6.4(3400) **Weitere Ergebnisse**

S6.4.1 (3400) Partielle Integration
Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{F'(x)} G(x)\,dx = F(x)G(x)\,|_a^b - \int_a^b F(x) \underbrace{g(x)}_{G'(x)}\,dx.$$

//**D6.3.1**(3303) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$. Falls
//   eine auf I differenzierbare Funktion F existiert mit der
//   Eigenschaft $F'(x)=f(x) \ \forall\ x \in I$, dann nennen wir
//   F eine Stammfunktion zu f. Wir schreiben in diesem Fall auch
// $F(x)=\int f(x)dx$ und nennen das rechtsstehende Symbol auch
//   unbestimmtes Integral von f.

*//**S5.1.2**(2705) Ist eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ in einem Punkt x_0*
//differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

//**S6.2.1**(3205) $f: I=[a,b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, ● stetig oder ●● monoton ist
//   Riemann-integrierbar

//**S6.2.2** (3204)
//Vor: $f,g \in R(I)$
//Aussagen:
//● Sind f und g über [a,b] integrierbar, so gilt dasselbe auch für fg.
//●● Zusätzliche Vor: $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g \in R(I)$
// Aussage: $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha \int_a^b (f(x)dx + \beta \int_a^b g(x))dx$

//**S6.3.1** (3303)Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
//a) Vor: $\phi \in C^1(I)$ ist eine beliebige Stammfunktion von $f \in C(I)$
//   (d.h. $\phi'(x)$ ist stetig $\underset{S6.2.1}{\Rightarrow}$ $\phi'(x)=f(x)$ ist integrierbar)

//Aussage: $\int_a^b f(x)dx = \phi(b)-\phi(a) =: [\phi(x)]_a^b =: \phi(x)\,|_a^b$

//b) Vor: $I=[a,b]$, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in I$ beliebig, $F(x) := \int_c^x f(t)dt$, $x \in I$

//Aussage:
//F(x) ist stetig differenzierbare Stammfunktion F von f auf I; d.h:
// Jede stetige Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion

Bew: F,G Stammfunktionen $\underset{D6.3.1}{\Rightarrow}$ F,G differenzierbar $\underset{S5.1.2}{\Rightarrow}$ F,G stetig $\underset{S6.2.1}{\Rightarrow}$

F,G integrierbar $\overset{S6.2.2}{\underset{Vor:\,f,g\ integrierb}{\Rightarrow}}$ fG und Fg integrierbar ⇒

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=(F(x)G(x))'$ integrierbar

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{F'(x)} G(x)\,dx = F(x)G(x)\,|_a^b - \int_a^b F(x) \underbrace{g(x)}_{G'(x)}\,dx.$$

$F(x)G(x)\,|_a^b = \int_a^b (f(x)G(x)+F(x)g(x))dx.$

Andere Formulierung der Vor aus Wikipedia:

Vor: [a,b] Intervall; $F,G:[a,b]\to \mathbb{R}$;

F,G stetig differenzierbare Funktionen auf [a,b]

Bsp:1.) $\int_0^1 \underbrace{x}_{G(x)} * \underbrace{e^x}_{=f(x)=F'(x)=F(x)} dx = \underbrace{x}_{G(x)} \underbrace{e^x}_{=F(x)} |_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{=g(x)=G'(x)} \underbrace{e^x}_{=F(x)} dx = xe^x|_0^1 - e^x|_0^1 \ldots$ ohne

Grenzen… $(x-1)e^x$.

2.) $\int \underbrace{\sin(x)}_{=G(x)} \underbrace{e^x}_{=f(x)=F'(x)=F(x)} dx = \underbrace{\sin(x)}_{=G(x)} * \underbrace{e^x}_{=f(x)=F'(x)=F(x)} - \int \underbrace{\cos(x)}_{=g(x)=G'(x)} * \underbrace{e^x}_{=F(x)} dx =$

$\sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx \Rightarrow$

$2\int \sin x e^x dx = (\sin x - \cos x)e^x$.

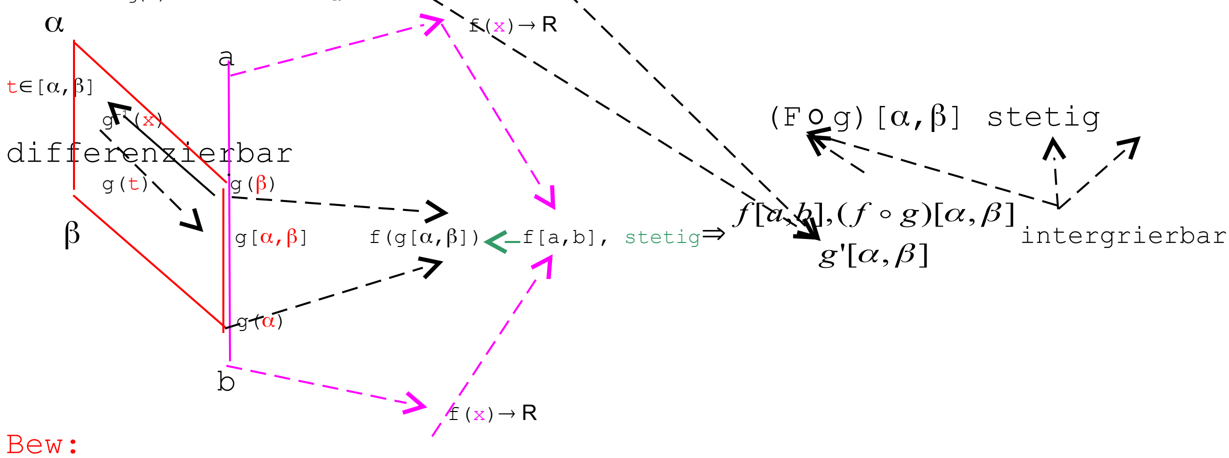
S6.4.2(3402) Substitutionsregel

Vor: ● f: [a,b]→ℝ stetig auf [a,b],

●● g: [α,β]→[a,b] (d.h. g[α,β]⊂[a,b])

●●● g: stetig differenzierbar auf [α,β]

