6.3(3300) Hauptsätze der Differenzial- und Integralrechnung

Weitere Formulierungen Seite 3003, vorab hier zum besseren Verstehen von D6.3.1

S6.3.1 (3300)Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

a)Vor: (.) F: [a,b]→$\mathbb{R}$ differenzierbar auf [a,b]

(..) F' stetig auf [a,b]

Aussage: $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a) =: [F(x)]_a^b =: F(x)|_a^b$

*//**D6.1.1**(3100) I=[a,b], a,b∈R, f: I→ R.*

*//**a**) $Z=\{x_0,...x_N\}$ mit $a=x_0<x_1<....<x_N=b$ heißt Zerlegung von I in*

// Teilintervalle $I_k:=[x_{k-1},x_k]$ für k={1,...,N}.

// $|Z|=\max\{|I_k|:1\le k\le N\}$, $|I_k|:=x_{k-1}-x_k$ heißt Feinheit der Zerlegung Z

*//**b)** Eine Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen heißt Zerlegungsnullfolge*

// (ZNF),falls $\lim_{n\to\infty}|Z_n|=0$ gilt.

Bew: ● $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Z_n=\{a=x_0^{(n)},...x_{p_K}^{(n)}=b\}$, $\lim_{n\to\infty}|Z_n|=0$

*//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion f:I→$\mathbb{R}$ in einem Punkt x_0*

//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

//**S4.4.8**(2565) Gleichmäßige Stetigkeit von f

//Vor: Sei M⊂$\mathbb{R}$ oder M⊂$\mathbb{C}$ und M kompakt, f:M→$\mathbb{C}$ stetig auf M.

//Beh:f ist gleichmäßig stetig auf M.

//**S4.4.10**(2568)

//Ist f:I→$\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf I, so ist f stetig auf I

// Bew:Aus D4.4.3 glm Stetigkeit (x'... ε... δ)

//Bem:(..)Falls I kompakt und stetig $\underset{S4.4.7}{\Rightarrow}$ f(I) kompakt, also beschränkt

●● Vor(.) $\underset{\phi\ diffb}{\overset{S5.1.2}{\Rightarrow}}$ F stetig auf [a,b] $\underset{[a,b]\ kompakt}{\overset{S4.4.8}{\Rightarrow}}$

F gleichmäßig stetig auf [a,b] $\underset{S4.4.10\ Bem(..)}{\Rightarrow}$ F beschränkt d.h.

$F(x)\le c\in\mathbb{R}_+$ ∀ x∈[a,b] ⇒ $F(x_k^{(n)})-(F(x_l^{(n)}) \underbrace{\neq}_{|\phi|\le c} \underbrace{\infty-\infty}_{\text{wäre nicht definert}}$ ∀ $x_k^{(n)}, x_l^{(n)}$ ∈[a,b]

(wichtig für (●●●)

// **D0.2.3**(105) 1.)...f: ∀ x∈X: ∃ genau ein ($\exists_1$) y∈Y mit (x,y)∈f

●●● In $(F(x_k^{(n)})-F(x_{k-1}^{(n)}))+(F(x_{k+1}^{(n)})-F(x_k^{(n)}))+(F(x_{k+2}^{(n)})-F(x_{k+1}^{(n)}))...$ beachte

$F(x_k^{(n)}) \quad +F(x_{k+1}^{(n)})-(F(x_k^{(n)}) \quad -F(x_{k+1}^{(n)})...=0$

weil $F(x_k^{(n)})$ eindeutig $\underbrace{da}_{D0.2.3}$ F Funktion ist.

(●),(●●) ⇒

//**S1.7.1**(901) m≤n∈$\mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_k\in\mathbb{C}$, m≤k≤n.

// $\sum_{k=m,n\ge m}^{n}(a_k-a_{k+1})=(a_m-a_{m+1})+(a_{m+1}-a_{m+2})+...(a_n-a_{n+1})=a_m-a_{n+1}$

●●●● $F(b)-F(a) \underset{S1.7.1}{=} (F(x_1^{(n)})-F(\underbrace{x_0^{(n)}}_{=a}))+(F(x_2^{(n)})-F(x_1^{(n)}))+...+(F(\underbrace{x_{p_k}^{(n)}}_{=b})-F(x_{p_K-1}^{(n)}))$

$=\sum_{k=1}^{p_K} F(x_k^{(n)})-F(x_{k-1}^{(n)})$

// **S5.2.3**(2803) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

// Vor:a<b, f:[a,b]→$\mathbb{R}$ sei stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a,b)

// Beh: ∃ mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$ .. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

