar

d.h. f über [a,c] und über [c,b] Riemann integrierbar

(..)Für $c\in(a,b)$ gilt: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

*//**S2.2.5**(1307)*

//$(x_n)_n\subset R$ konvergent ⇔ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |x_n-x_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\geq n_1(\varepsilon)$.

#Bew: Seien $Z_n\in Z(a,b)$ Zerlegungen von [a,b] mit

$|Z_n| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ und $S_{Z_n}(f)$ zugehörige Riemannsummen: $S_{Z_n}(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^b |f(x)|dx$.

(.)Zu beweisen: f über [a',b'] integrierbar:

O.B.d.A Annahme a',b' sind Teilungspunkte von Z_n.

2 beliebige Zerlegungsfolgen in $Z(a',b')$:

$Z_n^{(1);a'b'}$, $|Z_n^{(1);a'b'}| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ mit $S_{Z_n^{(1);a'b'}}(f)$ und

$Z_n^{(2),a'b'}$, $|Z_n^{(2);a'b'}| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ mit $S_{Z_n^{(2);a'b'}}(f)$

Seien $Z_{a,a',b,b'}\in Z(a,b)$ mit Teilungspunkten aus $[a,a']\cup[b',b]$ mit

gleichen ξ Werten in den Teilungsintervallen, d.h. gleichen

Funktionswerten

$\tilde{Z}_n^{(1);a,b}=(Z_n^{(1);a'b'}+Z_{a,a',b,b'})\in Z(a,b)$, $|\tilde{Z}_n^{(1);a,b}| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, mit $S_{\tilde{Z}_n^{(1);a,b}}(f)$

& $\tilde{Z}_n^{(2);a,b}=(Z_n^{(2);a'b'}+Z_{a,a',b,b'})\in Z(a,b)$ $|\tilde{Z}_n^{(2);a,b}| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ mit $S_{\tilde{Z}_n^{(2);a,b}}(f)$

⇒

$|S_{Z_n^{(1);a',b'}}(f)-S_{Z_n^{(2);a',b'}}(f)| \underset{*}{=} |S_{\tilde{Z}_n^{(1);a,b}}(f)-S_{\tilde{Z}_n^{(2);a,b}}(f)| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ ⇒

*Im rechten Betrag verschwinden gleiche $f(\xi)(x_k-x_{k-1})$

mit $x_k,x_{k-1}\in[a,a']\cup[b',b]$

∀ Folgen $S_{Z_n'}$ zu $Z_n'\in Z(a',b')$ gilt: $S_{Z_n'}$ sind Cauchyfolgen $\underset{S2.2.5}{\Rightarrow}$

$S_{Z_n'}$ konvergieren gegen denselben Grenzwert $\underset{D6.1.1}{\Rightarrow}$

f über [a',b'] integrierbar.

(..) $c\in(a,b)$ $\underset{(.)}{\Rightarrow}$ f über [a,c] ∨ [c,b] integrierbar.

∀ Paare $S_{Z^{(1)}}(f)$ über [a,c], $S_{Z^{(2)}}(f)$ über [c,b]:

$S_{Z^{(1)}}(f)$ und $S_{Z^{(2)}}(f)$ zu $S_Z(f)$ über [a,b] kombinierbar ⇒

$f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{|S_{Z^{(1)}}|\to 0} S_{Z^{(1)}}(f)+\lim_{|S_{Z^{(2)}}|\to 0} S_{Z^{(2)}}(f)=\lim_{|S_{Z^{(1)}}|,|S_{Z^{(2)}}|\to 0}(S_{Z^{(1)}}(f)+S_{Z^{(2)}}(f))=$

$\lim_{|S_Z|\to 0} S_Z(f)=\int_a^b f(x)dx$

Andere Formulierung

Für a<c<b ist eine Funktion f genau dann über [a,b] integrierbar,

wenn sie sowohl über [a,c] als auch über [c,b] integrierbar ist und

dann gilt $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

//**S6.1.3**(3104) Sei $|f(x)|\le K\ \forall\ x\in[a,b]$ und sei $\overline{Z}$ eine Zerlegung von//
// [a,b] mit N Teilintervallen. Dann gilt für jede Zerlegung //
//$Z=\{x_0,...,x_n\}$: $\underline{S}(Z)\le\underline{S}(Z+\overline{Z})\le\underline{S}(Z)+2NK|Z|$, $\overline{S}(Z)\ge\overline{S}(Z+\overline{Z})\ge\overline{S}(Z)-2NK|Z|$//