Beh: $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt_{\,t=g^{-1}(x)}$



Bew:

//**S6.3.1 b)** (3304)

// Vor: I=[a,b], f: I→ℝ stetig und c∈I beliebig, $F(x):=\int_c^x f(t)dt$, x∈I

//Aussage: F(x) ist stetig differenzierbare Stammfunktion F von f auf I;

// d.h: Jede stetige Funktion f: I→ℝ besitzt eine Stammfunktion

Vor ● f: [a,b]→ℝ stetig auf [a,b] $\underset{S6.3.1b)}{\Rightarrow}$

∃ stetig diffb Stammfunktion von f:

F'(t)=f(t) auf [a,b]

Vor ●● g: [α,β]→[a,b] ⇒ g[α,β]⊂[a,b]

∃ stetig diffbare Stammfunktion von f:

F'(t)=f(t) auf g[α,β]⊂[a,b],

Vor ●●● g: [α,β]→[a,b] stetig differenzierbar ∀ t∈[α,β] ⇒

//***S5.1.6 (2751)2.)***

//*Vor: Gegeben f:I→J und g:J→ℝ. f differenzierbar in x_0 und g in*

//*f(x_0)∈J*

//*Beh: g∘f: I→ℝ differenzierbar in x_0 und es gilt*

// *(g∘f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)*

Zum leichteren Lesen von Bew S6.4.2, S5.1.6 mit Buchstaben in S6.4.2

//*Vor: Gegeben g:[α,β]→[a,b] und F:[a,b]→ℝ.*

// *g differenzierbar in t∈[α,β] und F in g(t)∈[a,b]*

//*Beh: F∘g: [α,β]→ℝ differenzierbar in x_0 und es gilt*

// *(F∘g)'(t)=F'(g(t))g'(t)*

//**S6.2.1**(3205) f:I=[a,b]→ℝ, a≤b, ● stetig oder ●● monoton ist

// Riemann-integrierbar

$\underset{S5.1.6\,2.)}{\Rightarrow}$ F∘g :[α,β]→ℝ stetig differenzierbar in [α,β] und es gilt

(F∘g)'(t) $\underset{S5.1.6\,2.)}{=}$ F'(g(t))g'(t) $\overset{S6.2.1}{\underset{(F\circ g)'\,stetig}{\Rightarrow}}$ (F∘g)'(t) integrierbar

//**D6.3.1**(3302) Sei I⊂ℝ ein beliebiges Intervall und sei f:I→ℝ. Falls

// eine auf I differenzierbare Funktion F existiert mit der

// Eigenschaft $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in I$, dann nennen wir
// F eine Stammfunktion zu f. Wir schreiben in diesem Fall auch
// $F(x)=\int f(x)dx$ und nennen das rechtsstehende Symbol auch
// unbestimmtes Integral von f.

$$\underset{S6.3.1}{\Rightarrow} \int_\alpha^\beta (F\circ g)'(t)dt=\int_\alpha^\beta F'(g(t))g'(t)=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=$$

$$(F\circ g)\Big|_\alpha^\beta=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt_{,t=g^{-1}(x)}$$

$F(g(t))$ Stammfkt zu $f(g(t))$ auf $g(t)\in[\alpha,\beta]$

$\underset{D6.3.1}{\Rightarrow} F'(g(t))=f(g(t))\ \forall\ t\in g[\alpha,\beta]$

Bem:Schreibweisen $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\int_\alpha^\beta f(g(t))d(g(t))=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$

\# mit $g'(t)=\frac{d}{dt}(g(t)) \Rightarrow d(g(t)):=g'(t)dt$

$x=g(t) \Rightarrow t=g^{-1}(x$

$x=g(t) \Rightarrow d(g(t))/dx=1 \Rightarrow d(g(t))=dx$

Andere Formulierung:
Vor: Intervalle $I,J\subset \mathbb{R}$, $f: I\to \mathbb{R}$ stetig,
$\varphi: J\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(J)\subset I$

Aussage: Für $a,b\in J$: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

Kurzschreibweise: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\varphi'(t)$, „$dx=\varphi'(t)dt$"

*//**S5.1.6** (2750)2.)Kettenregel//*
// Vor: Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in \overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in \overset{\circ}{B}$, und sei //
// $g:B\to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh: $g\circ f:A\to \mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$
// (Kettenregel) $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$.//
//**S6.3.1** (3303)Hauptsatz der Differential und Integralrechnung//
//Vor: $I=[a,b]$, $f: I\to \mathbb{R}$ stetig und $c\in I$ beliebig//

//Aussage: ● $F(x):=\int_c^x f(t)dt$, $x\in I$//
// ist stetig differenzierbare Stammfunktion F von f auf I/
// Jede stetige Funktion $f: I\to\mathbb{R}$ besitzt also eine Stammfunktion
// ● ● $\phi\in C^1(I)$ eine beliebige Stammfunktion von $f\in C(I)$ ⇒//
// $\int_a^a f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)=:[\phi(x)]_a^b=:\phi(x)|_a^b$ //

Bew: Sei $F: I\to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f $\underset{S5.1.6}{\Rightarrow}$
$(F\circ\varphi)'(t)=F'(t)*\varphi'(t)=f(\varphi(t))*\varphi'(t)$ ⇒
$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)=\int_a^b (F\circ\varphi)'(t)dt \underset{S6.3.1}{=} (F\circ\varphi)(b)-(F\circ\varphi)(a)=F(\varphi(b))-F(\varphi(a))$

$$\underset{S6.3.1}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Bsp:● Bestimme Stammfunktion zu $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Lös: Substitution $t=g^{-1}(x)=e^x \Leftrightarrow x=g(t)=\log t$, $\frac{dx}{dt}=g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow dx=\frac{1}{t}dt$

$$F(x)=\int \frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}}dx=\int \underbrace{\frac{t+1}{t+t^{-1}}}_{f(g(t))}\underbrace{\frac{1}{t}}_{g'(t)}dt=\int \frac{t+1}{t^2+1}dt=$$
$$1/2\int \frac{2t}{t^2+1}dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\log(t^2+1)+\arctan t=$$
$$\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)+\arctan e^x.$$

