# 3.(1600) Unendliche Reihen

## 3.1(1600) Definition und Konvergenz

**D3.1.1**(1600)

(.) Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset K$ gegeben. Dann heißt die Folge $(S_n)_{n=0}^{\infty}$, definiert durch $S_n := \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$, $n \in N_0$, unendliche Reihe, für die kurz $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ geschrieben wird. $S_n$ heißt die n-te Partialsumme von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ und $Z_n$ deren n-ter Summand.

(..) Eine unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ heißt konvergent: $\Leftrightarrow$ $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in K$. Dann schreibt man auch $S = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

Andernfalls heißt $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ divergent.

Bem: 1.) Das Symbol $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ ist generell nur Abkürzung für die Folge $\left(\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu\right)_{n=0}^{\infty}$ und im Falle der Konvergenz bedeutet $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ zusätzlich $\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$.

2.) Für $m \in Z$ bedeutet $\sum_{\nu=m}^{\infty} z_\nu$ die Folge $\left(\sum_{\nu=m}^{n} z_\nu\right)_{n=m}^{\infty}$.

3.) Für $(a_n) \subset R$ ist uneigentliche Konvergenz von $\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)_{n=0}^{\infty}$ gegen $\infty$ oder $-\infty$ wie in **D2.2.5** erklärt

4.) Ist $(S_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$ eine beliebige Folge, so ist mit $z_\nu := S_\nu - S_{\nu-1}$, $\nu \in N_0$, $S_{-1} := 0$, $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$ $n \in N_0$, d.h. jede Folge lässt sich als Reihe schreiben.

Andere Formulierung:

Unendliche Reihen sind nichts anderes als Folgen $(S_n)$ mit Zuwächsen $z_\nu := S_\nu - S_{\nu-1}$, $\nu \geq 1$, $z_0 = S_0$.

**D3.1.2**(1602) Für ein $z \in K$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ die geometrische Reihe.

**S3.1.1**(1602) Die geometrische Reihe ist divergent $\forall$ $z \in K$ mit $|z| > 1$. Sie konvergiert $\forall$ z mit $|z| < 1$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \forall \ |z| < 1.$$

**S3.1.2**(1602)Rechenregeln und Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Vor:Seien $(z_\nu),(w_\nu)\subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu, \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.

Beh:Notwendige Konvergenzkriterien

Zu 1.) und 2.), siehe auch Bem unten

1.) Die Partialsumme $S_n=\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$, $n\in\mathbb{N}_0$, ist beschränkt.

Bew: Aus Konvergenz folgt Beschränktheit,

2.) $z_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

3.) Ist $\sum_{k=p}^{n} z_k$ konvergent und ist $\lambda\in\mathbb{K}$ beliebig, so ist auch $\sum_{k=p}^{n} \lambda z_k$ konvergent und es gilt $\sum_{k=p}^{n} \lambda z_k=\lambda\sum_{k=p}^{n} z_k$.

4.) $\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ist $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha z_\nu+\beta w_\nu)=\alpha\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu+\beta\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.

5a) Für den Reihenrest gilt $R_m:=\sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu=(\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu\to S}-\underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m})\overset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$, $m\in\mathbb{N}_0$,

d.h. es gilt $\lim_{m\to\infty} R_m=0$.

Andere Formulierung und Verhalten $z_k$:

5b) Falls eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{K}$ konvergiert, folgt auch die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ $\forall\ m\geq p$ und es gilt $\lim_{k\to\infty} z_k=0$, $\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m}^{\infty} z_k=0$.

6.) Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0:=0$, $n_k<n_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}_0$ eine Teilfolge von $(n)_{n=0}^{\infty}$ und setzt man $c_\nu:=\sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} z_k$, $\nu\in\mathbb{N}_0$,(zwischen $n_\nu$ und $n_{\nu+1}$ gibt es einige $n_k$) so konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu=\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ (d.h. in konvergenten Reihen darf man beliebig Klammern setzen).

Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen.

Sei $(z_n)\subset\mathbb{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit

$|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu|<\varepsilon\ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$.(d.h. $|S_n-S_m)|<\varepsilon\ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$).

Andere Formulierung:

Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,q\in\mathbb{N}: n\geq\max\{N,q-1\}\ _{n+1>N,n+\underbrace{q}_{\in N\Rightarrow q\geq 1}>N\Rightarrow n+q\geq n+1}^{gilt}\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} z_k\right|<\varepsilon$

$|S_n-S_m|\underset{m=(n+q)\in N}{=}\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} z_k\right|$,

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,n+q\in\mathbb{N}: n,n+q>N\ \Rightarrow\ |S_n-S_{n+q}|<\varepsilon$

2.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}$ ist divergent, da $s_{2n+1}=0$, $s_{2n}=1$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.

$\sum_{\nu=0}^{\infty} ((-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 0=0$.

**D3.1.3**(1605)Eine Summe der Form $\sum_{k=p}^{q} (b_k-b_{k+1})$ heißt Teleskopsumme, eine Reihe derselben Form (also mit $q=\infty$) heißt Teleskopreihe.

**S3.1.3**(1605)Eine Teleskopreihe konvergiert, wenn $(b_k)\in\mathbb{R}$, eine Nullfolge ist und in diesem Fall ist der Wert gleich $b_p$.

**D3.1.4**(1606) Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ heißt alternierend, falls $a_k=(-1)^k|a_k|$ für alle $k\geq p$

**S3.1.4**(1607) Leibniz Kriterium

Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$, $a_n\searrow 0\,(n\to\infty)$.

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n=a_0-a_1+a_2-a_3+-\ldots$ ist konvergent.

Mit $S_n:=\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu}a_{\nu}$, $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $S_{2n}\searrow$ $S_{2n+1}\nearrow$

Fehlerabschätzung $S_{2n}-S_{2n+1}=a_{2n+1}$, $S_{2n}-S_{2n-1}=a_{2n}$.

Bem: $[S_{2n+1},S_{2n}]$, $n\in\mathbb{N}_0$ ist eine Intervallschachtelung, die sich auf $S=\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}a_{\nu}$ zusammenzieht.

Andere Formulierung

Ist die Reihe $\sum_{k=p}^{n} a_k$ alternierend und ist die Folge $(|a_k|)_{k=q}^{\infty}$ für irgend ein $q\geq p$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe konvergent. Bezeichnet a den Wert der Reihe, so gilt immer $S_{2n+1}\leq a\leq S_{2n}$ $\forall$ $n\geq(q-1)/2$.

## 3.2(1700) Reihen mit nicht-negativen Gliedern, Absolut konvergente Reihen

**S3.2.1**(1700)

Seien $a_k \geq 0 \ \forall \ k \geq p$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und der erste Fall tritt genau dann ein, wenn die Partialsummenfolge beschränkt ist.

**D3.2.1**(1700) $(z_n) \subset \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt absolut konvergent:$\Leftrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ ist konvergent. Wegen S3.2.1 Schreibweise $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$

**S3.2.2**(1700)

Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}, (w_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ $\quad a_n \geq 0,\ b_n \geq 0_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ , $n \in \mathbb{N}_0$.

Beh:

1.) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent

$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.

