6.6(3600) **Der Taylorsche Satz**

Im Folgenden betrachten wir ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]\subset\mathbb{R}$ und ein $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

S6.6.1 (3600) (n fache Stammfunktion)

Vor: f stetig auf $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$,

$$F_n(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt\quad\forall\; x\in[a,b].$$

Beh: • F_n auf $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbar.

• • $F_n^{(k)}(x_0)=0$ für $0\le k\le n-1$

• • • n-te Ableitung von F_n ist f.

//**S6.3.3** 2. (3301) Hauptsatz der DI//

// Sei f auf $[a,b]$ stetig und sei $x_0\in[a,b]$. Dann ist durch //

// $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt\;\;\forall\; x\in[a,b]$ eine Stammfunktion zu f definiert.//

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in\mathbb{C}$ $^{\vee}$ $n,m,k\in\mathbb{N}_0$, $j\in\mathbb{N}$://*

//3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}\underset{2.)}{=}\frac{n!}{(n-m)!(n-m-n)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\underset{2.)}{=}\binom{n}{m}$ *falls $n\geq m$//*

//6.) $\forall\; a,b,z\in\mathbb{C}$ $^{\vee}$ $n\in\mathbb{N}_0$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$

//**S6.2.5**(3205) Jede auf $[a,b]$ stetige oder monotone Funktion ist //
// integrierbar//

//**S6.2.10**(3209) Sei f über $[a,b]$ integrierbar und sei $x_0\in[a,b]$ sowie //

// $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt\;\;\forall\; x\in[a,b]$.//

// Dann erfüllt F eine Lipschitzbedingung auf $[a,b]$ und ist //
// insbsondere dort stetig//

*//**S4.3.3** (2403)Rechenregeln für Stetigkeit//*

//Vor:f,g: $M\to\mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0\in M$.//

//Beh: 2.)$\alpha f+\beta g$ stetig in x_0 $\forall\;\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{C}$),fg stetig in x_0,//

//**S6.3.2.**(3300) 1. Hauptsatz der DI//

// Falls f über $[a,b]$ integrierbar ist und eine Stammfunktion //

// F besitzt, dann gilt $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\;\;(=F(x)|_a^b)$.//

Bew:Induktion über n

$$n=1:\; F_1(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^0}{\underbrace{(1-1)!}_{0!=1}}f(t)dt=\int_{x_0}^{x}f(t)dt\;\underset{S6.3.3}{\Rightarrow}$$

\# • • • $F_1'(x)=f(x)$ ... • $f(x)$ nach Vor stetig

\# • • $F_n^{(k)}(x_0)=F_1^{\overbrace{(1-1)}^{0\le k\le n-1}}(x_0)=F_1(x_0)=\int_{x_0}^{x_0}\frac{(x_0-t)^{1-1}}{(1-1)!}f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0}f(t)dt=$

\# $F_1(x_0)-F_1(x_0)=0$ ...

\# Beh

\# $n=2:\; F_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{2-1}}{(2-1)!}f(t)dt)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^1}{1!}f(t)dt=\underset{u}{x}\underbrace{\int_{x_0}^{x}f(t)dt}_{v}+\int_{x_0}^{x}(-t)f(t)dt$

$F_2'(x) = 1 * \int_{x_0}^{x} f(t)dt + x * f(x) + (-x) f(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = F_1(x)$

• f stetig nach Vor $\underset{S6.2.5}{\Rightarrow}$ f integrierbar $\underset{S6.2.10}{\Rightarrow}$ $F_2'(x)$ stetig

•• $F_2'(x_0) = F_1(x_0) = 0$, siehe n=1

••• $F_2''(x) = F_1'(x) = f(x)$

n: Es gilt IH •, ••, •••

$$n+1:\ F_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt \underset{S1.7.4\,6.),3.)}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{u} \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!} f(t)dt}_{v} =$$

$$\underbrace{\frac{\overbrace{x^0}^{1}}{0!}}_{u} \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-0}}{(n-0)!} f(t)dt}_{v} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{u} \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!} f(t)dt}_{v} \underset{S6.3.3}{\Rightarrow}$$

$$F'_{n+1}(x) = \underbrace{\overbrace{0}^{0}}_{u'} * v + \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{u} \underbrace{\frac{(-x)^n}{n!}}_{v'} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}}_{u'} \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!}}_{v} f(t) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{u} \underbrace{\frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}}_{v'} f(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!} f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!} f(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!} f(t)\,dt + x^n f(x) n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = F_n(x),$$