$F(x)=\int_{g(\alpha)=0}^{g(\beta)=1}\frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{g^{-1}(g(\alpha)=\alpha}^{g^{-1}(g(\beta))=\beta}\frac{t+1}{t^2+1}dt=\int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(1)}\frac{t+1}{t^2+1}dt=\int_{e^0=1}^{e^1=e}\frac{t+1}{t^2+1}dt=\ldots$

//**S6.4.2**(3402) Substitutionsregel

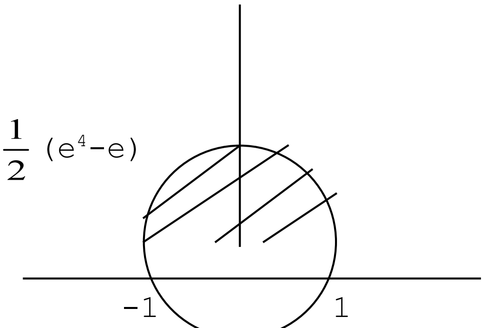
//Vor: • $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$,
// •• $g: [\alpha,\beta]\to[a,b]$ (d.h. $g[\alpha,\beta]\subset[a,b]$)
// ••• g: stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$

//Beh: $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$

•• $\int_1^2 t e^{t^2} dt$; $x=t^2=g(t)$, $dx=2tdt \Rightarrow$

$\int_1^2 t e^{t^2} dt=\frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{2t}_{g'(t)} e^{t^2} \underset{S6.4.2}{=} \frac{1}{2}\int_1^4 e^x dx=\frac{1}{2}[e^x]_1^4=\frac{1}{2}(e^4-e)$

$\sqrt{1-x^2}$



••• $\int \sqrt{1-x^2}dx$; $x=\cos t$, $dx=-\sin tdt$

Sei $t\in[0,\pi]\ldots x\in[-1,1]$

$\int \sqrt{1-x^2}dx=\int \sqrt{1-\cos^2 t}*(-\sin t)dt=-\int \sin t^2 tdt=-\int \frac{1-\cos(2t)}{2}dt=$

$-\int (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2t))dt=-\frac{1}{2}t+\frac{\sin(2t)}{4}+c==-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t*\cos t+c$

$x=\cos t \Leftrightarrow t=\arccos x$, $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$

$\int \sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\arccos x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$ im $I=[-1,1]$...Probe!…z.B.:

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}=[-\frac{1}{2}\arccos x]_{-1}^{1}+[\underbrace{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}}_{0}]_{-1}^{1}=-(0-\pi)=\frac{\pi}{2}$

A6.4.1 Bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion:

a) $f(x)=x^\alpha$, $x>0$, $\alpha\neq-1$

Lös: $F(x)=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, $F'(x)=x^\alpha$

b) $f(x)=a^x$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$.

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//
//2.)Kettenregel//
// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{\circ}{A}$, $f(z_0)\in\overset{\circ}{B}$, und sei $g:B\to\mathbb{C}$ //
// differenzierbar in $f(z_0)$.//
// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

Lös: $F(x)=\frac{1}{\log a}a^x$, $F'(x)=\#(\frac{1}{\log a}a^x)'=(\frac{1}{\log a}e^{\log a^x})'=(\frac{1}{\log a}e^{x\log a})' \underset{S5.1.6}{=}$

$\frac{1}{\log a}(e^{x\log a})'1*\log a=e^{x\log a}=\#\ a^x$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

//**D4.4.3**(2536) Umkehrfnkt zu tan: arcctan: $\mathbb{R}\to(0,\pi]$
//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//
//1.)Vor:Seien f,g: $M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in \overset{o}{M}$ .//
//Andere Formulierung für $\mathbb{R}$://
// Die Funktionen f und $g:I\to\mathbb{R}$ seien differenzierbar in $x_0\in I$//
//Beh:d)Ist $g(z_0)\neq 0$ (und damit $\neq 0$ in $U_\delta(z_0)\subset M$... $\Rightarrow$ //
// $\exists\ g(z)\neq 0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$), g differenzierbar, d.h. stetig, so ist f/g
// differenzierbar in z_0 und //
// $(f/g)'(z_0)=\dfrac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//
//3.)Ableitung der Umkehrfunktion//
// Vor:Sei $A,B\subset\mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in //
// $x_0\in\overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in\overset{o}{B}$ //
//Beh:f^{-1} ist differenzierbar in $y_0\Leftrightarrow f^{-1}$ ist stetig in y_0 und //
// $f'(x_0)\neq 0$ und dann gilt//
// $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$ .//
//**S5.1.5**(2710)Die Expotentialfunktion, die trigonometrischen und die//
// hyperbolischen Funktionen sind auf $\mathbb{C}$ differenzierbar und es//
// gilt $(e^z)'=e^z$, $\sin(z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$, //

Lös:$x=\tan y\Rightarrow y=F(x)=\arctan x=G^{-1}(x)$, $G(y)=G(G^{-1}(x))=x=\tan y$,
$(G^{-1}(x)=\arctan(\tan y)=y=F(x))$

$$G'(y)=\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)' \underset{S5.1.6\ 1.d),S5.1.5}{=} \frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=\frac{1}{\cos^2 y}$$

$$F'(x)=(G^{-1}(x))' \underset{S5.1.6\ 3.)}{=} \frac{1}{G'(y)}=\frac{1}{\tan' y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}=$$

$$\frac{1}{1+(\tan y)^2}=$$

$$\frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

jedoch $\cos y\neq 0\Rightarrow \cos(\arctan x)\neq 0\Rightarrow \arctan x\neq\pi/2+k\pi$

d) $f(x)=x^5\cos(x^3)$, $x\in\mathbb{R}$.