●●●●● $F(b)-F(a) \underset{S1.7.1}{=} \sum_{k=1}^{p_K} F(x_k^{(n)})-F(x_{k-1}^{(n)}) \underset{S5.2.3}{\overset{Vor(.),\,••}{=}} \sum_{k=1}^{p_K} F'(\xi_k^{(n)})(x_K^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})$ mit $\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$

//**S6.2.1**(3205) $f:I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $a\le b$, ● stetig oder ●● monoton ist
// Riemann-integrierbar

●●●●●● Vor (..)F′ stetig auf [a,b] $\underset{*\phi' stetig}{\overset{S6.2.1}{\Rightarrow}}$ F′ R-integrierbar)

*//**S4.4.9**(2565)//*
//Vor:$M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ & M beschränkt, $f:M\to\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig auf M.//
//Beh:f(M) ist beschränkt, d.h. |f| ist auf M beschränkt//
// Zusatz: f läßt sich eindeutig stetig und gleichmäßig stetig von M//
// auf $\overline{M}$ (kompakt) fortsetzen. Damit ist f auf M beschränkt.//

//Bem:(..)Falls I kompakt und stetig $\underset{S4.4.8}{\Rightarrow}$ f(I) kompakt, also beschränkt//

//b)Vor: ● $I=[a,b]$, $a<b$, $f: I\to \mathbb{R}$, $|f(x)|\le K \ \forall\ x\in I$

// ●● Eine (die n-te) von allen ZNF: $(Z_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|Z_k^{(n)}| \underset{k\to\infty}{\to} 0 \ \forall\ n$

// ●●● $\xi_k^{(n)}=\{\xi_1^{(n)},\ldots\xi_{p_k^{(n)}}^{(n)}\}$ Zwischenpunkte einer Zerlegung $Z_k^{(n)}$ nach ●●, d.h.

// $\xi_\ell^{(n)} \in I_\ell^{(n)} \ \forall\ l=1,\ldots p_k^{(n)}$, d.h der l– te Zwischenpunkt von p_k
// Zwischenpunkten einer Zerlegung $Z_k^{(n)}$

// ●●●● $\sigma(Z_k^{(n)},\xi_k^{(n)},f)=\sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{l-1},x_l)$

//Aussage:
// f über I Riemann-integrierbar ⇔

// $\sigma(Z_k^{(n)}),\xi_k^{(n)},f)=\sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)}-x_\ell^{(n)})$ konvergiert ∀ n

// und es gilt $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{p_k^{(n)}} f(\xi_\ell^{(n)})(x_{\ell-1}^{(n)}-x_\ell^{(n)})=\int_a^b f(x)dx$ (wenn $|Z_k^{(n)}| \underset{k\to\infty}{\to} 0 \ \forall\ n$)

●●●●●●● $F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{p_K} F'(\xi_k^{(n)})(x_K^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})$ mit $\xi_k^{(n)}\in[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$

$\underset{n\to\infty,|Z_n|\to 0\ \forall n}{\underbrace{\overbrace{S6.1.6 \to}^{••••••,|f(x)|\le K}}} \int_a^b F'(x)dx$

//**S6.2.1**(3205) f:I=[a,b]→ $\mathbb{R}$, a≤b, ● stetig oder ●● monoton ist
// Riemann-integrierbar

b) Vor: ● I=[a,b], ●● f(t): I→ $\mathbb{R}$ stetig (S6.2.1: f(t) integrierbar),

●●● c,x∈I beliebig, ●●●● $F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$

Aussage:

F(x) ist differenzierbar & F′(x)=f(x) ∀ x∈I

Bew:

//**S6.2.4**(3207)//

//Bem: Für a<b setzen wir $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ und $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$//

Sei $x_0\in[a,b]$ fest, $x\neq x_0$: $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \underset{Vor \bullet\bullet\bullet\bullet}{=} \frac{1}{x-x_0}\left[\int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt\right]$

$$\underset{Bem\ zu\ S6.2.4}{=} \frac{1}{x-x_0}\left[\int_c^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^c f(t)\,dt\right] = \frac{1}{x-x_0}\left[\int_{x_0}^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

//**S4.3.1**(2403)Folgenstetigkeit
// Genau dann ist f=D→ $\mathbb{K}$ stetig in $z_0\in D$, wenn für jede Folge
// (z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ auch $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(z_0)$ gilt.

