6.7(3700) **Uneigentliche Integrale**

Problem: Riemannintegral auch in unbeschränkten Situationen...(f oder I)

//D1.5.4 (756) 4.) $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$*//*
Im Folgenden betrachten wir ein Intervall der Form [a,b) mit $a\in\mathbb{R}$ und $b\in\overline{\mathbb{R}}$, a<b.

D6.7.1 (3700)

Vor: $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $\forall$ [a,c] mit $a\le c<b$ integrierbar & $\exists \lim\limits_{c\to b_-}\int_a^c f(x)dx$.

Dann heißt f über [a,b) uneigentlich integrierbar und wir nennen $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b_-}\int_a^c f(x)dx$ das uneigentliche Integral von f über [a,b). Wir sagen manchmal: das uneigentliche Integral ist konvergent, falls f uneigentlich integrierbar ist. Falls |f| über [a,b) uneigentlich integrierbar ist, sagen wir auch: das uneigentliche Integral von f ist absolut konvergent.
Beachte: Falls $b<\infty$ und falls f auf [a,b] integrierbar ist, gilt für alle $c\in[a,b)$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Die Fundamentalabschätzung impliziert mit $M=\sup|f(x)|$, dass $\left|\int_c^b f(x)dx\right| \le M(b-c) \underset{c\to b_-}{\to} 0$. Deshalb ist f auch uneigentlich integrierbar über [a,b) und das uneigentliche Integral ist gleich dem Integral.

In analoger Weise kann man auch uneigentliche Integrale über Intervalle der Form (a,b] definieren, wobei a auch gleich $-\infty$ sein kann.

Andere Formulierung:
a) Eine Funktion $f: [a,b)\to\mathbb{R}$, $(-\infty\le a<b\le\infty)$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar über [a,b) (Kurz $f\in R[a,b)$) falls gilt:
- $\forall$ $c\in(a,b)$ ist $f\in R[a,c]$
- • $\lim\limits_{c\to b_-}\int_a^c f(x)dx$ existiert (eigentlich)

und wir schreiben dann kurz für den Grenzwert $\int_a^b f(x)dx$

b) Eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(-\infty\le a<b\le\infty)$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar über (a,b) falls gilt:

$f\in R(a,c]$ & $f\in R[c,b)$ und wir setzen $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Bem: • In b) hätten wir $\forall$ $c\in(a,b)$ verlangen können, dass $f\in R(a,c]\cap f\in R[a,c)$ gilt und die D6.7.1 ist unabhängig von der Wahl von $c\in(a,b)$ (siehe ....)
• • Ist $f\in R[a,b]$, so gilt $f\in R[a,b)$ und die Integrale stimmen überein. (siehe ...)

Bsp:6.7.1

1.)Sei $\alpha>1$. Aus $\int\limits_1^a x^{-\alpha}dx=(\alpha-1)^{-1}(1-a^{1-\alpha}) \underbrace{\rightarrow}_{a\to\infty} (\alpha-1)^{-1}$ folgt die Konvergenz

des uneigentlichen Integrals $\int\limits_1^\infty x^{-\alpha}dx$ und

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^a=\frac{1}{1-\alpha}(a^{1-\alpha}-1)\underbrace{\rightarrow}_{a\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}\ \textit{für}\ \alpha>1\\ ?\ \textit{für}\ \alpha=1\\ \infty\ \textit{für}\ \alpha<1\end{cases}$$

Sei $0<\alpha<1$. Aus $\int\limits_\varepsilon^\alpha x^{-\alpha}dx=(\alpha-1)^{-1}(1-\alpha^{1-\alpha}) \underbrace{\rightarrow}_{\alpha\to\infty} (1-\alpha)^{-1}$ folgt die Konvergenz

des uneigentlichen Integrals $\int\limits_1^\alpha x^{-\alpha}dx$ und

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_0^\alpha=\frac{1}{1-\alpha}(a^{1-\alpha}-1)\underbrace{\rightarrow}_{a\to\infty}\begin{cases}\infty,\ \textit{falls}\ \alpha<1\\ \frac{1}{\alpha-1},\ \textit{falls}\ \alpha>0\end{cases}.$$