//**S6.4.1**(3400) Partielle Integration//
// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //
// Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//
// $\int_a^b f(x)G(x)dx=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.//

Lös: $\int_0^x t^5\cos(t^3)dt=1/3\int_0^x \underset{G}{t^3}*\underbrace{3t^2\cos(t^3)}_{F',F=\sin t^3}dt \underset{S6.4.1}{=}$

$1/3(t^3*\sin(t^3)\Big|_0^x-\int_0^x 3t^2\sin(t^3)dt)=1/3(t^3\sin(t)^3+\cos(t)^3\Big|_0^x=$

$1/3\,(x^3\sin(x)^3+\cos(x)^3-\underbrace{1}_{\cos 0^3})=\frac{1}{3}x^3\sin(x^3)+\frac{1}{3}\cos(x^3)-\frac{1}{3}$

e) $f(x)=(\tan x)^2,\ |x|<\pi/2$

Lös: $F(x)=\int(\tan x)^2dx=\int\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)}dx=\int\frac{1-(\cos x)^2}{(\cos x)^2}dx=\int\frac{1}{(\cos x)^2}dx-\int 1dx=$

$\tan x-x$

A6.4.2 Geg. Polynom $P(x)$ mit $P(-x)=-P(x)$.

Zeige: $\exists$ ein Polynom $Q(x)$ mit $Q(-x)=Q(x)$, so dass $Q(x)e^{(x^2)}$

Stammfunktion zu $P(x)e^{(x^2)}$ ist.

//**S6.4.1**(3400) Partielle Integration//

// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //

// Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//

// $\int_a^b f(x)G(x)dx=F(x)G(x)\big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.//

Lös: Beispiel für $P(x)$: $a_1x+a_3x^3$

$P(-x)$: $a_1(-x)+a_3(-x)^3=-(a_1x+a_3x^3)=-P(x)=a_1(-1)^1x+a_3(-1)^3x^3$

Sei $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ und $P(-x)=-P(x)$ d.h. $\sum_{k=0}^{n}a_k(-1)^kx^k=\sum_{k=0}^{n}-a_kx^k$

Keffizientenvergleich: $a_k(-1)^k=-a_k\Rightarrow a_k=0\ \forall\ k=2j$

P Nullpolynom=Q Nullpolynom

$\gamma(P)=0$: $P(x)=c,\ P(-x)\neq-P(x)$

$\gamma(P)=1$: $P(x)=a_1x,\ P(-x)=-P(x),\ P(x)e^{(x^2)}=a_1xe^{(x^2)}$,

$$\int a_1xe^{(x^2)}dx=a_1/2\int 2a_1xe^{(x^2)}dx\underset{u=x^2}{=}\frac{a_1}{2}e^{(x^2)}\Rightarrow$$

$Q(x)=\frac{a_1}{2},\ Q(-x)=-Q(x)$

$\gamma(P)>1$: Induktion über $n:=\gamma(P)$

Ann:Beh $\forall\ \gamma(P)=k<n$, Sei $\gamma(P)=n$

$$\int P(x)e^{(x^2)}dx=\int\underbrace{\frac{P(x)}{2x}}_{G(x)}\underbrace{2xe^{(x^2)}}_{f(x)}dx=(\underbrace{\frac{P(x)}{2x}}_{G(x)}-\int\underbrace{\frac{P'(x)2x-2P(x)}{4x^2}}_{P_\ell}dx)\underbrace{e^{(x^2)}}_{F(x)}$$

$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ P'(x)=\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$

$\tilde{Q}(-x)=\frac{P(-x)}{2(-x)}=\frac{-P(x)}{-2x}=\frac{P(x)}{2x}=\tilde{Q}(x)$

$\gamma(P)=n\Rightarrow\gamma(P')=n-1\Rightarrow\gamma(P'(x))*x=n,\ \gamma(P_\ell)\leq n-2,\ P_\ell(-x)=-P_\ell(x)$:

$$\left.\begin{array}{r}(P(-x))'=P'(-x)(-1)\\(-P(x))'=-P'(x)\end{array}\right\}-P'(-x)=-P'(x)\Rightarrow P'(-x)=P'(x)\Rightarrow$$

$P_\ell(-x)=\frac{P'(-x)2(-x)-P(-x)2}{4(-x)^2}=-\frac{P'(x)2x-P(x)2}{4x^2}=-P_\ell(x)\ \&\ \gamma(P_\ell)\leq n-2$

$\underbrace{\Rightarrow}_{IH\ auf\ P_\ell}$

$\frac{P(x)}{2x}e^{(x^2)}-Q_\ell(x)e^{(x^2)}=(\frac{P(x)}{2x}-Q_\ell(x))e^{(x^2)}$

$P(x)e^{(x^2)}=(Q(x)e^{(x^2)})'=Q'(x)e^{(x^2)}+Q(x)2xe^{(x^2)}$

Koeffizientenvergleich

A6.4.3 Berechne die folgenden Integrale

a) $\int_0^{1/2} \arccos x dx$

//**S6.4.1**(3400) Partielle Integration//
//   Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //
//   Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//
// $\int_a^b f(x)G(x)dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx.$//

*//**S5.2.12** (2864)Trigonometrische Funktionen//*
//Vor:Sei $\pi/2 \in (1,2)$ die kleinste positive Nullstelle von cos x.
//Beh://4.)Bezeichnet arcsin y, $-1 \le y \le 1$, die Umkehrfunktion von //
//   sin x, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ und arccos y, $-1 \le y \le 1$, die//
//   Umkehrfunktion von cos x, $0 \le x \le \pi$, so gilt//
// $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ und $\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $-1 \le y \le 1$.//

Lös: $\int_0^{1/2} \underbrace{1}_{f(x)} \underbrace{\arccos x}_{G(x)} dx \underset{S5.2.12}{=} = \underbrace{x}_{F(x)} * \underbrace{\arccos x}_{G(x)} \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \underbrace{x}_{F(x)} \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}_{g(x)=G'(x)} dx =$

$X * \arccos x\Big|_0^{1/2} - 1/2 \int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

(Subst: $1-x^2=u$, $-2xdx=du$, $x=0 \Rightarrow u=1$, $x=1/2 \Rightarrow u=3/4$)

$x\arccos x\Big|_0^{1/2} - 1/2 \int_1^{3/4} \frac{1}{\sqrt{u}} du = x\arccos x\Big|_0^{1/2} - 1/2(2\sqrt{u})\Big|_1^{3/4} =$

$\frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\int_1^e \frac{1}{x}(\log x)^5 dx$