Bem: a) Konvergenz $\not\Rightarrow$ absolute Konvergenz

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent

b) Insbesondere darf man bei absolut konvergenten Reihen rechnen wie bei konvergenten Reihen

c) Es gilt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \underset{S1.2.16.)}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$

2.) Majorantenkriterium

$|z_n| \leq b_n,\ \forall \ n \geq n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent

Andere Formulierung:

Aus $|z_k| \leq b_k \ \forall \ k \geq p$ und $\sum_{k=p}^{\infty} b_k < \infty$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} z_k$.

3.) Minorantenkriterium (MinK)

$|z_n| \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$ und $\sum_{n=0}^{n} b_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$

Andere Formulierung:

Gilt $\sum_{k=0}^{n} b_k = \infty$ und $|z_k| \geq \tilde{C} b_k$ für fast alle k mit $\forall \ k \in \mathbb{N}_0$ mit $\tilde{C} > 0$, so ist $\sum_{k=0}^{n} a_k = \infty$ (d.h. ab bestimmtem Index m)

4) Wurzelkriterium

4a) $\exists\ 0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q \ \ \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{¥} |z_n|$ konvergent.

$\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$.

4b) Vor: In $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $z_n \neq 0 \ \ \forall\ n \geq n_0$

Beh.:(.) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent.

(..) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

5) Quotientenkriterium

Vor: $z_n \neq 0 \ \ \forall\ n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}$ und $\exists\ 0<q<1$

5a) Vor: • $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q < 1 \ \ \forall\ n \geq n_1 \geq n_0$ Beh: • $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Vor: •• $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1 \ \ \forall\ n \geq n_2$ Beh: •• $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$

5b) Beh: • $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \ \forall\ n \geq n_1 \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ ($\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent)

•• $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \ \ \forall\ n \geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$ divergent

Achtung!
Will man das Wurzel- oder Quotientenkriterium anwenden, so darf man sich nicht mit dem Nachweis begnügen, dass $\sqrt[n]{|z_n|}$ bzw $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ fast immer $<1$ ist. Es ist vielmehr unumgänglich, eine feste postive Zahl $q<1$ aufzufinden und die ab einer Stelle nicht mehr von $\sqrt[n]{|z_n|}$ bzw $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ übertroffen wird. Wenn die besagten Wurzeln bzw Quotienten zwar $<1$ sind, aber doch beliebig nahe an 1 herankommen, versagen beide Kriterien (sie bringen keine Entscheidung):

$\sum \frac{1}{n}$ divergiert, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert – aber in beiden Fällen strebt sowohl die Wurzel als auch die Quotientenfolge gegen 1.

Bem: D2.4.2'' Bem 4.) $\Rightarrow$

Falls Quotientenkriterium anwendbar, so ist auch Wurzelkriterium anwendbar. Umkehrung gilt iA nicht.

Das Wurzelkriterium ist mächtiger als das Quotientenkriterium.

Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1$, macht es keinen Sinn, das Wurzelkriterium zu probieren: $1 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow$ keine Entscheidung mit dem Wurzelkriterium möglich. Es gilt sogar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ da auch $\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Bem:1.) Beide Kriterien verlangen „schnelle„, d.h. geometrische Konvergenz, d.h. $|z_n|\le cq^n$ mit $q<1, c>0$,

$|R_n|\le c \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = c\, q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{c}{1-q} q^{n+1}$.

2.) Gilt $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} \ge 1 \Rightarrow \exists$ Teilfolge $|z_{n_k}|\to\infty \Rightarrow$ Divergenz

Gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} > 1 \Rightarrow$ Divergenz $\Leftarrow \left|\frac{z_{n_k+1}}{z_{n_k}}\right| \ge 1$

3.) Falls $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} = 1$ bzw $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1$, so kann

Divergenz oder Konvergenz für $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ vorliegen.

Bem: $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| < \infty \Rightarrow \not\Leftarrow \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$

**S3.2.3** (1717) Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Vor: $(z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2 < \infty$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n w_n| < \infty$ und es gilt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n w_n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |z_n w_n| \le \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2}$

**S3.2.4** (1719) Verdichtungssatz von Cauchy

Vor: $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent

Andere Formulierung:

Sei $(a_k)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$, und sei $b_k = 2^k a_{2^k}$ für $k \ge 0$. Dann sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ entweder beide konvergent oder beide bestimmt divergent.

**D3.2.2**(1750)

1.) Sei $(z_\nu)\subset \mathbb{C}$, dann heißt $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ eine Umordnung von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$: $\Leftrightarrow$

$\exists$ eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $w_\nu = z_{\varphi(\nu)}$ $\forall$ $\nu\in\mathbb{N}_0$.

Andere Formulierung:

Für jede bijektive Abbildung $\Phi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ heißt $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\Phi(k)}$ eine Umordnung der

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

2.) Eine Reihe heißt unbedingt konvergent, falls jede ihrer Umordnungen gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.
Ist eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent, so heißt sie bedingt konvergent.

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist bedingt konvergent, #da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{2k} = ?$

Andere Formulierung 1.) für reelle Zahlen:

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_k')_{k\in\mathbb{N}}$ 2 Folgen reeller Zahlen. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ eine

Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn $a_\ell' = a_{k_\ell}$ $\forall$ $\ell\in\mathbb{N}$,

$\underbrace{k}_{eineFunktion}: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $k(\ell)=k_\ell$ bijektiv, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\rightrightarrows}_{UmordnungderGlieder} \sum_{k=1}^{\infty} a_k'$

**S3.2.5**(1750) Absolut konvergente Reihen sind auch unbedingt konvergent

Vor: Sei $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| \underbrace{\rightrightarrows}_{\nu\to\infty} S<\infty$.

Aussage: Für jede Umordnung $\sum_{\varphi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)}$ von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ gilt $\sum_{\varphi(\nu)=0}^{\infty} |z_{\phi(\nu)}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| = \overline{S} < \infty$

und $S = \sum_{\varphi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$

Bem: 1.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| < \infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathrm{Re}\, a_\nu| < \infty$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathrm{Im}\, a_\nu| < \infty$

2.) $(a_\nu)_{\nu=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| = \infty$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent,

$a_\nu^+ = \frac{1}{2}(|a_\nu| + a_\nu)$, $a_\nu^- = \frac{1}{2}(|a_\nu| - a_\nu)$, $\nu\in\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$

$a_\nu = a_\nu^+ - a_\nu^-$ & $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+ = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^- = \infty$

$\forall$ $S\in\mathbb{R}_+ \cup \pm\infty$ $\exists$ Umordnung $b_\nu = a_{\phi(\nu)}$, $\nu\in\mathbb{N}_0$:

$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = S$ (bzw $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu = S_2 \geq S_1 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu$)

**S3.2.6**(1753) Riemannscher Umordnungssatz

Sei eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in R gegeben, welche konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Sei weiter $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\Phi(k)}$, welche konvergiert bzw bestimmt divergiert und den Wert a hat.

Andere Formulierung

Vor: $a_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ nicht konvergent

Aussage: ∃ Umordnung $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$: von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: $S=\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ für S beliebige Zahl, d.h. die Reihensumme ändert sich beim Umordnen, ist also nicht unbedingt konvergent.

**S3.2.5&6** (1756)

Absolut konvergente Reihen – und nur diese - sind auch unbedingt konvergent

Bem:

1.) Ist eine Doppelsumme $\sum_{\ell,k=1}^{\infty} a_{k_\ell}$ absolut konvergent, dann darf die Summationsreihenfolge vertauscht werden.