Andere Formulierung:

$f(x)=x^{-\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$

$x\in(0,1]\ \Rightarrow\ f\in R[c,1]\ \forall\ c\in(0,1)\ \Rightarrow$

$$\alpha<1:\ \int\limits_c^1 x^{-\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha}(1-c^{1-\alpha})\underbrace{\overbrace{\rightarrow}^{c\to0}}_{\alpha<1}\frac{1}{1-\alpha}\ \Rightarrow\quad f\in R(0,1]\ \forall\ \alpha<1$$

$$\alpha=1:\ \int\limits_c^1 \frac{1}{x}dx=\log 1-\log c\underbrace{\rightarrow}_{c\to0}\infty$$

$\alpha>1$: $f\notin R(0,1]$

$\Rightarrow\ f\in R(0,1]\ \Leftrightarrow\ \alpha<1$

$$1\le x<\infty,\ f\underbrace{\in}_{x^{-\alpha}\ stetig}R[1,c]\ \forall\ c>0,\ \int\limits_1^c x^{-\alpha}dx=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}(c^{1-\alpha}-1),\ \textit{falls}\ \alpha\neq1\\ \log c,\ \textit{falls}\ \alpha=1\end{cases}\underbrace{\rightarrow}_{c\to\infty}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha},\ \textit{falls}\ \alpha<1\\ \infty,\ \textit{falls}\ \alpha\le1\end{cases}\ \Rightarrow\ f\in R[1,\infty)\ \Leftrightarrow\ \alpha>1$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{x\in(0,\infty)} f\notin R(0,\infty)$

$$2)\ f(x)=\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{symmFkt},\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ f\underbrace{\in}_{f\ stetig}R[0,c]\ \forall\ c>0$$

$$\int\limits_0^c\frac{1}{1+x^2}dx=\mathbf{arctan}\,x\Big|_0^c=\text{aectan } c-0\ \Rightarrow\ \lim_{c\to\infty}\arctan c=\frac{\pi}{2}\underbrace{\Rightarrow}_{Symmetrie}f\in R(-\infty,+\infty)$$

S6.7.1 (3702) **Cauchy Kriterium für uneigentliche Integrale**

Vor: $\int_a^b f(x)dx$ ist uneigentliches Integral

Beh: $\int_a^b f(x)dx$ ist konvergent ⇔

(***) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ c\in[a,b)\ \forall\ \xi\in[c,b),\ \forall\ \eta\in[\xi,b): |\int_\xi^\eta f(x)dx|<\varepsilon$

*//**D4.2.1'** (2301) $D\subset K$, HP $z_0\in D$ ˅ $f: D\to K$.//*

//1.) $f(z)$ für $z \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} z_0$ konvergent :⇔ $\exists\ w_0\in K$://

// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ mit $|f(z)-w_0|<\varepsilon\ \forall\ z\in M\cap \overset{\circ}{U}_{\delta_\varepsilon}(z_0)$.//

// Schreibweise: $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ oder $f(z)\to w_0 (\overset{z\to z_0}{\longrightarrow})$//

*//**S6.2.9** (3206)Für $a<c<b$ ist eine Funktion f genau dann über $[a,b]$ //*
// integrierbar, wenn sie sowohl über $[a,c]$ als auch über $[c,b]$ //
// integrierbar ist und dann gilt

// $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.//

Bew: S6.2.9 ⇒ $\int_a^\eta f(x)dx=\int_a^\xi f(x)dx+\int_\xi^\eta f(x)dx$ ⇒ * $\int_\xi^\eta f(x)dx=\int_a^\eta f(x)dx-\int_a^\xi f(x)dx$