Lös:Substitution $u=\log x$, $du=\frac{1}{x}dx$, $x=1 \Rightarrow u=0$, $x=e \Rightarrow u=1$

$\ldots = \int_0^1 u^5 du = \frac{1}{6}u^6\Big|_0^1 = 1/6$

c) $\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \sin x \cos x dx$

Lös: $\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \underbrace{\sin x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} dx = \sin^2 x\Big|_{5\pi/4}^{3\pi/2} - \int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \cos x \sin x dx \Rightarrow$

$2\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{5\pi/4}^{3\pi/2} = 1/2((-1)^2 - (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}(1-2/4) = 1/4$

d) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 2ue^u du = 2ue^u\Big|_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 2ue^u\Big|_1^2 - 2e^u\Big|_1^2 = 4e^2 - 2e - (2e^2 - 2e) = 2e^2$

A6.4.4 Berechne die folgenden Integrale durch die angegebene Substitution

a) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx$, t=sin x

Lös: $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2$,

$x=0 \Rightarrow t=0$, $x=\pi/2 \Rightarrow t=1$

$\ldots=t+\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=1+1/2=3/2$

b) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3}dx$, x=sin t

Lös: $x=\sin t \Rightarrow t=\arcsin x$, $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

$x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1/2 \Rightarrow t=\pi/6$

$$\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}dt=\int\limits_0^{\pi/6} \tan^2 dt=\tan t-t\Big|_0^{\pi/6}=\tan\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$$

S6.4.3(3405) Integration von Ungleichungen

a) f,g über [a,b] integrierbar & $f(x)\leq g(x)\ \forall\ x\in[a,b] \Rightarrow$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Bew: Für jede Zerlegung von [a,b] und jede Wahl von Zwischenpunkten ist die Riemannsumme von f nicht größer als die von g. Daher folgt die Beh mit der Definition des Integrals.

b) f stetig auf [a,b] & $f(x)\geq 0\ \forall\ x\in[a,b]$ & $\int\limits_a^b f(x)dx=0 \Rightarrow$

$f(x)=0\ \forall\ x\in[a,b]$

Bew: Annahme $\exists\ f(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)\in[a,b] \Rightarrow \exists\ x_0\in(a,b):\ f(x_0)=y_0>0 \underset{f\ stetig}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$\exists\ \delta>0:\ f(x) \underset{!}{\underbrace{\geq}} y_0/2\ \forall\ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b] \underset{a)}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx\geq 2\delta y_0/2=\delta y_0>0,\quad \int\limits_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \underset{f(x)\geq 0}{\underbrace{\geq}} 0,\quad \int\limits_a^{x_0-\delta} f(x)dx \underset{f(x)\geq 0}{\underbrace{\geq}} 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx>0 \Rightarrow$$

Widerspruch zu $\int\limits_a^b f(x)dx=0$

K 6.4.1???? Vor:f,g∈R[a,b], konjungierte Indices $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, p,q>1

Aussage: $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{p}}$

● ● f,g∈R[a,b], p≥1

Aussage: $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

ohne Bew.
Zum Bew bemerkt man,
● dass mit f,g∈R[a,b] auch $|f(x)|^p$, $|g(x)|^p \in R[a,b]$
● ● im Falle der Existenz auch für uneigentliche Integrale

D6.4.1(3408) Sei f über [a,b] integrierbar(und a<b). Die Zahl

$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ heißt der Mittelwert von f über [a,b]

S6.4.4(3408) 1.) Mittelwertsatz der Integralrechnung
Sei f über [a,b] integrierbar und sei μ der Mittelwert von f über [a,b].
- ● Dann ist $\underline{M}=\inf\{f(x):a\le x\le b\}\le\mu\le\sup\{f(x):a\le x\le b\}=\overline{M}$.
- ● ● Falls f auf [a,b]stetig ist, existiert ein ξ∈[a,b] mit μ=f(ξ)

//**S6.4.3**(3402)Integration von Ungleichungen//
//a) f,g über [a,b] integrierbar & f(x) ≤g(x) ∀ x∈[a,b] ⇒

// $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

//b)Seien f stetig auf [a,b] und gelte f(x)≥0 ∀ x∈[a,b] sowie //

// $\int_a^b f(x)dx=0$. Dann folgt f(x)=0 ∀ x∈[a,b] //

Bew: $\underline{M}\le f(x)\le\overline{M} \underbrace{\Rightarrow}_{S6.4.3} \underline{M}=\inf\{f(x):a\le x\le b\}\le\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\sup\{f(x):a\le x\le b\}=\overline{M}$

*//**S4.4.1** (2500)Zwischenwertsatz (ZWS)//*
//Vor:Sei I⊂R ein Intervall ˅ f:I→R stetig auf I, a,b∈I, a<b.//
//Beh:1.) f(a)<y<f(b) : ∀ y ∃ mindestens ein x∈[a,b] mit f(x)=y.//

$\int_a^b \underline{M}\,dx \underbrace{\le}_{S6.4.3} \int_a^b f(x)dx \underbrace{\le}_{S6.4.3} \int_a^b \overline{M}\,dx \Rightarrow \underline{M}(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\overline{M}(b-a) \Rightarrow$

∃ μ: $\underline{M}\le\mu\le\overline{M}$ mit $\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a) \Rightarrow \mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ⇒ Beh ●

$\underbrace{\Rightarrow}_{f\ stetig,\ S4.4.1}$
∃ ξ∈[a,b]: f(ξ)=μ ⇒ Beh ● ●

S6.4.5(3409) Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Vor: g und fg über [a,b] integrierbar, $g(x)\geq 0$ oder $g(x)\leq 0\ \forall\ x\in[a,b]$.

Beh● $\exists\ \rho\in[\underline{M},\overline{M}]$ mit $\underline{M},\overline{M}$ wie im S6.4.4: $\int_a^b f(x)g(x)dx=\rho\int_a^b g(x)dx$.