2.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|<\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathrm{Re}\ z_\nu|<\infty$ <u>und</u> $\sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathrm{Im}\ z_\nu|<\infty$

3.) Sei $(a_\nu) \subset \mathbb{R}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|=\infty$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent.

Sei $a_\nu^+ := \frac{1}{2}(|a_\nu|+a_\nu) \wedge a_\nu^- := \frac{1}{2}(|a_\nu|-a_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$

$a_\nu = a_\nu^+ - a_\nu^-$, $|a_\nu| = a_\nu^+ + a_\nu^- \wedge \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+ = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^- = \infty$.

∀ $S \in \mathbb{R}$ oder $S=\pm\infty$ ∃ eine Umordnung $b_\nu = a_{\varphi(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, mit

$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = S$ (bzw $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu = S_2 \geq S_1 = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$)

## Doppelreihen

**D3.2.3**(1765)

// **D2.5.1**(1550) Doppelfolge reeller (komplexer) Zahlen

// Abbildung a: $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{R}$ #(C)#: $(n,m) \mapsto z_{nm}$, $(z_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$

$\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ mit $z_{kl}$ Doppelfolge reeller (komplexer) Zahlen nach D2.5.1 heißt Doppelreihe. Mögliche Bezeichnungen.

$z_{nm} \in \mathbb{R}$ #(C)#, $\sum_{n,m=1}^{\infty} z_{nm} := (S_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$, $S_{nm} := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} z_{kl}$ ∀ $n,m \in \mathbb{N}$.

**D3.2.4** (1765)

- $(S_{kl})_{k,l=1}^{\infty} \underbrace{\rightarrow}_{k,l\to\infty} S\in\mathbb{R}$ #(C)#: $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ heißt konvergent und $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}=S=\lim\limits_{k,l\to\infty} S_{kl}$.
- • • $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} z_{kl}$ heißt absolut konvergent: $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}|$ konvergiert, $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} |z_{kl}|<\infty$

  Schreibweisen: Absolutpartialsumme: $\overline{S}_{nm}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} |z_{kl}|$,

  Folge der Absolutpartialsummen: $(\overline{S}_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$.

2.) Cauchysche Abzählung $\mathbb{N}_0^2$ nach den Diagonalen $\Delta_n:=\{(k,l)|k+l=n\}$

$(0,0)^{(0)}$ $(0,1)^{(2)}$ $(0,2)^{(5)}$ $(0,3)^{(9)}$ ….

$(1,0)^{(1)}$ $(1,1)^{(4)}$ $(1,2)^{(8)}$ ….

$(2,0)^{(3)}$ $(2,1)^{(7)}$ $(2,2)^{(11)}$ …..

$(3,0)^{(6)}$ $(3,1)^{(10)}$ …

Bijektive Abb $\varphi$: $\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0^2$ mit $\varphi(0):=(0,0)$ und ist $\varphi(j)=(k,l)$ $\Rightarrow$

$\varphi(j+1):=\begin{cases}(k-1,l+1) & \text{für } k\neq 0\\ (l+1,0) & \text{für } k=0\end{cases}$.

Allgemein: Sei $\varphi=(k,l)$: $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}^2$, $\varphi(j)=(k(j),l(j))$ $\forall$ $j\in\mathbb{N}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}^2$, d.h. eine bijektive Abb von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^2$. Berechnung des Wertes $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ durch Berechnung des Wertes der Abzählung $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$ mit S3.2.7

**S3.2.7** (1767)

Vor: $(z_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, bij. Abb $\varphi=(k,l)$: $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}^2$, $\varphi(j)=(k(j),l(j))$ $\forall$ $j\in\mathbb{N}$,

d.h. $\varphi$ zählt $\mathbb{N}^2$ ab (siehe oben), $a_{(k(j)l(j))}{}_{j=1}^{\infty}$

Aussagen: • $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}| \underbrace{=}_{D3.2.4} S \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{\infty} |z_{k(j)l(j)}| \underbrace{=}_{D3.2.4} S \Rightarrow$ • • $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}=\sum\limits_{j=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$

**S3.2.8** (1768) $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}=S=\lim\limits_{k,l\to\infty} S_{kl}$ $\left\{\begin{array}{l} und \bullet \sum\limits_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}=z_k\ \forall k\in N \underbrace{\Rightarrow}_{S2.5.2} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}) \\ und \bullet\bullet \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{k\ell}=z_{\ell}\ \forall \ell\in N \underbrace{\Rightarrow}_{S2.5.2} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}) \end{array}\right\} = \sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{k\ell}=S$

**S3.2.9**(1769) Cauchyscher Doppelreihensatz

Vor: $(z_{kl})_{k,l=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$, $S_{nm} := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} z_{kl}$ $\forall$ n,m$\in\mathbb{N}$, $\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl} := (S_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$.

# Bezeichnungen k Zeilenindices, $\ell$ Spaltenindices

Aussage: $\sum_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}|$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}|)$ konvergiert, d.h.

Zeilenreihen $\sum_{\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}|$ konvergieren $\forall$ k$\in\mathbb{N}$

und

$\sum_{k=1}^{\infty} |\sum_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}| \le \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}|) < +\infty$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{\ell=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |z_{k\ell}|$ konvergiert, d.h.

Spaltenreihen $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{k\ell}|$ konvergieren $\forall$ $\ell\in\mathbb{N}$

und

$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} z_{k\ell}| \le \sum_{\ell=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{\infty} |z_{k\ell}|) < +\infty$

Andere Formulierung frei nach Skript Uni Greifswald

Zusammenhang zwischen $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$, $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} z_{ij}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z_{f(k)}$?

Vor: $z_{ij} \in \mathbb{C}$, i,j$\in\mathbb{N}$, f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bijektiv,

$\exists$ K$\in\mathbb{R}$ $\forall$ endliche M$\subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $\sum_{(i,j)\in M} |z_{ij}| \le K$.

Aussagen: • Jede Zeilensumme $Z_i := \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$ konvergiert

•• Jede Spaltensumme $S_j := \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$ konvergiert

••• $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$ konvergieren. $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} S_j =: S$

•••• $\sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)} = S$

Bem:m Bezeichnung: $S = \sum_{i,j=0}^{\infty} z_{ij}$

Bem und S3.2.5 $\Rightarrow$ $\forall$ bij f $\exists$ •••• $S = \sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)}$.

Andere Formulierung

Vor: $z_{kl} \in \mathbb{C}$, k,l$\in\mathbb{N}_0$, $M := \sup\{\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} |z_{kl}| : n\in\mathbb{N}\} < \infty$

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{\infty} z_{kl})$, $\sum_{l=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} z_{kl})$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{\substack{k,l=0\\k+l=n}} z_{kl})$ konvergieren absolut und haben denselben Grenzwert.

Andere Formulierung frei nach Uni Dortmund

Vor: $z_{ij} \in \mathbb{K}$ #$\mathbb{C}$#, $i,j \in \mathbb{N}$,

$\exists$ Abzählung $((c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller Elemente $z_{ij}$: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ absolut konvergent.

Aussage:

- • Zeilensummen $Z_i = \sum_{j\in N}^{\infty} z_{ij}$ absolut konvergent
- • • Spaltensummen $S_j = \sum_{i\in N}^{\infty} z_{ij}$ absolut konvergent
- • • • Es gilt $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i = \sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij}$.