//**S6.1.7** (3117)Riemannsches Integrabilitätskriterium//
// Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann über //
// [a,b] integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung //
// Z von [a,b] gibt mit $\overline{S}(Z)-\underline{S}(Z)<\varepsilon$.//

Bew:Aus S6.1.3 folgt, dass bei Verfeinerung einer Zerlegung die Untersummen nicht abnehmen bzw Obersummen nicht zunehmen können. Daraus ergibt sich, dass wir oBdA nur Zerlegungen betrachten können, die c als Teilpunkt enthalten. Damit folgt die Beh mit S6.1.7

Bem:

- Sei f über [a,b] integrierbar und seien $x_0,x_1\in[a,b]$. Ist $x_0<x_1$, so folgt aus dem vorstehenden Satz die Integrierbarkeit von f über $[x_0,x_1]$. Es ist üblich

  $\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx=-\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, $\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx=0$ zu setzen. Mit diesen Vereinbarungen folgt dann für beliebige $x_0,x_1,x_2\in[a,b]$ aus obigem Satz $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x0}^{x_2} f(x)dx$.

- - Für a<b setzen wir $\int_a^a f(x)dx=0$ und $\int_b^a f(x)dx:=-\int_a^b f(x)dx$

  Dann gilt (6.2.4) für beliebige $a,b,c\in\mathbb{R}$.

S6.2.5(3209) Mittelwertsatz der Integralrechnung
Vor: $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und integriebar

Aussage: $\exists\ \xi\in[a,b]: \int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

*//**S4.4.7**(2560) Globale Extrema//*
//Vor: $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ & M kompakt, $f:M\rightarrow\mathbb{R}$ stetig auf M.//
//Beh:$\exists \min\limits_{z\in M} f(z)=\min f(M)\in\mathbb{R}$ und $\exists \max\limits_{z\in M} f(z)=\max f(M)\in\mathbb{R}$, d.h.//
// $\exists\ z_1,z_2\in M$ mit $f(z_1)\leq f(z)\leq f(z_2)\ \ \forall\ z\in M$.//
*//**S4.4.1**(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)*
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

Bew: S4.4.7 $\Rightarrow m:=\underbrace{\min}_{x\in I} f(x)=f(x_1),\ M:=\underbrace{\max}_{x\in I} f(x)=f(x_2)$

$\Rightarrow m\leq f(x)\leq M\ \ \forall\ x\in I \underset{S6.2.2\ldots}{\underbrace{\Rightarrow}} \int_a^b m dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b M dx \Rightarrow m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq M$

$\Rightarrow$

$f(x_1)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq f(x_2) \underset{S4.4.1}{\underbrace{\Rightarrow}} \exists\ \xi\in[a,b],\ x_1\leq\xi\leq x_2: f(\xi)=\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\Rightarrow$ Aussage

S6.2.6(3209) Sei f über [a,b] integrierbar und sei $x_0 \in [a,b]$ sowie

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \forall\ x\in[a,b].$$

Dann erfüllt F eine Lipschitzbedingung auf [a,b] und ist insbesondere dort stetig.

*//**D4.3.1' (2400)***
//Wir sagen, daß f auf D einer Lipschitzbedingung genügt,falls eine //
//Konstante $L\in R_+$ existiert, sodaß $|f(x_0)-f(x_1)| \le L|x_0-x_1|$ //
//$\forall\ x_0,x_1 \in D$.
*//**S6.1.8** (3119)//*
//a) Fundamentalabschätzung//
// Jede über [a,b] integrierbare Funktion ist dort beschränkt und es
// gilt $|\int_a^b f(x)dx| \le (b-a)\sup\{|f(x)|:a\le x\le b\}$.//
*//**S6.2.4**(3206)*
//Bem: Sei f über [a,b] integrierbar und seien $x_0,x_1\in[a,b]$. Ist $x_0<x_1$, so
// folgt aus dem vorstehenden Satz die Integrabilität von f über
// $[x_0,x_1]$. Es ist üblich
// $\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx=-\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, $\int_{x_1}^{x_0} f(x)dx=0$ zu setzen
*//**D4.3.1**(2400)Bsp: Weiter folgt aus der Gültigkeit einer*
//Lipschitzbedingung immer die Stetigkeit auf D.