Zusätzliche Vor: f stetig auf [a,b],

Beh● ● $\exists\ \xi\in[a,b]$ mit $f(\xi)=\rho$

Bew: ● $\underline{M}\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\overline{M}\int_a^b g(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

$\exists\ \mu\in[\underline{M},\overline{M}]$: $\underline{M}\int_a^b g(x)dx\leq\rho\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx)\ \leq\overline{M}\int_a^b g(x)dx \Rightarrow$

Beh. ● $\#\underset{\bullet\bullet\, f\ stetig,S4.4.1}{\underbrace{\Rightarrow}}\exists\ \xi\in[a,b]$: $f(\xi)=\rho\Rightarrow$ Beh ● ●

Andere Formulierung Bew:

//**S6.4.3**(3402)Integration von Ungleichungen//

//a) f,g über [a,b] integrierbar & $f(x)\leq g(x)\ \forall\ x\in[a,b] \Rightarrow$

// $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

Bew: $\underline{M}:\inf\{f(x):a\leq x\leq b\}$, $\overline{M}\leq\sup\{f(x):a\leq x\leq b\}$, $a<b$, $g\geq 0 \Rightarrow$

$\underline{M}*g(x)\leq f(x)g(x)\leq\overline{M}*g(x)$ (da $f>\underline{M}$ & $g\geq 0$)

$\underset{S6.4.3}{\underbrace{\Rightarrow}}\int_a^b \underline{M}g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\int_a^b \overline{M}g(x)dx \Rightarrow$

$\underline{M}\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq\overline{M}\int_a^b g(x)dx \Rightarrow\exists\ \rho=\frac{\int_a^b fgdx}{\int_a^b gdx}\in[\underline{M},\overline{M}]$ für $\int_a^b g(x)\neq 0$

$\Rightarrow$ (⊗) $\underline{M}\int_a^b g(x)dx\leq\rho\int_a^b g(x)dx\leq\overline{M}\int_a^b g(x)dx$

● ● *//**S4.4.1** (2500)Zwischenwertsatz (ZWS)//*

//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.//

//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $\xi\in[a,b]$ mit $f(\xi)=y$.//

f(x) stetig & (⊗) $\Rightarrow\underline{M}=\inf\{f(x):a\leq x\leq b\}\leq\rho\leq\sup\{f(x):a\leq x\leq b\}=\overline{M} \Rightarrow$

$\exists\ \xi\in[\underline{M},\overline{M}]$: $\rho=f(\xi)\Rightarrow\rho\int_a^b g(x)dx$

S6.4.6(3409) 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien f stetig differenzierbar und monoton, sowie g stetig auf [a,b]. Dann existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

*//**S4.4.1**(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)*
//Vor:Sei $I\subset R$ ein Intervall, $f:I\to R$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\, y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.
//**S6.4.5**(3409) Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung
// Vor: g und fg über [a,b] integrierbar, $g(x)\geq 0$ oder $g(x)\leq 0$ $\forall$ $x\in[a,b]$.

// Beh● $\exists\ \rho\in[\underline{M},\overline{M}]$ mit $\underline{M},\overline{M}$ wie im S6.4.4: $\int_a^b f(x)g(x)dx=\rho\int_a^b g(x)dx$.
// Zusätzliche Vor: f stetig auf [a,b],
// Beh● ● $\exists\ \xi\in[a,b]$ mit $f(\xi)=\rho$
*//**S6.4.1** (3400) Partielle Integration*
// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G Stammfunktionen
// zu f bzw g. Dann gilt

// $$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{F'(x)} G(x)\,dx=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\underbrace{g(x)}_{G'(x)}\,dx.$$

Bew:ObdA sei f wachsend, also $f'(x)\geq 0$. Sei G Stammfunktion von g, dann folgt mit partieller Integration

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)G(x)dx \underset{S6.4.5,S4.4.1}{\Rightarrow}$$

$$\exists\ \xi\in[a,b]:\int_a^b f'(x)G(x)dx=G(\xi)\int_a^b f'(x)dx=G(\xi)f(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(x)G(x)\Big|_a^b-G(\xi)f(x)\Big|_a^b=$$

$f(b)G(b)-f(a)G(a)-G(\xi)f(b)+G(\xi)f(a)=$
$f(a)G(\xi)-f(a)G(a)+f(b)G(b)-f(b)G(\xi)=f(a)(G(\xi)-f(a))+f(b)(G(b)-G(\xi))=$
$f(a)(G(x)|_a^\xi)+f(b)(G(x)|_\xi^b)=$

S6.4.7(3410) Gliedweise Integration

Gegeben $[a,b]\subset\mathbb{R}$, Funktionen $f_n,g_k:[a,b]\to\mathbb{K}$ $\forall\ n,k\in\mathbb{N}$

a) Vor.: (*) Alle f_n über $[a,b]$ integrierbar und

(**) Funktionenfolge (f_n) auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent gegen f

Beh: f integrierbar über $[a,b]$ und $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

//**S6.2.4** (3204) Riemannsches Integrabilitätskriterium//

// Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann über //

// $[a,b]$ integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Zerlegung //

// Z von $[a,b]$ gibt mit $O(Z)-U(Z)<\varepsilon$.//

//**D4.2.4** (2304)

//● Eine (reelle) Funktionenfolge ist eine Folge $f_1,f_2,\ldots$ von Funktionen

// f_i: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, Definitions (D)- und Zielmengen (Z) können auch andere

// Mengen sein, z.B. Intervalle, müssen jedoch für alle f_i dieselben

// sein: f: $D\times\mathbb{N}\to Z$, $(x,n)\mapsto f_n(x)$

//● ● Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion

// f: $X\to\mathbb{R}$, wenn gilt $\forall\ x\in X\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon,x)}\ \forall\ n>N_{(\varepsilon,x)}\ n_0$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

//● ● ● Funktionenfolge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf X gegen f:

// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon)}$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall\ x\in X\ \forall\ n>N_{(\varepsilon)}$

//*__D6.1.1__ (3100) $I=[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $f: I\to\mathbb{R}$.*

//**e)** $|f(x)|\le K\in\mathbb{R}_+\ \forall\ x\in[a,b]$:

// $m_k:=\inf(f(I_k))=\underbrace{\inf}_{x\in I_K} f(x)=\inf\{f(x):x\in I_k\}$, jeweils $k\in\{1,2,\ldots,n\}$