**S3.2.9'** (1779) Großer Umordnungssatz

(Originalfassung siehe unten „Andere Formulierung")

Vor: J abzählbar unendliche Menge #von Indices#,

Abb in $\mathbb{K}$ $j \mapsto a_j$: $\sum_{j\in J} a_j$ absolut konvergent,

Menge $J_k$, $k\in\mathbb{N}$ ist Zerlegung von J.

Aussage: • $\sum_{j\in J_k} a_j$ absolut konvergent • • $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j\in J_k} a_j\right)$

Andere Formulierung:

Sei J eine abzählbar unendliche Menge und seien $J_k$, $k\in\mathbb{N}$, eine Zerlegung von J. Sei ferner $j \mapsto a_j$ eine Abb von J in $\mathbb{K}$, so, dass $\sum_{j\in J} a_j$ <u>absolut</u> konvergent $\left(\sum_{j\in J} |a_j| < \infty\right)$.

Dann konvergieren auch alle (*) $\sum_{j\in J_k} a_j$, $j\in J_k$ absolut und es gilt

$$(**) \quad \sum_{j\in J} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j\in J_k} a_j\right)$$

Bem: 1.) Es darf $S=\pm\infty$ gesetzt werden.

2.) Ist eine Doppelsumme $\sum_{\ell,k=1}^{\infty} a_{k_\ell}$ absolut konvergent, dann darf die Summationsreihenfolge vertauscht werden.

**S3.2.10** (1781) Vertauschung von Grenzwerten

Vor: Seien Zahlen $a_{nk} \in \mathbb{K}$ $\forall$ $n,k \geq 0$ gegeben, derart dass folgendes gilt:

a) $\exists$ $b_k \in \mathbb{R}_+$, für die gilt: $|a_{nk}| \leq b_k \quad \forall\ n,k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$.

b) Für jedes feste $k \geq 0$ ist die Folge $(a_{nk})_{n=0}^{\infty}$ konvergent und der Grenzwert sei mit $a_k$ bezeichnet.

Aussage: • $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, für jedes $n \geq 0$, und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent* und es gilt

• • $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

**D3.2.5** (1782) Expotentialfunktion für komplexe Zahlen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! \quad \forall\ z\in\mathbb{C}.$$

**S3.2.11** (1783)Expotentialreihe

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.
- • $\forall\ z\in\mathbb{R}$ gilt weiter $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! = \exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.

**S3.2.12**(1783) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so sind es auch die Reihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$.

**D3.2.6**(1784)Für Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ in $\mathbb{K}$ heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^{k} b_{k-j} a_j \ \forall\ k\geq 0$ das Cauchy-Produkt der Ausgangsreihen.

**S3.2.13**(1784) Cauchy-Produktsatz

Vor:Seien $(z_n),(w_n)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|<\infty$ abs konv, $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|<\infty$ abs konv.

Beh:Ordnet man alle Produkte $z_j w_k$, $j,k\in\mathbb{N}_0$ in einer Folge $(P_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ an #wie z.B unten nach 2.)#, so gilt

1.) $\sum_{\ell=0}^{\infty} |P_\ell| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|\right)$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell = \left(\sum_{j=0}^{\infty} z_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right)$

2.)Speziell gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} z_j w_{n-j}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} z_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} w_k\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} z_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right).$$

$$\begin{array}{llllll} z_0w_0 & z_0w_1 & z_0w_2 & z_0w_3 & \ldots\ldots\ldots \\ z_1w_0 & z_1w_1 & z_1w_2 & z_1w_3 & \ldots\ldots\ldots \\ z_2w_0 & z_2w_1 & z_2w_2 & z_2w_3 & \end{array}$$

Gilt nicht, $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$, $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ wenn konvergent, aber nicht abs konverget

Andere Formulierung:

Vor:$(z_n),(w_n)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|<\infty$.

Beh: Dann ist mit $c_k = \sum_{\nu=0}^{k} z_\nu w_{k-\nu}$, $k\in\mathbb{N}$, die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$

absolut konvergent und es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\right)$.

Andere Formulierung frei nach Skript Uni Greifswald

Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{z_n}_{\in C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{w_n}_{\in C}$ absolut konvergent,

Aussage: $\sum_{i,j=0}^{\infty} z_i w_j = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\sum_{i=0}^{n} z_i w_{n-i}}^{d_n} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} z_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j\right)$

Andere Formulierung

Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide absolut konvergent

und gilt D3.2.6, so folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

## 3.3(1800) Dual- und Dezimalzahlen

Im Folgenden sei $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fest gegeben.

**D3.3.1**(1800) Die Zahl g heiße im Weiteren die Basis(für die g-adische Zahldarstellung). Die ganzen Zahlen $0,1,...,g-1$ heißen die Ziffern der Darstellung.

Eine Reihe der Form $\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$ heißt die g-adische Reihe, falls die $z_k$ Ziffern sind (also $z_k \in \{0,1,...,g-1\}$ $\forall$ k) und falls $z_k < g-1$ für unendlich viele k gilt.

Offenbar ist jede g-adische Reihe konvergent, denn $\sum_{k=1}^{\infty} (g-1)/g^k$ ist eine konvergente Majorante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g}{g^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{g^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{g}}_{\leq 1}\right)^k$$ konv., da geom Reihe.

Im Fall g=10 sprechen wir auch von Dezimalreihen, für g=2 von Dualreihen und für g=16 von Hexadezimalreihen.
#Sinn der Festlegung: $z_k < g-1$ für unendlich viele k siehe S3.3.1#

**S3.3.1**(1801)g-adische Zahldarstellung reeller Zahlen (siehe auch **A3.3.4**)
Jedes $\xi \in [0,1)$ besitzt eine eindeutige Darstellung als g-adische Reihe, d.h. es gibt eindeutig bestimmte $z_k \in \{0,1,,...,g-1\}$mit $z_k < g-1$ (siehe Bem 2.) unten) für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$, sodass $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$.

Zusammenfassung:

$r_0 \in [0,1)$, $g \geq 2$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k$, $\infty$ viele $z_k < g-1$: $r_{k_0} = \sum_{k_0+1}^{\infty} z_k/g^k < g^{-k_0}$ $\forall$ $k_0 \in \mathbb{N}$.

Bem:1.) Diese Darstellung heißt Dezimalbruchentwicklung, falls g=10, Dualbruchentwicklung, falls g=2.
2.) Verlangt man nur $z_k \leq g-1$, so geht die Eindeutigkeit verloren: $\underbrace{g^{-k_0+1} = \sum_{\nu=k_0}^{\infty} \frac{g-1}{g^{\nu}}}_{\text{2 Darstellungen für die gleiche Zahl}}$

**S3.3.2**(1803) Das Intervall [0,1) ist überabzählbar

**D3.3.2**(1803) Wir nennen manchmal eine g-adische Reihe auch g-adische Entwicklung einer Zahl und schreiben $\sum_{k=1}^{\infty} z_k/g^k=0,z_1z_2z_3...$

Für g=10 bzw g=2 bzw g=16 sprechen wir auch von einer dezimalen bzw dualen bzw hexadezimalen Darstellung einer Zahl.

Eine solche Entwicklung heißt periodisch, falls es $k_0,p\in\mathbb{N}$ gibt, für welche $z_{k+p}=z_k \ \forall \ k\geq k_0$. Das kleinste p mit dieser Eigenschaft heißt auch die Periodenlänge der Entwicklung.