„⇒„ $I=\int_a^b f(x)dx$ ist konvergent $\underset{D4.2.1}{\rightrightarrows}$

** $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ c\in[a,b)\ \forall\ \xi\in[c,b): |I-\int_a^\xi f(x)dx|<\varepsilon/2 \underset{*}{\rightrightarrows}$

für $\xi\in[c,b),\eta\in[\xi,b): |\int_\xi^\eta f(x)dx| \le |\int_\xi^\eta f(x)dx-I|+|I-\int_\xi^\eta f(x)dx|<\varepsilon$.

"⇐" $\underbrace{(c_n)}_{Folge}\in[a,b)$: $\lim_{n\to\infty}(c_n)\to c_-$ ˅ $I_n=\int_a^{c_n} f(x)dx \underset{**}{\rightrightarrows}$ (I_n) ist Cauchyfolge

⇒ $\lim_{n\to\infty}(I_n)=I$. Dieser Wert ist von der Wahl der Folge (c_n) unabhängig und dies ist äquivalent zur Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

Andere Formulierung:

Sei $I=\int_a^b f(x)dx$ konvergent. Aus der Definition des Funktionsgrenzwerts folgt dann

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ c\in[a,b)\ \forall\ \xi\in[c,b): |I-\int_a^\xi f(x)dx|<\varepsilon/2$. Wegen

$\int_\xi^\eta f(x)dx=\int_a^\eta f(x)dx-\int_a^\xi f(x)dx$ folgt dann für $\xi\in[c,b), \eta\in[\xi,b)$:

$|\int_\xi^\eta f(x)dx| \leq |\int_\xi^\eta f(x)dx-I|+|I-\int_\xi^\eta f(x)dx|<\varepsilon$. Um die Umkehrung zu zeigen, sei (c_n) eine Folge aus $[a,b)$, welche von links gegen c konvergiert und sei $I_n=\int_a^{c_n} f(x)dx$. Dann folgt aus (***), dass (I_n) eine Cauchyfolge ist, also gegen einen Wert I konvergiert. Dieser Wert ist von der Wahl der Folge (c_n) unabhängig und dies ist äquivalent zur Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

Andere Formulierung:
Vor: $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f\in R[a,c)\ \forall\ c\in(a,b)$.

Aussage: $f\in R[a,b) \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx|<\varepsilon\ \forall\ c_1<c_2\in(a,b)$ mit

$$\begin{cases} \bullet\ b-c_i<\delta, i=1,2\,(b<\infty) \\ \bullet\bullet\ c_i<\dfrac{1}{\delta,i}, i=1,2\,(b=0) \end{cases}$$

Bew:Folgt direkt aus dem Cauchykriterium für Funktionslimites, angewendet auf $F(c)=\int_a^c f(x)dx$

Bsp: • $f(x)=\dfrac{\sin x}{\underbrace{x^2-2x+4}_{stetig\ auf\ 0....\infty}}$, $x>0 \Rightarrow f\in R[a,c]\ \forall\ c>0$

$$|\int_{c_1}^{c_2} \frac{\sin x}{x^2-2x+4}dx| \leq \int_{c_1}^{c_2} |\frac{\sin x}{(x-1)^2+3}|dx<\int_{c_1}^{c_2} |\frac{\sin x}{(x-1)^2}|dx=|-\frac{1}{x-1}|\Big|_{c_1}^{c_2}=\frac{1}{c_1-1}-\frac{1}{c_2-1}$$

$$<\frac{1}{c_1-1}<\varepsilon,\quad c_1>\frac{1}{\varepsilon}+1=\delta_\varepsilon.$$

• • $f(x)=\sin x^2$, $x\geq 0$

D6.7.2 (3703) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$ heißt uneigentlich absolut integrierbar über (a,b) falls f und $|f|\in R(a,c]\cap?R[c,b)$ gilt und somit $|f|\in R(a,b)$ gilt.