//**S6.2.1**(3205) f:I=[a,b]→ $\mathbb{R}$, a≤b, ● stetig oder ●● monoton ist
// Riemann-integrierbar

//**S6.2.5**(3208) Vor: f:[a,b]→$\mathbb{R}$ stetig und integrierbar//

//Aussage: ∃ ξ∈[a,b]: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$//

Sei (x_n) beliebige Folge $x_n\neq x_0$ ∀ n und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\underbrace{\overset{Vor\ \bullet\bullet,\ S4.3.1}{\Rightarrow}}_{S6.2.1, S6.2.5}$

∀ n ∃ ξ_n zwischen x_n und x_0: $\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = f(\xi_n)(x_n-x_0)$ $\underset{x_n\neq x}{\Rightarrow}$

$$\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{1}{x_n-x_0}\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = f(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0) \text{ da}$$

*//**D5.1.1** 1.)● Vor: M⊂$\mathbb{C}$, $z_0\in\overset{\circ}{M}$, f: M→$\mathbb{C}$ gegeben.*

//Aussage: (.) Die Funktion f heißt differenzierbar in z_0:⇔

// $\exists \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ (s.D4.2.1)

$f(\xi_n) \underbrace{\to}_{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0} f(x_0)$ und f stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{D5.1.1} \lim\limits_{x_n\to x_0} \dfrac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = F'(x_0) = f(x_0)$

D6.3.1(3303) Sei $I\subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und sei $f: I\to \mathbb{R}$. Falls eine auf I differenzierbare Funktion F existiert mit der Eigenschaft $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in I$, dann nennen wir F eine Stammfunktion zu f. Wir schreiben in diesem Fall auch $F(x)=\int f(x)dx$ und nennen das rechtsstehende Symbol auch unbestimmtes Integral von f.

Notation(3301): $g\in \underbrace{C}_{continous}(I) \Leftrightarrow g: I\to \mathbb{R}$ ist stetig

$g\in \underbrace{C^k}_{k\in N}(I) \Leftrightarrow g: I\to \mathbb{R}$ ist k mal stetig differenzierbar

//**S6.2.1**(3205) $f: I=[a,b]\to \mathbb{R}$, $a\le b$, • stetig oder •• monoton ist
// Riemann-integrierbar

S6.3.1 (3303)Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
a) Vor: $\phi\in C^1(I)$ ist eine beliebige Stammfunktion von $f\in C(I)$
(d.h. $\phi'(x)$ ist stetig $\underbrace{\Rightarrow}_{S6.2.1}$ $\phi'(x)=f(x)$ ist integrierbar)

Aussage: $\int\limits_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)=:[\phi(x)]_a^b=:\phi(x)|_a^b$ siehe auch Seite 3300

Es ist ja möglich, dass mehrere Stammfunktionen zu f gibt
//**S5.2.5**(2804) Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar $\forall\ x\in(a,b)$.//
//2.)f konstant auf I $\Leftrightarrow$ $f'=0$ auf (a,b).//

Bew:Sei $F(x):=\int\limits_a^x f(t)dt \underbrace{\Rightarrow}_{\cdot}$ $F\subset C^1(I)$, F ist Stammfunktion von f.

Sei $\phi\in C^1(I)$ (d.h: $\phi'(x) \underbrace{=}_{D6.3.1} f(x)\ \forall\ x\in I$)eine bel Stammfunktion von f

$\Rightarrow(\phi-F)'(x) \underbrace{=}_{S5.1.61.)} \phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0\ \forall\ x\in I \underbrace{\Rightarrow}_{S5.2.5} \phi-F$ ist konstant, d.h.

$\exists\ c\in\mathbb{R}: \phi(x)-F(x)=c\ \forall\ x\in I \underbrace{\Rightarrow}_{x=a} c=\phi(a)-\underbrace{F(a)}_{=0}=\phi(a)-\int\limits_a^a f(t)dt=\phi(a) \Rightarrow$

$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)=\phi(b)-c=\phi(b)-\phi(a)$

//***S5.1.6*** *(2750)Differentiationsregeln*
//1.)Vor:Seien f,g: $M\to C$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{M}$.
//Beh:a) $f\pm g$ sind differenzierbar in z_0 und $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$.

//**D5.1.1** *(2700)*

//3.) $f:M\to\mathbb{C}$ heißt auf offenem $D\subset M\subset\mathbb{C}$ n-mal stetig differenzierbar:$\Leftrightarrow$

// $\exists\ f^{(n)}(z)\ \forall\ z\in D$ und $f^{(n)}(z)$ ist stetig auf D (wobei in $\mathbb{R}$ in

// Intervallendpunkten $f^{(n)}(x):=f_{+}^{(n)}(x)$ bzw. $f^{(n)}(x):=f_{-}^{(n)}(x)$ sei)

b) Vor: $I=[a,b]$, $f: I\to\mathbb{R}$ stetig und $c\in I$ beliebig, $F(x):=\int_c^x f(t)dt$, $x\in I$