??? $x^n f(x) \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$, da $\frac{1}{n!}\binom{n}{k} \underset{S1.7.4\,3.)}{=} \frac{n!}{n!k!(n-k)!} = \frac{1}{k!(n-k)!}$

#

da $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k * (-1)^{n-k} \underset{S1.7.4\,6.)}{=} (1-1)^n = 0$

• x-t ist stetig $\underset{S4.3.3\,2.)}{\Rightarrow}$ $\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$ ist stetig $\underset{S6.2.5}{\Rightarrow}$

$\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$ ist integrierbar $\underset{S6.2.10}{\Rightarrow}$

$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ ist stetig $\underset{IH}{\Rightarrow}$ • ist richtig

•• $F_n(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \underset{S6.3.2}{=} F_n(x_0) - F_n(x_0) = 0 \underset{IH}{\Rightarrow} F_{n+1}^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \le k \le n+1-$

1

••• $F_{n+1}^{(1)}(x) = F_n(x) \underset{IH}{\Rightarrow} F_{n+1}^{(n+1)}(x) = f(x) \Rightarrow$ ••• ist richtig

⇒ Beh.

Andere Formulierung

Bew:Induktion über n: für n=1 folgt die Beh aus dem 2. Hauptsatz. Sei jetzt $n\geq 1$ und sei F_{n+1} betrachtet. Nach der binomischen Formel gilt $F_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\int_{x_0}^{x}\frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!}f(t)\,dt$ und daraus folgt mit dem 2. Hauptsatz, daß

$$F'_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}\frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!}f(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{(-x)^{n-k}}{(n-k)!}f(x)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}\frac{(-t)^{n-k}}{(n-k)!}f(t)\,dt+x^n f(x)\,n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}=F_n(x).$$

Da die letzte Summe nach der binomischen Formel gleich $(1-1)^n=0$ ist. Daraus folgt die Beh.

S6.6.2(3602) Satz von Taylor

Vor:[a,b](n+1)mal stetig differenzierbar.

Beh: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\ \ \forall\ x,x_0\in[a,b]$.

*//**S6.6.1** (3600)(n fache Stammfunktion)//*

//Vor: f stetig auf [a,b], $x_0\in[a,b]$, $n\in N$//

// $F_n(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt\ \ \forall\ x\in[a,b]$.//

//Beh: ● F_n auf [a,b] n-mal stetig differenzierbar. //

// ●● $F_n^{(k)}(x_0)=0$ für $0\leq k\leq n-1$ //

// ●●● n-te Ableitung von F_n ist f.//

//**A6.3.3** f auf einem Intervall I n-mal differenzierbar $\wedge$ $f^{(n)}=0\Rightarrow$

// $f=\sum_{k=0}^{n-1}a_k x^k$ //

Bew:Sei $g(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

$g^{(n+1)}(x)\underbrace{=}_{S6.6.1}f^{(n+1)}\wedge g^k(x_0)\underbrace{=}_{S6.6.1}0$ für $0\leq k\leq n\ \underbrace{\Rightarrow}_{Vor\ für\ f\ und\ S6.6.1\ für\ g}$

auch h=f-g auf [a,b] ist n+1-mal stetig differenzierbar und

$h^{(n+1)}(x)\equiv 0\ \underbrace{\Rightarrow}_{A6.3.3}\gamma(h)$ höchstens n $\Rightarrow$ $h=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\ \#\sum_{k=0}^{n}h_k(x-x_0)^k\#\Rightarrow$

$f(x)=h+g=\sum_{k=0}^{n}h_k(x-x_0)^k+g(x)$, h_k noch zu bestimmen.