Bem: • $|f|\in R(a,b) \Rightarrow f\in R(a,b)$

• • Die Wahl von c ist irrelevant

S6.7.2 (3704) Aus der absoluten Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)dx$ folgt die Konvergenz.

Bew:Folgt aus $|\int_\xi^\eta f(x)dx| \le \int_\xi^\eta |f(x)|dx$ (Dreiecksungleichung)

//**S6.4.1**(3400)
//Partielle Integration//
// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //
// Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//

// $\int_a^b f(x)G(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$.//

Bsp 6.7.2:

Sei $\alpha>0 \wedge 1 \le \xi < \eta \Rightarrow \int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \underset{S6.4.1}{=} -\frac{\cos x}{x^\alpha}|_\xi^\eta - \alpha\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx \Rightarrow$

$-|\frac{\cos x}{x^\alpha} < \varepsilon/2$ falls $\xi, \eta > c$

$\alpha\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx \le \alpha\int_\xi^\eta \frac{dx}{x^{\alpha-1}}dx < \varepsilon/2$

$|\int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}dx| \le \frac{1}{\xi^\alpha} + \frac{1}{\eta^\alpha} + \alpha\int_\xi^\eta \frac{1}{x^{\alpha+1}}dx.$

\# Sei $\alpha>0 \wedge 1 \le \xi < \eta \Rightarrow \int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}dx \underset{S6.4.1}{=} -\frac{\cos x}{x^\alpha}|_\xi^\eta - \underbrace{\frac{1}{-\alpha+1}}_{=\beta}\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{x^{\alpha-1}}dx \Rightarrow$

\# $\frac{1}{\xi^\alpha} \underset{0\le 1\le\xi\le\eta,\alpha>0}{=} |\frac{1}{\xi^\alpha}| \ge |\frac{\cos\xi}{\xi^\alpha}| \ge -\frac{\cos\xi}{\xi^\alpha}$, $\beta\int_\xi^\eta \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx \underset{0\le 1\le\xi\le\eta,\alpha>0}{=} \beta\int_\xi^\eta \frac{dx}{x^{\alpha-1}}dx$

$\underset{0\le 1\le\xi\le\eta,\alpha>0}{<} \varepsilon/3$

\# $|\int_\xi^\eta \frac{\sin x}{x^\alpha}dx| \le \frac{1}{\xi^\alpha} + \frac{1}{\eta^\alpha} + \beta\int_\xi^\eta \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx.$

$\underset{S6.7.1, Bsp\,6.7.1.}{\Rightarrow}$ Uneigentliches Integral $\int_1^\infty x^{-\alpha}\sin x dx$ konvergent.

S6.7.3(3704) Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale
Gilt $|f(x)| \le g(x)$ für $x\in[a,b)$ und ist das uneigentliche Integral
$\int_a^b g(x)dx$ konvergent, so ist $\int_a^b f(x)dx$ absolut konvergent.

Bew:Folgt aus dem Cauchykriterium, denn

$\int_\xi^\eta f(x)dx < \varepsilon \Rightarrow |\int_\xi^\eta f(x)dx| \le \int_\xi^\eta g(x)dx$

\# $\varepsilon > \int_\xi^\eta g(x)dx \ge \int_\xi^\eta |f(x)|dx \ge |\int_\xi^\eta f(x)dx|$

Andere Formulierung:
Vor: $f,g:(a,b)\to \mathbb{R}$ mit $f,g\in R[d_1,d_2]$ $\forall$ $a<d_1<d_2<b$, $g\ge 0$,
$g\in R(a,b)$ und $|f(x)| \le c*g(x)$ $\forall$ $x\in(a,b)$ mit $c>0$,
Aussage: (|f| und f)$\in R(a,b)$
Bew: Mit f ist auch $|f|\in R[d_1,d_2]$ $\forall$ $a<d_1<d_2<b$. Das Cauchykriterium

liefert die Beh

Bem: Minorantenkriterium

Falls $0 \le g \in R[a,b]$ und $|f(x)| \ge c * g(x) \ \forall\ x \in (a,b) \Rightarrow |f| \ne R(a,b)$