**S3.3.3**(1805) Die g-adische Entwicklung einer Zahl $\xi\in[0,1)$ ist genau dann periodisch, wenn $\xi\in\mathbb{Q}$ ist.

Bem:(.)Es gilt $x_nb^{-n}=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$

(da nach($\alpha$) $x_nb^{-n}=x-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}-\sum_{\nu=m}^{n-1} a_\nu b^{-\nu}=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu b^{-\nu}$) $n\geq m$.

(..)Für obige $a_n$ gilt nicht: $\{a_n=b-1$ für fast alle n)$\}$

## 3.4(1900) **Abelsche partielle Summation**

**S3.4.1**(1900) (Abelsche partielle Summation)

Vor:$(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $A_n:=\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$, $n\in\mathbb{N}_0$

Beh:$\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu=\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})+A_nz_{n+1}$

Bem:$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})$ konvergent & $\exists \lim_{n\to\infty} A_nz_{n+1} \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ ist kvgt

**S3.4.2**(1900) Dirichlet-Kriterium (DirK). Siehe auch S3.4.4

Bez:$(a_n)\searrow 0$ bedeutet monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

Vor: $a_n\in\mathbb{R}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty}\searrow 0$ (d.h. $a_n\geq 0$) $\wedge$

$\exists\ k>0$: $B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$ , $|B_n|\leq k$, $b_n\in\mathbb{C}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ $\forall$ n

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty} a_kb_k$ ist konvergent.

**S3.4.3**(1901) (Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond)

Vor:$(w_\nu)$,$(z_\nu)\subset\mathbb{C}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu-z_{\nu+1}|<\infty$ und $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$ kvgt ($A_n=\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \underset{n\to\infty}{\to} A$)

Beh:(.)$\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, (..) $\sum_{\nu=0}^{\infty}|A_\nu(z_\nu-z_{\nu+1})|<\infty$ und (...) $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ ist kvgt

Bem: Spezialfall

Sei $(w_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $(z_\nu)_{\nu=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $(z_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ monoton & beschränkt,

$\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent $\Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ konvergent

**S3.4.4** (1902) Konvergenzkriterium nach Dedekind

Vor: $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu - z_{\nu+1}| < \infty$, $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ und sei $\left(\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu\right)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt.

Beh: $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})$ konvergiert, wobei $\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1})| < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Bem: <u>**S3.4.2** (1900) Dirichlet-Kriterium (DirK):</u>

Vor: $a_n \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ (d.h. $a_n \geq 0$) &

$\exists\ k>0$: $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$, $|W_n| \leq k$, $w_n \in \mathbb{C}$, $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ $\forall\ n$

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k$ ist konvergent,

$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k (a_k - a_{k+1})| < \infty$ & $\sum_{k=0}^{\infty} w_k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (a_k - a_{k+1})|$.

<u>Ist Sonderfall von **S3.4.4**</u>

Zusammenfassung

Vor:

| |
|---|
| Für alle: $a_n \in \mathbb{R}$, $w_\nu, z_\nu \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$, $k>0$, $A_n = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$ $n \in \mathbb{N}_0$ |

| **S3.4.1** (Abel) | **S3.4.2** (DirK) | **3.4.3** (DBR) | **S3.4.4** (Dedekind) |
|---|---|---|---|
| $(w_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$, <br> $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ | $(a_n)_{n=0}^{\infty} \searrow 0$ ( $a_n \geq 0$) <br> $\lvert \sum_{k=0}^{n} z_k \rvert \leq k$ | $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert z_\nu - z_{\nu+1} \rvert < \infty$ <br> $A_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} A$ (konv) <br> $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert z_\nu - z_{\nu+1} \rvert < \infty$ | $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert z_\nu - z_{\nu+1} \rvert < \infty$ <br> $z_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$. <br> $\lvert \left(\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu\right)_{n=0}^{\infty} \rvert \leq k$ |

Aussagen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu =$ <br> $\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu + z_{\nu+1})}_{*konv} +$ <br> $\underbrace{A_n z_{n+1}}_{*\exists \lim_{n\to\infty} A_n z_{n+1}} \underset{Falls}{\Longrightarrow} *$ <br> $*: \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu z_\nu$ konv | $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ konv | $\exists \lim_{n\to\infty} z_n$, <br> $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) \rvert < \infty$ <br> $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ konv | $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lvert A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) \rvert < \infty$ <br> $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (z_\nu - z_{\nu+1}) =$ <br> $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu z_\nu$ konvergent |

## 3.5(2000) Potenzreihen

**D3.5.1**(2000) Sei $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C}$

eine <u>Potenzreihe</u>(PR)<u>um</u> Entwicklungspunkt $z_0$ und Koeffizienten $a_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

**S3.5.1**(2000) Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Dann gilt:

a) Die Reihe konvergiert trivialerweise für $z=z_0$ und ihr Wert ist gleich $a_0(z_0-z_0)=a_0 0^0=a_0$

b) Ist die Reihe für ein $z=z_1 \neq z_0$ konvergent, so ist sie absolut konvergent $\forall\ z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<|z_1-z_0|$

**S3.5.2**(2001) Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ $\exists$ genau eine Zahl R mit $0 \le R \le \infty$, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der Eigenschaft:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & \forall z \in C \text{ mit } |z-z_0|<R \\ \text{divergiert} & \forall z \in C \text{ mit } |z-z_0|>R \end{cases}$$

Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard),

wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$

Bem:1.) $|z-z_0|=\infty$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$ bedeutet $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}=0$, $1/0:=\infty$
$|z-z_0|=0$ bedeutet hier Konvergenz nur in $z_0$ gegen $a_0$.
2.) Das Konvergenzverhalten der PR für $|z-z_0|= R$ muss im Spezialfall untersucht werden.

Andere Formulierung:

Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gegeben, und sei $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ ihr Konvergenzradius. Dann ist die Reihe absolut konvergent $\forall\ z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<R$ und divergent $\forall\ z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0|>R$, wobei für R=0 die erste und für $R=\infty$ die 2. Menge leer ist.

**S3.5.3**(2004) Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen

Sei eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit einem Konvergenzradius

$R>0$ gegeben und sei $0<r<R \Rightarrow \frac{1}{R}<\frac{1}{r}$. Dann konvergiert die

Potenzreihe gleichmäßig für alle z mit $|z-z_0| \overset{\le}{\underset{!}{}} r$.

Andere Formulierung aus wikiversity:

Es sei $(c_n)_{n \in N}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$.

Die Potenzreihe $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ sei für eine komplexe Zahl

$z=b$, $b\neq a$, konvergent (d.h. $|z-z_0|<R$ mit $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$)
Dann ist für jeden reellen Radius r mit $0<r<|b-a|$ die Potenzreihe f(z) auf der abgeschlossenen Kreisscheibe B(a,r) punktweise absolut und gleichmäßig konvergent

Andere Formulierung:

Sei $0<\delta<1/r-1/R$. Nach Def $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|}\leq\delta+(1/R)<1/r\ \forall\ n\geq n_0$, woraus Für $|z-z_0|\leq r$ folgt, dass $|z-z_0||a_n|\leq r^n(\delta+1/R)^n\ \forall\ n\geq n_0$. Wegen $r(\delta+1/R)<1$ folgt Beh mit dem Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz.