$f^{(0)}(x)=f(x)=h_0(x-x_0)^0+h_1(x-x_0)^1+\ldots h_n(x-x_0)^n+g(x)\Rightarrow$

$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)=h_0(x_0-x_0)^0+h_1(x_0-x_0)^1+\ldots h_n(x_0-x_0)^n+g(x_0)\ \underbrace{\Rightarrow}_{S6.6.1}\ f^{(0)}(x_0)=h_0$

$f^{(1)}(x)=(h_0(x-x_0)^0+h_1(x-x_0)^1+\ldots h_n(x-x_0)^n)'+g'(x)=$
$h_1(x-x_0)^0+h_2*2*(x-x_0)^{2-1}*1+h_3*3*(x-x_0)^{3-1}*1\ldots h_n*n*(x-x_0)^{n-1}*1+g'(x)$

$f^{(1)}(x_0)=h_1(x_0-x_0)^0+2h_2(x_0-x_0)^{2-1}\ldots h_n*n*(x_0-x_0)^{n-1}*1+g'(x_0)\ \underbrace{\Rightarrow}_{S6.6.1}\ h_1$

$f^{(2)}(x)=2h_2*(x-x_0)^0+3*2h_3(x-x_0)^1\ldots h_n n(n-1)(x-x_0)^{n-2}+g'(x)\Rightarrow$

$f^{(2)}(x_0)=2h_2*(x_0-x_0)^0+3*2h_3(x_0-x_0)^1\ldots h_n n(n-1)(x_0-x_0)^{n-2}+g'(x_0)\ \underbrace{\Rightarrow}_{S6.6.1}$

$f^{(2)}(x_0)=1*2*h_2\ldots\ f^{(3)}(x_0)=1*2*3*h_3$ usw $k!h_k=f^{(k)}(x_0)\Rightarrow h_k=\frac{f^k(x_0)}{k!}$

Durch differenzieren und einsetzen von x_0 folgt dann aber

$k!h_k=f^{(k)}(x_0)$, da alle Ableitungen von g bis zur Ordnung n an der Stelle x_0 verschwinden.

Andere Formulierung:

Bew:Wir setzen abkürzend $g(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Nach obigem Lemma ist die (n+1)te Ableitung von gleich $f^{(n+1)}$ und alle früheren Ableitungen verschwinden an der Stelle x_0. Also folgt, daß die Differenzfunktion h=f-g auf [a,b](n+1)mal differenzierbar ist und dass $h^{(n+1)}(x)\equiv 0$ ist. Mit einer Übungsaufgabe folgt hieraus, dass h ein Polynom höchstens nten Grades ist. Also gilt $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x-x_0)^k+g(x)$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten h_k. Durch differenzieren und einsetzen von x_0 folgt dann aber $k!h_k=f^{(k)}(x_0)$, da alle Ableitungen von g bis zur Ordnung n an der Stelle x_0 verschwinden.

S6.6.3 (3603)

Vor: f mindestens 2n mal ($n\in\mathbb{N}$) stetig differenzierbar auf (a,b) und $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(2n-1)}(x_0)=0,\ f^{(2n)}(x_0)\neq 0\ \forall\ x_0\in(a,b)$:

Beh: f hat im Punkt x_0 ein lokales Extremum, und zwar
ein lokales Minimum für $f^{(2n)}(x_0)>0$,
ein lokales Maximum für $f^{(2n)}(x_0)<0$.

*//**S6.6.2** (3601)Satz von Taylor//*
//Sei f auf [a,b](n+1)mal stetig differenzierbar. Dann gilt $\forall\ x,x_0\in[a,b]$

$$//f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.//$$

*//**S6.2.9** (3206)Bem Es ist üblich //*

$$//\quad \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx=-\int_{x0}^{x_1} f(x)\,dx,\quad \int_{x0}^{x_0} f(x)\,dx=0 \text{ zu setzen.}//$$