// Untersumme $\underline{S}(Z,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k|I_k|=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

Bew: ObdA $b-a>0$. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0$: $|f(x)-f_n(x)|\underbrace{\lneq}_{D4.2.4}\varepsilon/(b-a)\ \ \forall!\ x\in[a,b],\ n>n_0\Rightarrow$

\# Sei Z beliebige Zerlegung von $[a,b]$, $Z_k[x_k,x_{k+1}]$, $k\in\{0,1,\ldots\underbrace{|Z|}_{=n}\}\Rightarrow$

\# $\forall\ \tilde{\varepsilon}>0\ \exists\ N_{(\tilde{\varepsilon})}$: $|m_{f_k}-m_{f_{n_k}}|<\tilde{\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{b-a}\Rightarrow$

\# $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N_{(\varepsilon)}$: $|\underline{S}_f(Z)-\underline{S}_{f_n}(Z)|=|\sum_{k=1}^{n}(m_{f_k}-m_{f_{n_k}})(x_k-x_{k-1})|<|\sum_{k=1}^{n}\tilde{\varepsilon}(x_k-x_{k-1})|=$

\# $|\tilde{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})|=\tilde{\varepsilon}(b-a)<\varepsilon$, analog für $\overline{S}\Rightarrow$

$\forall$ Zerlegungen Z von $[a,b]$ gilt für die

Obersummen $O_f(Z), O_{f_n}(Z)$ und Untersummen $U_f(Z), U_{f_n}(Z)$ von f bzw f_n:

$|\underline{S}_f(Z)-\underline{S}_{f_n}(Z)|\underbrace{\lneq}_{D4.2.4}\varepsilon$, $|\overline{S}_f(Z)-\overline{S}_{f_n}(Z)|\underbrace{\lneq}_{D4.2.4}\varepsilon$.

Vor (*) f_n über $[a,b]$ integrierbar $\Rightarrow\exists$ Zerlegung Z: $O_{f_n}(Z)-U_{f_n}(Z)\underbrace{<}_{S6.2.4}\varepsilon$

$\Rightarrow\ O_f(Z)-U_f(Z)=O_f(Z)-O_{f_n}(Z)+U_{f_n}(Z)-U_f(Z)+O_{f_n}(Z)-U_{f_n}(Z)<3\varepsilon\underbrace{\Rightarrow}_{S6.2.4}$ f integrierbar

$|\int_a^b(f(x)-f_n(x))dx|\le(b-a)\max_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|\underbrace{<}_{D4.2.4}\varepsilon\underbrace{\Rightarrow}_{f\ glm\ konv,\ D4.2.4}$

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

b) Vor.: g_k über [a,b] integrierbar $\forall$ k &

Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ auf [a,b] gleichmäßig konvergent

Beh: Grenzfunktion f über [a,b] integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(x)\,dx$$

Bew: Wie üblich mit $f_n=\sum_{k=1}^{n} g_k$ auf a) zurückführen.

$$\# \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(x)\,dx.$$

A6.4.5 Finde eine Potenzreihenentwicklung für arctan x und Entwicklungspunkt 0

Lös: Aus dem 1. Hauptsatz folgt wegen arctan 0=0, dass

$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Aus der geometrischen Reihe

folgt $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\ \forall\ |t|<1$ und die Reihe ist sogar gleichmäßig konvergent für $|t|\le r$ mit beliebigem r<1..

Deshalb folgt aus S????, dass $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

zunächst nur für $|x|\le r$, aber, da ja r beliebig dicht bei 1 sein kann, ist dies sogar richtig $\forall$ x:|x|<1.

A6.4.6 Berechne $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ mit partieller Integration.

A6.4.7 Berechne $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$ mit partieller Integration.

A6.4.8 Berechne $\int_0^{1} x e^{x^2} dx$ mit der Sustitutionsregel.

A6.4.9 Zeige mit Substitutionsregel, dass $\int_0^a f(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(-x)\,dx$. Benutze dies, um zu zeigen, dass das Integral einer ungeraden Funktion über ein Intervall [-a,a] immer 0 ergibt.

A6.4.10 Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $a_1,\ldots a_n\in\mathbb{R}$. Zeige, dass die durch $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)$ gegebene Funktion im Intervall $(0,\pi)$ mindestens eine Nullstelle hat.

//**S6.4.4**(3407) Mittelwertsatz der Integralrechnung//
// Sei f über [a,b] integrierbar und sei μ der Mittelwert von f //
// über [a,b]. //
// • Dann ist $\underline{M}=\inf\{f(x):a\le x\le b\}\le\mu\le\sup\{f(x):a\le x\le b\}=\overline{M}$. //
// •• Falls f auf [a,b]stetig ist, existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit $\mu=f(\xi)$//

Lös: Vor. 1.MWS, f über [a,b] integrierbar, f auf [a,b] stetig erfüllt

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n} a_k\int_0^{\pi}\cos(kx)=\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^{\pi}=0\underset{S6.4.4}{\Rightarrow}\xi\in[0,\pi],f(\xi)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$$

A6.4.11 Finde eine Potenzreihenentwicklung für log(1+x) und Entwicklungspunkt 0. Bestimme auch den Konvergenzradius.

*//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//13.)Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in N_0$ *mit* $z\in U_1(0)$ *gilt* $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \frac{1}{1-\underset{\neq 1}{z}}$, *geom Reihe//*

Lös: $\log(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$, HS & log(1)=0,

$\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k$ für $|t|\leq r<1$, gleichmäßig konvergent.

$\forall$ r<1 auf [0,r) gleichmäßig, auf [0,1] nicht gleichmäßig konvergent.

$\int (-t)^k dt=\frac{1}{k+1}(-x)^{k+1}$ integrierbar $\Rightarrow$

$\int \frac{1}{1+t}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}=\log(1+x)\ \forall\ |x|<1.$

Konvergenzradius $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\left|\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}}\right|=1$

*//**D5.1.1** Es seien eine Funktion f:I→R, ein Punkt* $x_0\in I$ *und ein n∈N*
//gegeben. Wir sagen:
// (…)f ist n mal stetig diffb auf I (kurz: $f\in C^n(I)$*), falls f*
// n mal diffb ist ∀ x∈I und $f^{(n)}:I\to R$ *stetig auf I ist.*
//Bem: Wir schreiben f∈C(I), falls f':I→R stetig ist.

