**A0.1.1**

a)Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C\subset A \Leftrightarrow A\cup C = A$

#Vorbemerkung:Es wird wiederholt D0.1.3,Bem1 benutzt:

# $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1\subset M_2$ <u>und</u> $M_2\subset M_1$

Bew: Z.z.(.)$C\subset A \Rightarrow A\cup C=A$ (..)$A\cup C=A \Rightarrow C\subset A$

(.) $x\in A \underbrace{\Rightarrow}_{C\subset A} x\in A \vee x\in C \Rightarrow x\in A\cup C \wedge x\in A \Rightarrow A\hat{}C$ ° A

$x\in A\hat{}C$ ⊏ $x\in A \vee x\in C \underbrace{\Rightarrow}_{C\subset A} x\in A \Rightarrow x\in A\hat{}C \wedge x\in A \Rightarrow A\hat{}C \subset A \Rightarrow$

$A\hat{}C$ ° $A \wedge A\hat{}C \subset A$ ⊏ $A\cup C = A$

kürzer: $x\in A\cup C \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 1} x\in A$ oder $x\in C \underbrace{\Leftrightarrow}_{C\subset A} x\in A$

(..)Sei $x\in C \Rightarrow x\in A$ oder $x\in C \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 1.)} x\in \underbrace{A\cup C}_{=A} \Rightarrow x\in A$.

Also $C\subset A$

b)Es seien A,B Mengen. Zeige: $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B = A$

Bew:z.z:(.)$A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$ (..)$B\cap A = A \Rightarrow A\subset B$

(.)Unabhängig von $A\subset B$ gilt wegen $x\in B\cap A \Rightarrow x\in B \wedge x\in A \Rightarrow$

$x\in A \Rightarrow$ $B\cap A \subset A$

$x\in A \underbrace{\Rightarrow}_{A\subset B} x\in B \wedge x\in A \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)} x\in A \wedge x\in B\cap A \Rightarrow B\cap A \supset A$

kürzer: $x\in B\cap A \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)} x\in A \wedge x\in B \underbrace{\Leftrightarrow}_{A\subset B} x\in A$

(..)$x\in A \Rightarrow x\in B\cap A \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)} x\in B \wedge x\in A \Rightarrow x\in B$. Also $A\subset B$

andere Formulierung

(.)Es gilt für beliebige Mengen A,B:$A\cap B\subset A$

(denn $x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in A$)

Es sei $A\subset B$. Z.z. vgl oben : $A\subset A\cap B$

Sei $x\in A\subset B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B$ $x\in A\cap B \Rightarrow x\in A\cap B$

(..)Es gelte $A\cap B=A$ . Z.z.: $A\subset B$

Sei $x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in B$

(.) und (..)$\Rightarrow$ Beh

**A0.1.2**

Finde diejenige Menge A, deren Potenzmenge so wenig Elemente enthält wie nur möglich

Lös:Die Potenzmenge einer Menge ist niemals leer, denn sie enthält immer die Teilmengen $\emptyset$ und A; diese sind genau dann gleich, wenn A die leere Menge ist. Also gilt: Ist $A\neq\emptyset$ , so hat $P_{(A)}$ Mindestens 2 Elemente. Daher ist die gesuchte Menge $A=\emptyset$

**A0.1.3**

Charakterisiere alle Mengen A,deren Potenzmenge genau 2 Elemente hat

**A0.1.4**

Charakterisiere alle Mengen A, deren Potenzmenge nur endlich viele Elemente hat

**A0.1.5**

Seien $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ und $M=AxB=\{(a_i,b_j),\ i,j=1,2\}$.

Bestimme die Potenzmenge von M.

**A0.1.6**
Seien $A_j$ Mengen mit $n_j$ Elementen für $1 \le j \le n$. Bestimme die Anzahl der Elemente von $A_1 * \ldots * A_n$.

**A0.1.7**
In der linearen Algebra wird $\mathbb{R}^n$ meist als Menge der Spaltenvektoren der Länge n definiert. Wieso ist die streng genommen nicht gleich dem kartesischen Produkt $\mathbb{R} * \ldots \mathbb{R}$ (mit n Faktoren)?

**A0.1.8**
Zeige:Die Menge aller reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten kann man als kartesisches Produkt von $\mathbb{R}^n$ mit sich selber (m mal) auffassen.