Bew: $f(x)-f(x_0)\ \underbrace{=}_{S6.6.2}$

$$\#\quad \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{1}{(2n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)\,dt-$$

$$\#\quad \left(\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^k+\frac{1}{(2n-1)!}\int_{x_0}^{x_0}(x_0-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)\,dt\right)\ \underbrace{=}_{Vor}$$

$$\#\quad \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0+\frac{1}{(2n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)\,dt-\left(\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x_0-x_0)^0+0\right)=$$

$$=\frac{1}{(2n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)\,dt\quad\forall\ x\in(a,b).$$

$$\exists\ \varepsilon>0\ \underset{Vor:f^{(2n)}stetig,\,f^{(2n)}(x_0)\neq 0}{:}\ (f^{(2n)}(x)>0\ \wedge\ f^{(2n)}(x_0)>0)\ \vee\ (f^{(2n)}(x)<0\ \wedge\ f^{(2n)}(x_0)<0)$$

$$\forall\ x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\ \underbrace{\Rightarrow}_{x>x_0}$$

$$(f^{(2n)}(x_0)>0\ \Rightarrow\ f(x)-f(x_0)>0)\ \vee\ (f^{(2n)}(x_0)<0\ \Rightarrow\ f(x)-f(x_0)<0)$$

$$\int_{x}^{x_0}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)\,dt\ \underbrace{=}_{S6.2.9\,Bem}-\int_{x_0}^{x}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)\,dt\ \underbrace{\Rightarrow}_{x<x_0}$$

$$(f^{(2n)}(x_0)>0\ \Rightarrow\ f(x)-f(x_0)>0)\ \vee\ (f^{(2n)}(x_0)<0\ \Rightarrow\ f(x)-f(x_0)<0)$$

Bsp: $f^{(2n)}(x_0)>0 \underset{x<x_0 \text{ und } x>x_0}{\rightrightarrows} f(x)-f(x_0)>0 \Rightarrow$ lokales Minimum

Andere Formulierung

Aus dem Taylorschen Satz folgt

$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{(2n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)dt \;\forall\; x\in(a,b)$. Da $f^{(2n)}$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon>0$ für welches $f^{(2n)}(x)$ auf $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ stets das gleiche Vorzeichen hat wie $f^{(2n)}(x)$. Daraus folgt für $x>x_0$ sofort, daß auch $f(x)-f(x_0)$ gleiches Vorzeichen wie $f^{(2n)}(x_0)$ hat. Beachtet man, daß per Definition gilt:

$\int_{x}^{x_0}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)dt=-\int_{x_0}^{x}(x-t)^{2n-1}f^{(2n)}(t)dt$, so folgt dasselbe aber auch für $x<x_0$.

D6.6.1 (3604) Sei f auf [a,b] wenigstens n-mal differenzierbar und sei $x_0\in[a,b]$. Dann heißt $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0.

Die Differenz $R_n=f-P_n$ heißt das Taylorsche Restglied n-ter Ordnung.

Ist f sogar beliebig oft differenzierbar auf [a,b], so heißt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ die Taylorreihe von f im Punkt $x_0=0$.

Bem: Wir haben eine Reihe von Funktionen über Potenzreihen definiert. Es ist leicht zu sehen, dass diese Reihen gerade die Potenzreihen der entsprechenden Funktionen im Punkt $x_0=0$ sind.

Per Definition konvergiert die Taylorreihe von f genau dann für ein x gegen f(x), wenn gilt $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$. Dies muss aber durchaus nicht gelten: Es kann vorkommen, dass die Taylorreihe für ein x divergiert, oder dass sie konvergiert, aber sozusagen gegen den falschen Wert, soll heißen, nicht gegen f(x).

Der Satz von Taylor kann kurz so ausgedrückt werden:

$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$. Man nennt diese Gleichung auch die Darstellung des Restglieds in Integralform.