Bsp 6.7.3:

a) $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \le \int_1^\infty \underbrace{\frac{dx}{x^\alpha}}_{\alpha>1, \ne\infty}$, $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \le \int_1^\infty \underbrace{\frac{dx}{x^\alpha}}_{\alpha>1, \ne\infty}$

b) $f(x) = \begin{matrix} 1 \text{ falls } x \in Q \\ -1 \text{ sonst} \end{matrix}$ ...Voraussetzung im Intervall integrierbar nicht erfüllt

c) $\int_1^\infty \frac{\begin{Bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{Bmatrix}}{t^\alpha} dt$ abs existent $\Leftrightarrow \alpha>1$

Lös: „$\Leftarrow$“ $\alpha>1$: $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \le \frac{1}{t^\alpha}$

„$\Rightarrow$“ $0 \le \alpha \le 1$: $\nu \in N$, $\int_{\nu*\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \ge \frac{1}{\pi^\alpha (\nu+1)^\alpha} * \int_{\nu*\pi}^{(\nu+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi^\alpha(\nu+1)^\alpha} \quad \forall\ \nu \in N$

divergente Reihe, aber

Aber $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha}$ existiert für $\alpha>1$...

d) $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ existiert $\forall\ x>0$, da $e^{-t} t^{x-1} \le \begin{cases} t^{x-1}, 0<t<1 \\ cx^{-\frac{t}{2}}, t \ge 1 \end{cases}$?

S6.7.4(3705) Integralkriterium für Reihen

Vor: $p \in Z$ & f auf $[p,\infty)$ positiv und monoton fallend.

Beh: Uneigentliches Integral $\int_p^\infty f(x)dx$ konvergent $\Leftrightarrow$

$\sum_{n=p}^\infty f(n)$ konvergiert ' $\sum_{k=p+1}^\infty f(n) \le \int_p^\infty f(x)dx \le \sum_{n=p}^\infty f(n)$

$\sum_{n=p}^\infty f(n) \ldots \sum_p^\infty f(x)dx = \lim_{q\to\infty} \int_p^q f(x)dx \ldots \int_p^q f(x)dx = \sum_{n=p}^{q-1} \int_n^{n+1} f(x)dx$

$\sum_{n=p+1}^q f(n) = \sum_{n=p}^{q-1} f(n+1) \le \int_p^q f(x)dx \le \sum_{n=p}^{q-1} f(n)$

Bew: f monoton fallend $\Rightarrow f(n+1) \le f(x) \le f(n) \ \forall\ x \in [n,n+1] \Rightarrow$

$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x) \le f(n) \Rightarrow$ Beh.

Andere Formulierung:

Vor: $f:[1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend

Aussage: $\sum_{k=1}^\infty f(k) < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t)dt < \infty$

Bew: f monoton fallend ⇒ $f \in R[1,c]\ \forall\ c>0$

$$f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt \geq f(k+1)\quad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_{1}^{n+1} f(t)\,dt \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

Bsp 6.7.4:

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha},\quad \int_{1}^{\infty} (1/x^{\alpha})\,dx$

  $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\log n) \ldots f(x)=1/(x\log x)\ldots$

  $$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\log x} \underbrace{=}_{*} \int_{\log 2}^{\log a} \frac{e^u du}{e^u u} = \log u \Big|_{\log 2}^{\log a} = \log(\log a) - \log(\log 2)$$

  * $u=\log x,\ x=e^u,\ dx= e^u du$

- • $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(x))^{\alpha}} < \infty \Leftrightarrow \int_{2}^{\infty} \frac{1}{t(\log(t))^{\alpha}}\,dt = \lim_{c\to\infty} \int_{2}^{c} \frac{1}{t(\log(t))^{\alpha}}\,dt = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha}(\log t)^{1-\alpha}\Big|_2^c\right) \underbrace{<}_{\alpha>1} \infty$

  $\Leftrightarrow \alpha>1$

A6.7.1 Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{1}^{\infty} x^{-\alpha}dx$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ nicht konvergiert.