Aussage:

F(x) ist stetig differenzierbare Stammfunktion F von f auf I; d.h:

Jede stetige Funktion $f: I\to\mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion

//**S6.2.4**(3207)//

//Bem: Für $a<b$ setzen wir $\int_a^a f(x)dx=0$ und $\int_b^a f(x)dx:=-\int_a^b f(x)dx$//

// Dann gilt (6.2.9) für beliebige $a,b,c\in\mathbb{R}$.//

//**S6.2.5**(3208) Vor: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und integriebar//

//Aussage: $\exists\ \xi\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$//

//**S4.3.3**(2409)Folgenstetigkeit

// Genau dann ist $f=D\to\mathbb{C}$ stetig in $z_0\in D$, wenn für jede Folge

// (z_n) in D mit $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ auch $f(z_n)\underset{n\to\infty}{\to} f(z_0)$ gilt

Bew: Sei $x_0\in[a,b]$ fest, $x\neq x_0$: $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{1}{x-x_0}\left[\int_c^x f(t)dt-\int_c^{x_0} f(t)dt\right]$

$$\underset{Bem\ zu\ S6.2.4}{=}$$

$$\frac{1}{x-x_0}\left[\int_c^x f(t)dt+\int_{x_0}^c f(t)dt\right]=\frac{1}{x-x_0}\left[\int_{x_0}^c f(t)dt+\int_c^x f(t)dt\right]\Rightarrow$$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt$$

Sei (x_n) beliebige Folge $x_n\neq x_0\ \forall\ n$ und $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0 \underset{S6.2.5}{\Rightarrow}$

$\forall\ n\ \exists\ \xi_n$ zwischen x_n und x_0: $\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt=f(\xi_n)(x_n-x_0)\Rightarrow$

$$\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0}=\frac{1}{x_n-x_0}\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt=f(\xi_n)\underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)\ \text{da}$$

$f(\xi_n)\underset{x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x_0}{\to} f(x_0)$ und f stetig $\underset{D5.1.1}{\Rightarrow} F'(x_0)=f(x_0)$

*//**D5.1.1** 1.)● Vor: $M\subset\mathbb{C}$, $z_0\in\overset{\circ}{M}$, $f: M\to\mathbb{C}$ gegeben.*

//Aussage: (.) Die Funktion f heißt differenzierbar in z_0:⇔

// $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ (s.D4.2.1)

// und dann heißt der Grenzwert $f'(z_0) \in M$ die Ableitung von

// $f(z)$ in $z=z_0$ (oder an der Stelle z_0).

Andere Formulierung:

Sei f auf [a,b] stetig und sei $x_0 \in [a,b]$. Dann ist durch

$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \ \forall x \in [a,b]$ eine Stammfunktion zu f definiert.

Andere Formulierung:

//**D5.1.1** *(2700)*

//1.)● Vor: $M \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \overset{\circ}{M}$, $f: M \to \mathbb{C}$ gegeben.

//Aussage: (.) f heißt differenzierbar in z_0:⇔

// $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ (s.D4.2.1) und dann heißt der

// Grenzwert $f'(z_0) \in M$ die Ableitung von $f(z)$ in $z=z_0$

Vor: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig (d.h. nach S6.2.1 integrierbar) und $F(x) := \int\limits_{a}^{x}$

$f(t)dt$

Aussage: F ist in [a,b] differenzierbar und $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$

//**S6.2.5**(3208) Vor: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und integriebar

//Aussage: $\exists \xi \in [a,b]: \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Bew: S6.2.5 ⇒ $\exists \xi \in [x,x+h]$ (bzw $\xi \in [x+h,x]$, falss $h<0$):

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt = f(\xi) * h \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x)$$

S6.3.2(3307) Ist F auf einem Intervall I Stammfunktion zu f und ist $c \in \mathbb{R}$, so ist auch F+c eine Stammfunktion zu f. Umgekehrt, sind F_1 und F_2 2 Stammfunktionen zu f auf I, so ist $F_2 - F_1$ konstant.

//**S5.2.5**(2804) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar $\forall x \in (a,b)$.//

// Dann gilt:a) $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f(x) \equiv const$//

Bew: Argument in S6.3.1 b) zeigt: F_1, F_2 Stammfunktion von f ⇒

$\exists c \in \mathbb{R}$: $F_1(x) = F_2(x) + c \ \forall x \in I$ # da #

$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) \underset{S5.2.5}{=} c$

Bem: Ist $\phi: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$ so schreibt man auch $\int f(x)dx = \phi(x) + c$, wobei der Ausdruck links unbestimmtes Integral von f heißt.