//**S6.4.5**(3408)*Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung*//
// *Vor: g und fg über [a,b] integrierbar,* //
// $g(x)\geq 0$ *oder* $g(x)\leq 0$ $\forall$ //$x\in[a,b]$. //
// *Beh*• : $\exists\ \mu\in[\underline{M}=\inf\{f(x):a\leq x\leq b\},\overline{M}=\sup\{f(x):a\leq x\leq b\}]$//
// $\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$.//
// $\leq\mu\leq\sup\{f(x):a\leq x\leq b\}=\overline{M}$.
// *Zusätzliche Vor: f stetig auf [a,b],* //
// *Beh*• • : $\exists\ \xi\in[a,b]$ *mit* $f(\xi)=\mu$. //
//**S5.2.7** (2806)Zwischenwertsatz von Darboux für Ableitungen//
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar auf I. //
// Sei a<b, $a,b\in I$ und $f'(a)\neq f'(b)$.//
// Beh: $\forall\ \eta: f'(a)\leq\eta\leq f'(b)\ \exists\ \xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=\eta$ .//
//Andere Formulierung://
// Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall [a,b] differnzierbar und //
// sei y eine beliebige Zahl mit $f'(a)\leq y\leq f'(b)$ oder $f'(b)\leq y\leq f'(a)$. //
// Dann gibt es ein $x\in[a,b]$ mit $f'(x)=y$.//

$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx \Rightarrow$

$r_n(x)=\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{1}{n!}(x-t)^n dt \underbrace{=}_{S6.4.5} \mu\int_{x_0}^{x}\frac{1}{n!}(x-t)^n dt=\mu\frac{1}{n!(n+1)}((x-t)^{n+1}(-1)\Big|_{x_0}^{x})$

$\underbrace{=}_{S6.4.5}$

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(-(x-x)^{n+1}+(x-x_0)^{n+1})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Aus dem erweiterten Mittelwertsatz folgt, wenn man dort f durch $f^{(n+1)}$ und g durch $(x-t)^n/n!$ ersetzt und noch den Zwischenwertsatz benutzt, dass für einen geeigneten Wert ξ zwischen x und x_0 gilt $R_n(x)=(x-x_0)^{(n+1)}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.
Man nennt diese Gleichung auch die Darstellung des Restglieds in differenzieller Form.

S6.6.4(3606) $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ gilt $(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\ \forall\ x\in(-1,1)$.

Die Reihe heißt auch Binominalreihe.

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C\ ^{\vee}\ n,m,k\in N_0,\ j\in N$://*

//6.) $\forall\ z\in C\ ^{\vee}\ n\in N_0$: $(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$,

*//**S3.5.4**(2003) Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $a_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0$ (fast alle), $\exists\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //*

// Beh:In S3.5.2 gilt $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ //

Bew: $\alpha\in\mathbb{N}\ \underset{S1.7.4\,6.)}{\Rightarrow}$ Beh.

Im anderen Fall folgt aus S3.5.4, dass die Binominalreihe den Konvergenzradius R=1 hat. Außerdem ist die Reihe gerade die Taylorreihe von $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ (mit $x_0=0$) und das Restglied ist in diesem Fall gleich $R_n(x)=\binom{\alpha}{k}(\alpha-n)\int_0^x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt$. Zu zeigen ist also, dass das Restglied für $|x|<1$ gegen 0 geht wenn $n\to\infty$. Dies folgt allerdings für x nahe bei −1 nicht direkt aus den üblichen Abschätzungen. Deshalb gehen wir anders vor:
Nach einer der unten stehenden Übungsaufgaben folgt, dass es genau eine auf (-1,1) stetig differenzierbare Funktion y(x) gibt, die die Bedingungen $y'(x)=\frac{\alpha}{1+x}y(x)\ \ \forall\ x\in(-1,1)$, $y(0)=1$ erfüllt.
Offensichtlich sind diese Gleichungen richtig für $y(x)=(1+x)^{\alpha}$. Man rechnet aber leicht nach, dass auch die durch die Binominalreihe definierte Funktion eine Lösung dieses Anfangswertproblems ist und daher muss die Beh gelten.

Ü1 Zeige durch Induktion über n:Ist f auf einem Intervall I n mal differenzierbar, und ist die nte Ableitung von f die Nullfunktion, so ist f ein Polynom vom Grad höchstens gleich n-1

Ü2 Sei f mindestens (2n+1)mal stetig differenzierbar auf (a,b) für ein $n\in\mathbb{N}$ und gelte für ein $x_0\in(a,b)$:
$f'(x_0)=f''(x_0)=..=f^{(2n)}(x_0)=0$, $f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$.
Zeige:Dann hat f im Punkt x_0 kein lokales Extremum.