S6.4.8 (3417)

a) Vor: I:[a,b], f_n,f: I→ R, n∈N, $f_n\in C(I)$ ∀ n∈N,

$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ gleichmäßig konvergent auf I

Aussage: $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)dt$ gleichmäßig konvergent auf I=[a,b]

Bem: Man braucht nur $f_n\in R[a,b]$ statt $f_n\in C[a,b]$ ∀ n∈N zu fordern.

//**S4.3.4**(2411) Vor: $(f_n)_{n\in N}$, $f_n\in C(I)$ ∀ n∈N,
// f_n gleichmäßig konvergent auf I gegen f: I→R
// Aussage: f∈C(I)

Bew: $f\in C(I) \underset{S4.3.4}{\Rightarrow}$ f_n,F_n sind wohldefiniert auf [a,b]

$|F_n(x)-F(x)|=\int_a^x |f_n(t)-f(t)|dt\leq(b-a)\underbrace{\max}_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|dt\leq\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)\ \forall$ x∈[a,b]

$\Rightarrow F_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F$ gleichmäßig konvergent auf [a,b]

b) Vor: f_n differenzierbar auf beliebigem I ∀ n∈N
$(f_n)'$ konvergiert gleichmäßig auf I ∀ n∈N
f_n konvergiert auf einem Punkt $x_0\in I$ ∀ n∈N

Aussage: f_n konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Teilintervall J⊆I ∀ n∈N und Grenzfunktion $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in I$ ist differenzierbar auf I

und $f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

Bem: Im Allgemeinen gilt nicht, dass $f_n(x)$ auf I gleichmäßig konvergiert

//**S4.3.4** (2411) Vor: (f_n): $f_n\in C(I)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$,
// f_n gleichmäßig konvergent auf I gegen $f: I\to\mathbb{R}$
// Aussage: $f\in C(I)$
//**S5.2.3**(2803) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
//Vor:a<b, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b)
//Beh: $\exists$ mindestens ein $\xi\in(a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

Bew: Zunächst wird gezeigt: $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf jedem Teilintervall $J=[a,b]\subseteq I$ und oBdA $x_0\in J$.

$x,y\in[a,b]$: $\Delta_{mn}(x,y)=|(\underbrace{f_m(x)-f(x)}_{:=k_{m,n}(x)})-(\underbrace{f_m(y)-f(y)}_{:=k_{m,n}(y)})| \underset{S5.2.3}{=} |k'_{m,n}(\xi)(x-y)|\le$

$|f_{m,n}'(\xi)-f_{m,n}'(\xi)|(b-a)<\varepsilon$ $\forall$ $m,n>n_0(\varepsilon)$ $\forall$ $x,y\in[a,b]$

$y=x_0$ (beachte $|\beta|\le|\beta-\alpha|+|\alpha|$):

$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $\tilde{n}_0(\varepsilon)$ &

$|f_m(x)-f_n(x)|\le\Delta_{mn}(x,x_0)+|f_m(x_0)-f_n(x_0)|<2\varepsilon$ $\forall$ $m,n>\tilde{n}_0(\varepsilon)$ $\forall$ $x\in J=[a,b]$

$\Rightarrow$ (f_n) konvergiert gleichmäßig auf J
(f_n) konvergiert punktweise auf I gegen eine Funktion f

$\underset{S4.5.3}{\Rightarrow}$ $f\in C(I)$

Definiere für beliebiges festes $\xi\in[a,b]$:

$$\varphi_n(x):=\begin{cases}\dfrac{f_n(x)-f_n(\zeta)}{x-\zeta} & \text{für } x\in[a,b] \text{ ohne}\{\zeta\}\\ f_n'(\xi) & \text{für } x=\zeta\end{cases}\in C[a,b]\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Nun wird gezeigt $\varphi_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf [a,b]:

$|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|\le\Delta_{m,m}((x,\zeta)/|x-\zeta| \underset{\text{siehe oben}}{=} |h'_{m,n}(\tilde{\xi})|\dfrac{|x-\zeta|}{|x-\zeta|}=$

$$\begin{cases}|f_m'(\tilde{\xi})-f_n'(\tilde{\xi})|<\varepsilon,\ x\ne\xi\ \forall\ m,n\ge n_0(\varepsilon)\\ |f_m'(\tilde{\zeta})-f_n'(\tilde{\zeta})|<\varepsilon, x-\zeta\end{cases} \Rightarrow |\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|<\varepsilon\ \forall\ m,n\ge n_0(\varepsilon)\ \forall\ x\in[a,b]$$

$\underset{S4.3.4}{\Rightarrow}$ $(\varphi_n(x))$ konvergiert gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $\varphi(x)$ und diese ist stetig auf [a,b]

$\varphi(\zeta)=\lim_{n\to\infty} f_n'(\zeta) \underset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{x\to\zeta}\varphi(x)= \lim_{x\to\zeta}\dfrac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta}=f'(\zeta)$

K6.4.1 Vor: f_n: $I\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Vor: $I=[a,b]$, $f_n\in C[a,b]$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf I

Aussage: $\int_a^x\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k(t)dt$ & $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x f_k(t)dt$ gleichmäßig konvergent auf I

b) Vor: f_n $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar auf I,

$\sum_{k=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig konvergent,

$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergent in einem Punkt $x_0 \in I$

Aussagen: • $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig auf jedem Teilintervall $J \subseteq I$

• • $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in I$ ist differenzierbar auf I und $f'x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$, $x \in I$

Bsp:1.) $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_k(x-x_0)^n}_{f_k(x)}$, KR R>0 $\underset{K\,6.4.1}{\Rightarrow}$ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^n$ ist differenzierbar,

$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{n-1}$

2.) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$,

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

3.) $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$. $\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)' = \frac{\cos nx}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$

nicht anwendbar $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$