**S3.5.4**(2005) Vor:Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $a_n\neq0\ \forall\ n\geq n_0$ (fast alle), $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Beh:In **S3.5.2** gilt $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

**S3.5.5**(2050) Vor: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ & $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ haben KR R bzw $\rho$

1.)dann besitzen die „differenzierte" Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$

und die „integrierte" Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}(z-z_0)^{n+1}$ <u>denselben </u>KR R

2.)Mit $c_n:=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|<\min\{R,\rho\}$:

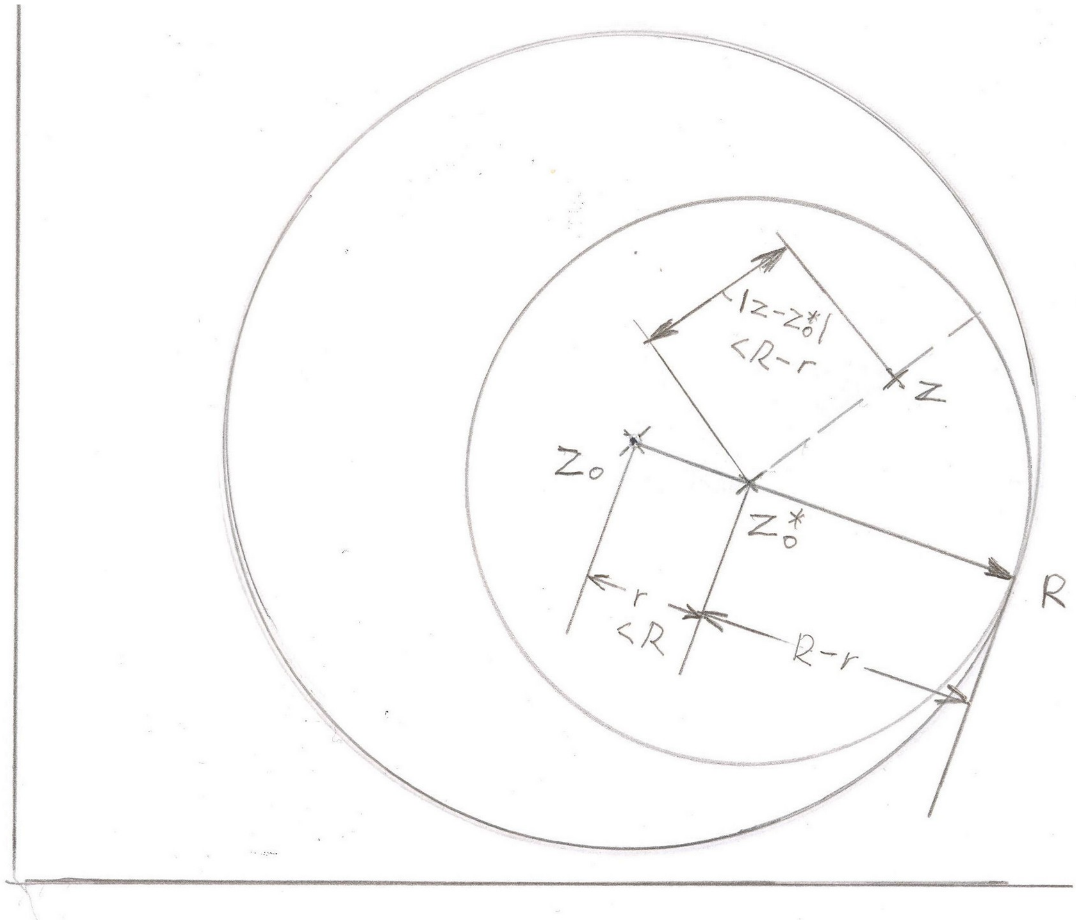
$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k\right)\ \text{(Cauchy- Produkt)},$$

wobei alle 3 Reihen absolut konvergieren.

Der KR von $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ ist daher $\geq\min\{R,\ \rho\}$

Bez:Die Folge $(c_n)$ nennt man Faltung der Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$

**S3.5.7**(2053) (Umentwicklung einer PR)




Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR $R>0$. Sei $z_0^*$ mit $|z_0-z_0^*|=r<R$ fest gewählt.

Beh: $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0^*|<R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^k$,

wobei $\forall\ k\in\mathbb{N}_0$, $b_k := \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} a_\nu (z_0^* - z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert

**S3.5.8**(2056) (Abelscher Grenzwertsatz)

Vor:Die PR $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ habe KR 1 & $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beh: $\forall$ Folgen $(x_n)\subset(1,-1)\subset\mathbb{R}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\nearrow 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k {x_n}^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bem:S3.5.6 2.) $\Rightarrow \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = (\sum_{j=0}^{\infty} 1*z^j)(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k)\ \# \underset{S3.5.6\,2.)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} 1*a_{n-k}z^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1*a_{n-k}\ \#= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} 1*a_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \text{ für } |z|<1.$$

Andere Formulierung:

Seien $a_k \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Dann

konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \forall \ x \in (-1,1]$ (Konvergenzradius 1), und es

gilt $\lim_{x \to 1_-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

## **3.6**(2100) **Spezielle Potenzreihen und Funktionen**

Sachverhalte von S3.6.1 bis D3.6.1 werden teilweise ab D3.6.2 noch einmal entwickelt, jedoch aus etwas anderer Definitionsgrundlage.

**S3.6.1**(2100) Eigenschaften der komplexen Expotentialfunktion

1.) $\forall \ z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) = e^z = \lim_{n \to \infty} (1+z/n)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu !}$ .

*2.) $\forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z_1+z_2} = e^{Z_{l2}} e^{z_2}$ (Additionstheorem, Funktionalgleichung)*

Andere Formulierung:

$\forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $\exp(z_1+z_1) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

*3.) $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z}$, $e^z \neq 0$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ $\forall \ z \in \mathbb{C}$.*

4.) $|e^z| = 1 \underset{3.)}{\Leftrightarrow} \mathrm{Re}\ z = 0$

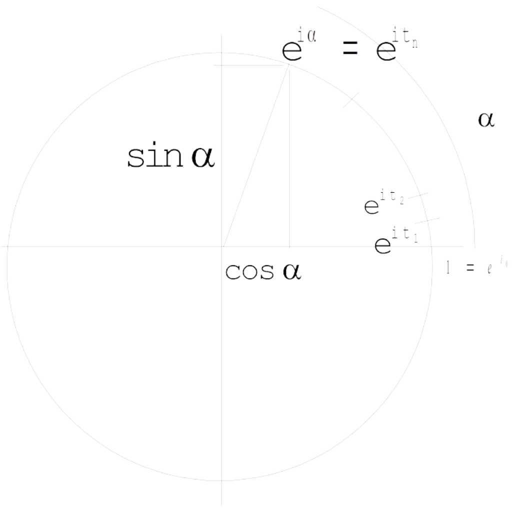
5.) $\forall \ n \in \mathbb{N}$ und $\forall \ x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$, $\exp(x/n) = \sqrt[n]{\exp(x)}$

$(e^{\frac{x}{n}})^n = e^x$, $(\exp(\frac{x}{n}))^n = \exp x$

**S3.6.2**(2103)

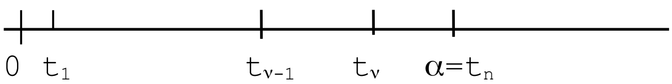
Vor: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha>0$ und der Kreisbogen $C_\alpha$: Summe der $e^{i\Delta t}$, $e^{it} \neq e^{i\alpha}$ $\forall$ $0 \leq t \leq \alpha$.
$\forall$ $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n: 0=t_0<t_1...<t_n=\alpha$ mit $\Delta t_\nu := t_\nu - t_{\nu-1} = \alpha/n$ für $\nu=1,2,..n$, eine Zerlegung von $[0,\alpha]$ und $L(Z_n) := \sum_{\nu=0}^{n} |e^{it_\nu} - e^{it_{\nu-1}}|$.