Bew:Für $x_1,x_2\in[a,b]$,o.B.d.A $x_1<x_2$: $F(x_1)-F(x_2)=\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt$

$$\underbrace{=}_{S6.2.4Bem} -\int_{x_1}^{x_0} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt = -\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \underbrace{=}_{S6.2.4Bem} \int_{x_2}^{x_1} f(t)dt \underbrace{\le}_{S6.1.2}$$

$|x_1-x_2| \sup\{|f(t)|: x_1 \le x \le x_2\} \le |x_1-x_2| \sup\{|f(t)|:a \le x \le b\}=L^*|x_1-x_2|$ mit $L=\sup_{[a,b]}|f(t)| \underbrace{\Rightarrow}_{D4.3.1Bsp} F(x)$ stetig

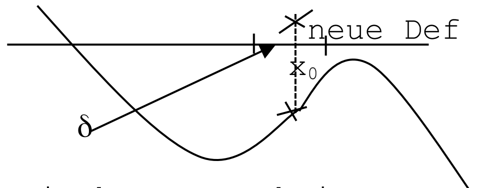
A6.2.1 Finde den Zusammenhang zwischen den Obersummen von f und den Untersummen von –f.
Tip: sup=-inf

A6.2.2 Finde Ober- und Unterintegral der Dirichletschen Sprungfunktion
???????????????????
Tip: Oberintegral immer0, Unterintegral immer 1...nicht integrierbar

A6.2.3 Sei f über [a,b] integrierbar und sei g(x)=f(x) bis auf endlich viele $x\in[a,b]$. Zeige, dass auch g über [a,b] integrierbar ist und dass $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

//**S6.1.8** (3119)f über [a,b] integrierbar ist dort beschränkt //

Lös:



f integrierbar ⇒ auch im Intervall $[x_0-\delta,x_0+\delta]$integrierbar

$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx=$

$\int_a^{x_0-\delta} g(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b} g(x)dx$. # hier $|g(x)|=|f(x)| \underbrace{\overset{S6.1.8}{\le}}_{f\ integrierb} K$ #

$-\varepsilon<K2\delta\le \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx \le \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)dx\le K2\delta<\varepsilon$ falls $\delta<\varepsilon/2K \Rightarrow$

$|I-\int_a^b g(x)dx|<\varepsilon$, $|I-\int_a^b g(x)dx|<\varepsilon$. Abändern an einer Stelle ändert nichts, d. h. (Induktion)auch an mehr Stellen ändert nichts.

A6.2.4 Sei f über [a,b] integrierbar. Zeige die Integrierbarkeit von f^+,f^- mit $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ $\forall\ x\in[a,b]$.

//**S6.1.7**(3117) Riemannsches Integrabilitätskriterium
//a) Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann über [a,b]
// integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung Z von [a,b] gibt
// mit $O(Z)-U(Z)<\varepsilon$.

Lös: $\forall\ Z\in\mathcal{Z}(a,b)$: $0 \underbrace{\le}_{O>U} (\overline{S}_Z(f^+)-\underline{S}_Z(f^+)) \underbrace{\le}_{*} (\overline{S}_Z(f)-\underline{S}_Z(f)) \underbrace{<}_{f\ integrb} \varepsilon$ bzw

$0 \underbrace{\le}_{O>U} (\overline{S}_Z(f^-)-\underline{S}_Z(f^-)) \underbrace{\le}_{*} (\overline{S}_Z(f)-\underline{S}_Z(f)) \underbrace{<}_{f\ integrb} \varepsilon$