Bsp 6.3.1

● In $I \subset \mathbb{R}$, $x \in I$ gilt $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $s \neq -1$: $\int x^s = \frac{1}{s+1} x^{s+1} + c$.

Dabei ist $I = \begin{cases} R : s \in N \cup \{0\} \\ (0,\infty)\ oder\ (-\infty,0) : s = -2, -3, \ldots \\ (0,\infty) : sonst \end{cases}$

z.B. $\int_{-2}^{-1} x^{-2}dx = [-x^{-1}]_{-2}^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

● ● $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, $I = (0,\infty)$ oder $I = (-\infty, 0)$, denn

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0 \\ (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x},\ x < 0 \end{cases}$$

z.B: $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = 0 - \ln 2 = -\ln 2$

● ● ● $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$, $\alpha \neq 0$, $I = \mathbb{R}$.

//S5.1.6 *2.) Vor:Sei $f: A \to B$ differenzierbar in $z_0 \in \overset{\circ}{A}$*

// $f(z_0) \in \overset{\circ}{B}$

// $g: B \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.

// Beh: $g \circ f: A \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und

// $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

● ● ● ● $\int a^x dx = \int e^{\ln a^x} dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$, $a > 0$, $I = \mathbb{R}$, da

$$\left(\frac{1}{\ln a} a^x + c\right)' = \frac{1}{\ln a}\left(e^{\ln a^x}\right)' = \frac{1}{\ln a}\left(e^{\ln a^x}\right)' = \frac{1}{\ln a}\left(e^{x * \ln a}\right)' \underset{S5.1.6\,2.)}{=} \frac{1}{\ln a} e^{x * \ln a}$$

$* (\ln(a) * 1) = e^{\ln a^x}$

● ● ● ● ● $\int \cos x dx = \sin x + c$, $\int \sin x dx = -\cos x + c$,

● ● ● ● ● ● $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$, $\cos x \neq 0$ in I

● ● ● ● ● ● ● $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$, $I = \mathbb{R}$.

● ● ● ● ● ● ● ● $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$, $I = (-1, 1)$

A6.3.1 Finde die Stammfunktionen zu den Funktionen jeweils für x auf dem

natürlichen Definitionsbereich(in $\mathbb{R}$)
cos x, Lös: -sin x,
x^2+1, Lös: $\frac{1}{3}x^3$,
$1/\cos^2 x$, Lös:tan x
1/x, Lös:log|x|

A6.3.2 Berechne die Integrale $\int_0^1 (x^2+1)dx$ und $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

A6.3.3 Zeige durch Induktion über n: Ist f auf einem Intervall I n-mal differenzierbar und ist die n-te Ableitung von f die Nullfunktion, so ist f ein Polynom vom Grade höchstens gleich n-1: #Polynom hat die Form $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-x_0)^k$

*//**S5.1.3**(2706)*
// 1.)Ist c∈$\mathbb{K}$ und ist f(z)=c ∀ z∈$\mathbb{K}$, so ist f in jedem Punkt z∈$\mathbb{K}$
//   differenzierbar und f'(z)=0 für alle diese z.

#Lös: k=1: $f'=0 \Rightarrow f \underbrace{=}_{S5.1.3} a_0=\sum_{k=0}^{0} a_k(x-x_0)^k$

k=2: $f^{(2)}=0 \Rightarrow f^{(1)}=a_1 \Rightarrow f \underbrace{=}_{f'=a_1} a_0+a_1(x-x_0)=\sum_{k=0}^{1} a_k(x-x_0)^k$

k=3: $f^{(3)}=0 \Rightarrow f^{(2)}=a_2' \Rightarrow f^{(1)} \underbrace{=}_{f^{(2)}=a_2'=2a_2} a_1+ \underbrace{a_2'}_{=2a_2}(x-x_0) \Rightarrow$

$f=\sum_{k=0}^{2} a_k(x-x_0)^k=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2$ da

$(a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2)'=0+a_1(x-x_0)^{1-1}*1+2*a_2(x-x_0)^{2-1}*1=$

$a_1+\underbrace{2a_2}_{=a_2'}(x-x_0)$

#IH k=n: $f^{(n)}=0 \Rightarrow f=\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-x_0)^k$

k=n+1: $f^{(n+1)}=0 \Rightarrow f^{(n)}=\tilde{a}_n \Rightarrow$

$[\tilde{a}_n(x-x_0)^n)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-x_0)^k]^{(n)} \underbrace{=}_{IH} \underbrace{\tilde{a}_n}_{=n!*a_n}+0 \Rightarrow f=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$