Beh: $\exists$ $L_\alpha := \lim_{n\to\infty} L(Z_n)$ und es gilt $L_\alpha = \alpha$. # $\overset{e}{z} = e^{i\alpha} = e^{iL_\alpha}$ #




gleichschenkliges Dreieck $\underset{n\to\infty}{\rightleftarrows}$ Kreissektor $\Delta t_\nu$

$e^{i\alpha} = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} + i(\mathrm{Im}\, e^{i\alpha})$, $Z_n = 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... t_{\nu-1} < t_\nu < ... < t_n = \alpha$



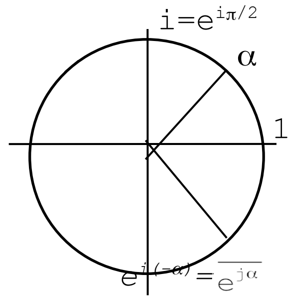

$\Delta_\nu = t_\nu - t_{\nu-1} = \alpha/n$, $\nu=1,2,...k$. $L(Z_n) = \sum_{\nu=1}^{n} |e^{it_\nu} - e^{it_{\nu-1}}| = \sum_{\nu=1}^{n} |\underbrace{e^{it_{\nu-1}}}_{1}|\,|e^{i\nabla_\nu} - 1| = \sum_{\nu=1}^{n} |e^{i\nabla_\nu} - 1|$.

*Wo liegen $e^{it_\nu}$, $\nu=0,1,...,n$. Abstände gleich groß gewählt.*

Ein anderes Vorgehen bei den folgenden Definitionen und Sätzen, ohne S3.6.2, siehe P44f

**D3.6.1**(2104) Sei $2\pi$ der Umfang des Einheitskreises. Dann heißt $\alpha \in (-\pi,\pi]$ der Bogenmaß-Winkel des Kreisbogens von 1 nach $e^{i\alpha}$ auf dem Einheitskreis. Wegen $e^{i(\alpha+k2\pi)} = e^{i\alpha}$ $\forall$ $k \in \mathbb{Z}$ sei $\alpha$ geradlinig von $(-\pi,\pi]$ auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Bem: In D3.6.1 wird bei $\alpha>0$ der Einheitskreis von 1 bis $e^{i\alpha}$ entgegen dem Uhrzeigersinn (Math pos) durchlaufen. $e^{i\alpha} = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} + \mathrm{Im}\, e^{i\alpha}$
Länge Bogenmaß entspricht Winkel



**D3.6.2**(2105)

1.) $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ sei

$\cos\alpha := \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} = 1/2(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})$ und $\sin\alpha := \mathrm{Im}\, e^{i\alpha} = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})$.

Bem:Mit Rechenregeln für komplexe Zahlen folgt für $x\in\mathbb{R}$:

1.) $e^{ix} = \cos x + i*\sin x$

2.) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3.) $|\cos x|, |\sin x| \le 1$ und $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2.)Allgemeiner sei $\forall\ z\in\mathbb{C}$

● $\cos z := 1/2(e^{iz}+e^{-iz})$ und $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$

Andere Formulierung

●● $\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} -,+..$

$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} -,+...$

Bem:(.)Beide Potenzreihen konvergieren absolut $\forall\ z\in\mathbb{C}$ ...

Für sin: $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 0, n\ ungeade \\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, n\ ungerade \end{cases} \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} 0 \Rightarrow \rho = \frac{1}{0} = \infty$, ....ähnlich für cos

(..) $\begin{cases} \cos x \in R \\ \sin x \in R \end{cases} \forall\ x\in \mathbb{R}_+$

Verbindung ● ⇔ ●● siehe S3.6.3 2.) Gleichungen ⊗

3.) $\forall\ z\in\mathbb{C}$ mit $\cos z \neq 0$ sei $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ (tangens z)

*$\forall\ z\in C$ mit $\sin z\neq 0$ sei $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ (cotangens z)*

**S3.6.3**(2106) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

$\forall\ z = x+iy,\ z_1, z_2 \in\mathbb{C}$ gilt:

1.) ● Grundlage D3.6.2 2.) ●

$\exp(iz) = e^{iz} = \cos z + i\sin z$ (Eulersche Formel),

$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

$\forall\ x\in\mathbb{R}$ gilt: $\exp(ix) = e^{ix} = \underbrace{\cos x}_{\in R} + i \underbrace{\sin x}_{\in R} \Rightarrow \cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}),\ \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$

2.) $\cos z = \cos(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion, KR=∞.

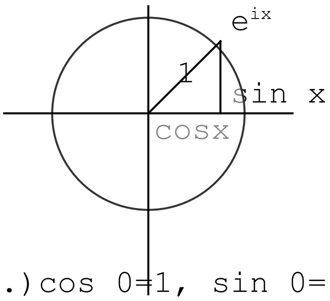
$\sin z = -\sin(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion, KR=∞.

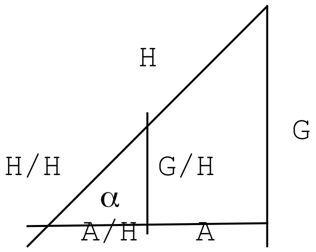
⊗ $\cos z = 1/2(e^{iz}+e^{-iz}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = \cos(-z)$, entsprechend

⊗ $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = -\sin(-z)$ oder $\sin(-z) = -\sin z$

3.) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1 \cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$ (Additionstheoreme)
$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1 \cos z_2-\cos z_1 \sin z_2$ Funktionalgleichungen)
speziell: $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

4.) $\forall\ x\in R$: $|e^{ix}| \underset{1.)}{=} |\underbrace{\cos x}_{\in R} + i \underbrace{\sin x}_{\in R}| = \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x} \underset{3.)}{=} 1$




Trigonometrie:
$\sin \alpha=G/H=(G/H):(H/H)$

$\cos \alpha=A/H=(A/H):(H/H)$

5.) $\cos 0=1$, $\sin 0=0$, $\cos \pi/2=0$, $\sin \pi/2=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $\cos \pi=-1$,

$\sin \pi=0$, $\cos 3\pi/2=0$, $\sin 3\pi/2=-1$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$.

6.) $\cos(z+\pi)=-\cos z$, $\sin(z+\pi)=-\sin z$, $\cos(z+k2\pi)=\cos z$,
$\sin(z+k2\pi)=\sin z$, $e^{z+i2k\pi}=e^z \quad \forall\ k\in Z$.