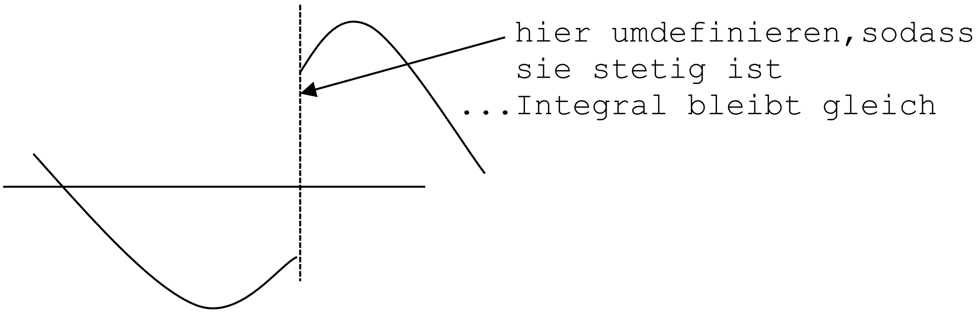
$\underbrace{\Rightarrow}_{S6.1.7}$ f^+,f^- integrierbar ⇒

$f^++f^-=|f|$, $f^+-f^-=f$, $f^+=1/2(|f|+f)$...|f| integrierbar

Überlegungsskizze: O>U & O-U=0 in Teilen $f^+=0$...kein Beitrag zu O-U#

A6.2.5 Zeige, dass stückweise stetige Funktionen immer integrierbar sind.

Lös:



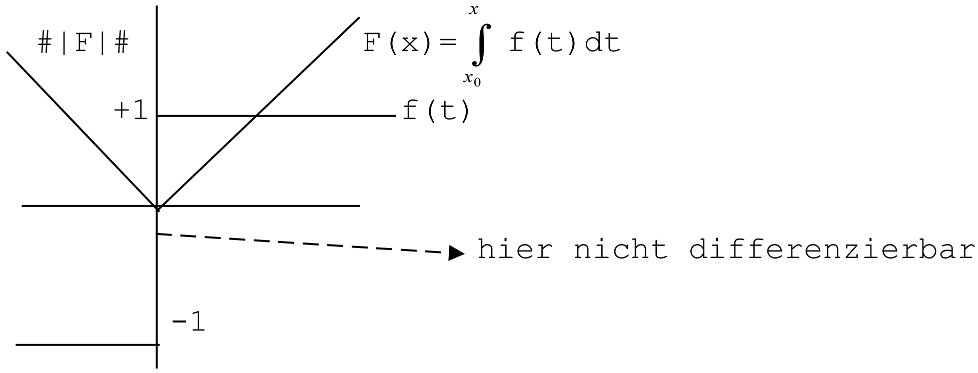
//**S6.2.6**(3209) Sei f über [a,b] integrierbar und sei $x_0 \in [a,b]$ sowie

// $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \ \forall\ x\in[a,b]$.

// Dann erfüllt F eine Lipschitzbedingung auf [a,b] und ist

// insbesondere dort stetig.

A6.2.6 Gib ein Bsp einer über [a,b] integrierbaren Funktion f, für welche die in S6.2.6 definierte Funktion F nicht auf [a,b] differenzierbar ist.



A6.2.7 Berechne $\int_0^1 x^2\,dx$ mit Hilfe des Ober- und Unterintegrals

für eine zulässige Zerlegungsfolge (Z_n).

Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k^2=n(n+1)(2n+1)/6$

Lös: (Z_n): $Z_n=\{0,1/2,2/n...n/n\}$

$$\underline{\int_0^1} x^2\,dx=\lim_{n\to\infty} \underline{S}(Zn),\quad \underline{S}(Zn)=\sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x), \frac{k-1}{n}\le x\le \frac{k}{n}\}(k/n-\frac{k-1}{n})=$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2}\frac{1}{n} \# = 1/n^3\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \# = 1/n^3\sum_{k=1}^{n-1} k^2=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/3$$

$$\overline{\int_0^1} x^2\,dx=\lim_{n\to\infty} \overline{S}(Z_n),\quad \overline{S}(Z_n)=\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n}= 1/n^3\sum_{k=1}^{n} k^2=$$

$$\frac{n(n+1)(2n-1)}{6n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/3\,(n\to\infty)$$

$x\mapsto x^3$ stetig $\Rightarrow$ ist integrierbar, $\int_0^1 x^2\,dx=1/3$