Ü3 Finde die Taylorreihe von f(x)=log x im Punkt $x_0=1$ und untersuche ihre Konvergenz.

Ü4 Lineare homogene Differentialgleichung 1.Ordnung
Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig und sei
$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ für ein $x_0\in I$. Sei $y_0\in\mathbb{R}$.

a) Zeige: Die Funktion $y(x)=y_0e^{F(x)}$ erfüllt die beiden Bedingungen $y'(x)=f(x)y(x)$, $\forall\ x\in I$, $y(x_0)=y_0$.
Man nennt die 1. der beiden Gleichungen eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung (und y eine Lösung derselben), während die 2. auch Anfangsbedingung genannt wird. Beide zusammen stellen ein Anfangswertproblem dar.

b) Zeige: Ist y irgend eine Funktion auf I, die beiden Bedingungen genügt, so ist $y(x)e^{-F(x)}$ konstant, und durch Einsetzen von $x=x_0$ folgt dann $y(x)=y_0e^{F(x)}$
Schließe aus a) und b), daß das obige Anfangswertproblem genau ein Lösung y besitzt..

Ü5 Differenzialgleichung mit getrennten Veränderlichen.
Seien $I_1,I_2\subset\mathbb{R}$ 2 Intervalle, seien $f:I_1\to\mathbb{R}$ und $g:I_2\to\mathbb{R}$ stetig und sei $g(x)>0$ auf I_2. Seien weiter F und G Stammfunktionen zu f bzw g (also G streng monoton wachsend auf I_2). Seien schließlich $x_0\in I_1$, $y_0\in I_2$.

a) Zeige: Ist $I\subset I_1$ ein Intervall und ist $y:I\to I_2$ stetig differenzierbar mit
$y'(x)=f(x)g(y(x))\ \forall\ x\in I,\ y(x_0)=y_0,$ (*)
so folgt
$$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\int_{x_0}^{x} y'(t)/g(y(t))dt=G(y(x))-G(y_0) \text{ für } x\in I.$$
Da G injektiv ist, kann diese Gleichung nach y(x)aufgelöst werden und wir erhalten
$y(x)=G^{-1}(G(y_0))+F(x)-F(x_0))\ \forall\ x\in I.$ (**)

b) Zeige: Ist $I\subset I_1$ ein Intervall und so, dass für $x\in I$ immer gilt $G(y_0)+F(x)-F(x_0)\in G(I_2)$ und definiert man y durch (**), so erfüllt y die Bedingung (*)
Schließe aus a) und b), daß das Anfangswertproblem (*) auf dem in b) angegebenen Intervall genau 1 Lösung y besitzt.

A6.6.1 Finde die Taylorreihe von f(x)=log x an der Stelle $x_0=2$ und bestimme ein Intervall, auf dem das Restglied $r_n(x)$ gegen 0 konvergiert.

Lös: $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$, …

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. $f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$.

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k+r_n(x)$

$r_n(x)=(x-2)^{n+1}\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(n+1)!}=(x-2)^{n+1}\frac{(-1)^n(n)!}{\xi^{n+1}(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{(n+1)}\left(\frac{x-2}{\xi}\right)^{n+1}$

konvergiert für $\left|\frac{x-2}{\xi}\right|\leq 1 \Leftrightarrow |x-2|\leq|\xi|$ falls $x\in[1,3]$,

$\xi\in[1,3]$, $x-2\in[-1,1]$, $\left|\frac{x-2}{\xi}\right|\in[0,1]$, $r_n\to 0$

$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k k!}(x-2)^k$.