7.) $\tan(z_1+z_2)= \dfrac{\tan z_1 + \tan z_2}{1-\tan z_1 \tan z_2}$

8.) $\forall\ z=x+iy \in C$ gilt $\cos^2 z+\sin^2 z=1$, $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\, z}$

**D3.6.4** *(2105)* Hyperbolische Funktionen

$\cosh z := 1/2(e^z + e^{-z})\ \forall z \in \mathbb{C}$ (Cosinus hyperbolicus)

$\sinh z := 1/2(e^z - e^{-z})\ \forall z \in \mathbb{C}$ (Sinus hyperbolicus)

$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \cosh z \neq 0$ (Tangens hyperbolicus)

$\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z},\ \forall z \in \mathbb{C},\ \cosh z \neq 0$ (Cotangens hyperbolicus)

**S3.6.4** (2108) Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen

$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1.) $\cos z = \cosh(iz)$, $\sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz)$, $e^z = \cosh z + \sinh z$

2.) $\cosh z = \cosh(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$, gerade Funktion.

$\sinh z = -\sinh(-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$, ungerade Funktion

KR $R = \infty$

3.) $\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$ (Additionstheoreme)

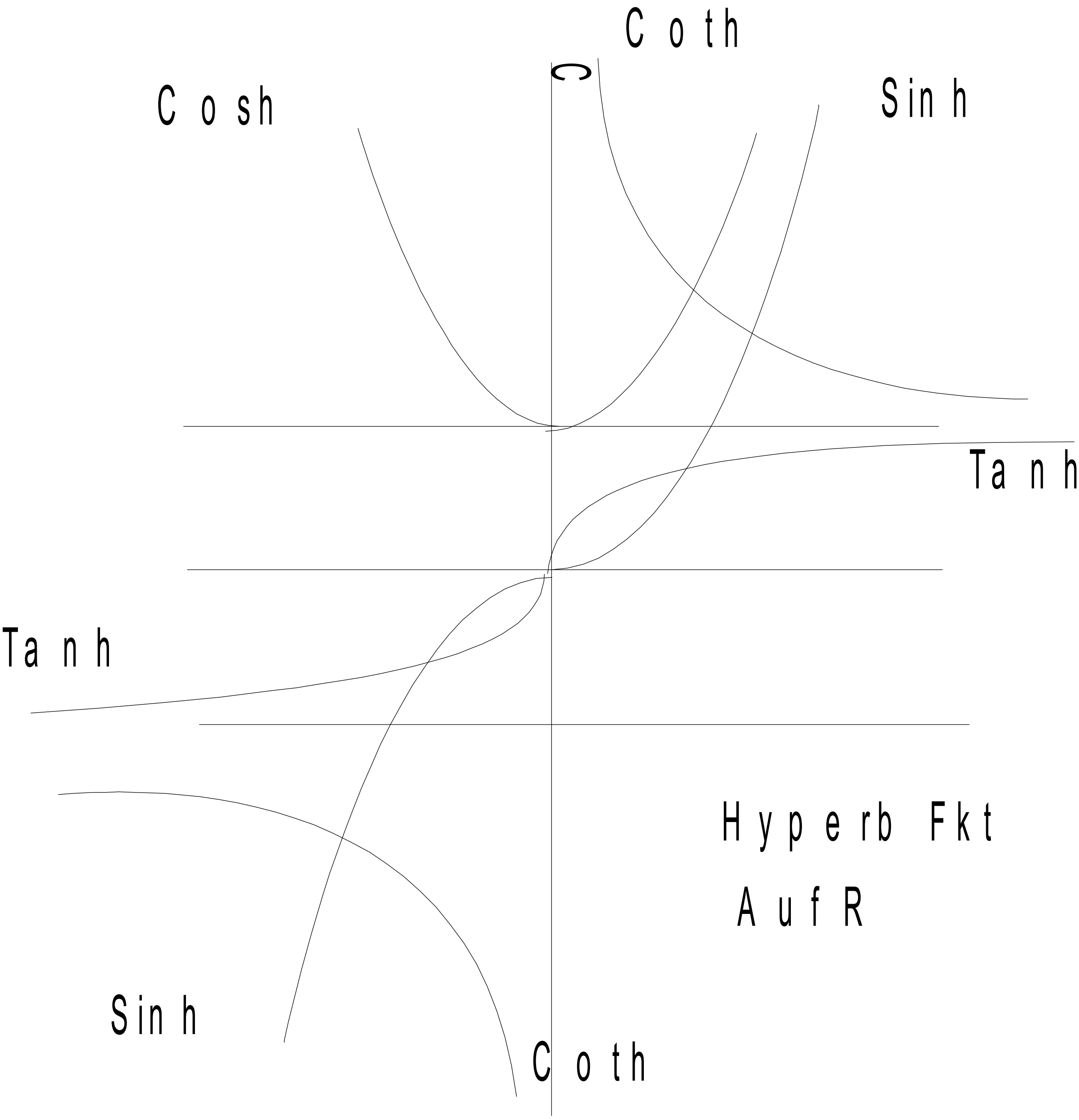
$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

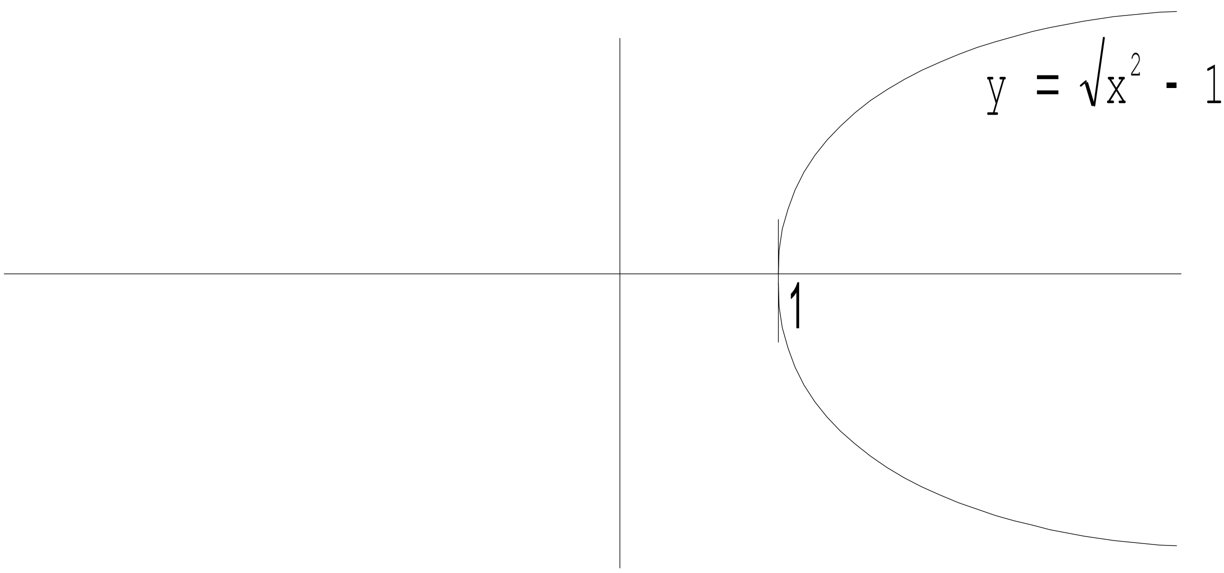
speziell: $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

4.) Auf $\mathbb{R}$ gilt: $\cosh x \neq 0$, $\sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bem: $\cos z$ und $\sin z$ sind in $\mathbb{C}$ nicht beschränkt.

Beachte: $\cos ix = \cosh x$, $x \in \mathbb{R}$


Coth
Cosh
Sinh
Tanh
Tanh
Hyperb Fkt
Auf R
Sinh
Coth


$y = \sqrt{x^2 - 1}$
1