A6.7.2 Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{0}^{\infty} x^{-\alpha}dx$ für $\alpha \geq 1$ nicht konvergiert.

A6.7.3 Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{1}^{\infty} x^{-\alpha}\sin x\,dx$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ nicht absolut konvergiert.

Lös: $\int_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[(k+1)\pi]^{\alpha}} \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx}_{>0,\text{unabh von k}}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Lös:.. $\lim_{a\to+\infty} \arctan a - \lim_{b\to-\infty} \arctan b = \pi/2-(-\pi/2)=\pi$

A6.7.4 Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale

a) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Lös:.. $\lim_{a\to1^-} \int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{a\to1^-} \arcsin x\Big|_0^a =$

$\lim_{a\to1^-} \arcsin a - \arcsin 0 = \pi/2 - 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Lös:.. $\lim_{a\to+\infty}$ arctan $a-\lim_{b\to-\infty}$ arctan $b=\pi/2-(-\pi/2)=\pi$

c) $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}\,dx$

Lös:..$=\lim_{a\to 1}\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}\,dx=\lim_{a\to 1}(-\frac{1}{5})\int_0^1 \frac{x^5(-5x^4)}{\sqrt{1-x^5}}\,dx=$

$(u=1-x^5 \Rightarrow x^5=1-u \Rightarrow x=0 \Rightarrow u=1,\ x=a \Rightarrow u=1-a^5,\ du=-5x^4)$

$\lim_{a\to 1} -\frac{1}{5}\int_1^{1-a^5} \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,du= -1/5\lim_{a\to 1}\int_1^{1-a^5}(u^{-1/2}-u^{1/2})\,du=$

$-1/5\lim_{a\to 1}(2u^{1/2}-\frac{2}{3}u^{3/2})\Big|_1^{1-a^5} =$

$-1/5[\lim_{a\to 1}(2(1-a^5)^{1/2}-\frac{2}{3}(1-a^5)^{3/2})-(2-2/3)]=4/15$

d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x)}\,dx$

Lös:...$=\lim_{a\to\infty}\int_1^a (\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x})\,dx=\lim_{a\to\infty}\log x\Big|_1^a-\log(1+x)\Big|_1^a=$

$\lim_{a\to\infty}(\log a-\log(1+a))+\log 2=\lim_{a\to\infty}(\overbrace{\log \underbrace{\frac{a}{1+a}}_{\lim_{a\to\infty}\frac{a}{1+a}=1,\log \text{ stetig}}}^{\log 1=0}+\log 2=\log 2$

A6.7.5 Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz

a) $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$

Lös: $\lim_{a\to\infty}\int_0^a \sin x\,dx=\lim_{a\to\infty}(-\cos a+\cos 0)$, lim existiert nicht,

uneigentliches $\int$ existiert nicht

b) $\int_0^1 \frac{\log x\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

Lös: $|\cos x|<1$, $|\log x| \underset{x\in(0,1)}{=} -\log x=\log 1/x=\log t \le t^{\alpha}=(1/x)^{\alpha}=x^{-\alpha}\ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}_+$

$\log t\ge 0$, $(1/x=t,\ t\subset(1,\infty))$,

$\left|\frac{\log x\cos x}{x^{1/2}}\right| \le \frac{x^{-\alpha}}{x^{1/2}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}}$, $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ konvergiert für $0\le\frac{1}{2}+\alpha<1$, Bsp

6.7.3, uneigentliches $\int$ konvergiert.