Besseres Intervall: $f(x)=1/x=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=$

$(\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, $|x-2|<2$, $x\in(0,4)$

$1/2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n=1/2\sum_{k=0}^{¥}(-1)^k\frac{(x-2)^k}{2^k}$ gleichmäßig konvergent

$|\frac{x-2}{2}|$ ¿ $r<1$, $\int(-1)^k\frac{(x-2)^k}{2^k}dx=\frac{(-1)^k(\frac{x-2}{2})^{k+1}}{k+1}$

$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(x)dx$, $f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x-2}{2})^{k+1}}{k+1}$

$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x-2}{2})^k}{k*2^k}$ für $x\in(0,4)$, $\sum g_n(x)$, $g_n(x)$ ¿ a^n, $0<a<1$

$\Rightarrow$ gleichmäßig konvergent, $a_nx^n<a^n$, $a<1$

A6.6.2 Löse folgende Anfangswertprobleme
Bestimme insbesondere in Teil b) das Intervall, auf dem y(x) wirklich definiert ist.

a) $\begin{cases} y'(x)=\tan x*y(x) \\ y(0)=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'(x)=\sin x*e^{y(x)} \\ y(0)=1 \end{cases}$

A6.6.3 Zeige durch Induktion über n: Ist f auf einem Intervall I n-mal differenzierbar und ist die n-te Ableitung von f die Nullfunktion, so ist f ein Polynom vom Grade höchstens gleich n-1.

A6.6.4 Sei f mindestens (2n+1 mal stetig differnzierbar auf (a,b) für ein $n \in \mathbb{N}$ und gelte für ein $x_0 \in (a,b)$:
$f'(x_0)=f''(x_0)=..=f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$. Zeige:Dann hat f im Punkt x_0 kein lokales Extremum.

A6.6.5 Finde die Taylorreihe von $f(x)=\log x$ im Punkt $x_0=1$ und untersuche ihre Konvergenz.

A6.6.6 Lineare homogene Differentialgleichung 1.Ordnung
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und sei

$F(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ für ein $x_0 \in I$. Sei schließlich $y_0 \in \mathbb{R}$.

a) Zeige: Die Funktion $y(x)=f(x)y(x),\ \forall\ x \in I,\ y(x_0)=y_0$. Man nennt die 1. der beiden Gleichungen eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung (und y eine Lösung derselben), während die 2. auch Anfangsbedingung genannt wird. Beide zusammen stellen ein Anfangsproblem dar.

b) Zeige: Ist y irgend eine Funktion auf I, die beiden Bedingungen genügt, so ist $y(x)e^{-F(x)}$ konstant, und durch Einsetzen von $x=x_0$ folgt dann $y(x)=y_0e^{F(x)}$
Schließe aus a) und b), dass das obige Anfangswertproblem genau ein Lösung y besitzt..

A6.6.7 Differenzialgleichung mit getrennten veränderlichen.
Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ 2 Intervalle, seien $f: I_1 \to \mathbb{R}$ und $g: I_2 \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g(x)>0$ auf I_2. Seien weiter F und G Stammfunktionen zu f bzw g (also G streng monoton wachsend auf I_2). Seien schließlich $x_0 \in I_1,\ y_0 \in I_2$.

a) Zeige: Ist $I \subset I_1$ ein Intervall und ist $y: I \to I_2$ stetig differenzierbar mit
$y'(x)=f(x)g(y(x)=\ \forall\ x \in I,\ y(x_0)=y_0,\qquad (*)$
so folgt

$F(x)-F(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt=\int\limits_{x_0}^{x} y'(t)/g(y(t))dt=G(y(x))-G(y_0)$

für $x \in I$. Da G injektiv ist, kann diese Gleichung nach y(x) aufgelöst werden und wir erhaltwen
$y(x)=G^{-1}(G(y_0))+F(x)-F(x_0))\ \forall\ x \in I.\qquad (**)$

b) Zeige: Ist $I \subset I_1$ ein Intervall und so, daß für $x \in I$ immer gilt $G(y_0)+F(x)-F(x_0) \in G(I_2)$ und definiert man y durch (**), so erfüllt y die Bedingung (*)

Schließe aus a) und b), daß das Anfangswertproblem (*) auf dem in b) angegebenen Intervall genau 1 Lösung y besitzt.