**A0.1.9**
Es seien A,B Mengen. Zeige:
a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
*//D0.1.6 (5)* $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$*//*
Bew: $M \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A) \wedge M \in \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset A \wedge M \subset B \Leftrightarrow$
$M \subset A \cap B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \in \mathcal{P}(A \cap B)$

„⇒" Sei $x \in M \underset{M \subset B \wedge M \subset A}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in M \wedge x \in A \cap B \Rightarrow x \in M \in P(A \cap B)$

„⇐" Sei $x \in M \underset{M \in A \cap B}{\Rightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in M \subset A \cap B$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
*//D0.1.4 (4) 1.)* $M_1 \cup M_2 := \{x / x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$*//*
*//D0.1.6 (5)* $\mathcal{P}(M) := \{A / A \subseteq M\}$*//*
Bew: $M \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 1.)} M \in \mathcal{P}(A) \vee M \in \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset A \vee M \subset B \underbrace{\Rightarrow}_{*}$
(Umkehrung stimmt nicht,siehe c)
$M \subset A \cup B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
$*x \in M \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ gilt im allgemeinen nicht(anhand eines Gegenbeispiels)
Lös: $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $a \neq b$, $A \cup B = \{a, b\}$
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{A\}\} \cup \{\emptyset, \{B\}\} = \{\emptyset, A, B\} = \{\emptyset, \{a\}\{b\}\} \neq \{\emptyset, \{a\}\{b\}\{a, b\}\} =$
$\mathcal{P}(A \cup B)$. Also $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$

**A0.1.10** Seien $A_1, A_2, B_1, B_2$ Mengen. Zeige:
a) $(A_1 x A_2) \cap (B_1 x B_2) = (A_1 \cap B_1) x (A_2 \cap B_2)$
*//D0.1.4 (4) 2.)* $M_1 \cap M_2 := \{x / x \in M_1 \wedge x \in M_2$*//*

*//D0.1.7 (5) $M_1 * M_2 := \{(x,y) \mid x \in M_1 \wedge y \in M_2\}$//*

Bew: $(x_1,x_2) \in (A_1 x A_2) \cap (B_1 x B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.4\ 2.)} (x_1,x_2) \in A_1 x A_2 \wedge (x_1,x_2) \in B_1 x B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.7)}$

$(x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2) \wedge (x_1 \in B_1 \wedge x_2 \in B_2) \Leftrightarrow$

$(x_1 \in A_1 \wedge x_1 \in B_1) \wedge (x_2 \in A_2 \wedge x_2 \in B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.4\ 2.)}$

$x_1 \in A_1 \cap B_1 \wedge x_2 \in A_2 \cap B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.7)} (x_1,x_2) \in (A_1 \cap B_1) x (A_2 \cap B_2)$

b) $(A_1 x A_2) = \emptyset \Leftrightarrow A_1 = \emptyset \wedge A_2 = \emptyset$

*//D0.1.7 (5) $M1*M2 := \{(x,y) \mid x \in M_1 \wedge y \in M_2\}$//*

*dazu äquivalente Aussage $(A_1 x A_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow A_1 \neq \emptyset \wedge A_2 \neq \emptyset$*

Bew: $(A_1 * A_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (a_1,a_2) \in A_1 * A_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.7} \exists a_1 \in A_1 \wedge \exists a_2 \in A_2 \Leftrightarrow$

$A_1 \neq \emptyset \wedge A_2 \neq \emptyset$

Andere Formulierung:

„⇒„ Sei $(A_1 * A_2) = \emptyset$. Annahme: $A_1 \neq \emptyset \wedge A_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \in A_1 \wedge \exists a_2 \in A_2 \Rightarrow$
$(a_1,a_2) \in A_1 x A_2$ Widerspruch da $(A_1 x A_2) = \emptyset \Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow A_1 = \emptyset \vee A_2 = \emptyset$

„⇐" Sei $A_1 = \emptyset \vee A_2 = \emptyset$. Annahme: $(A_1 x A_2) \neq \emptyset \Rightarrow (a_1,a_2) \in A_1 x A_2 \Rightarrow$
$\exists a_1 \in A_1 \wedge \exists a_2 \in A_2 \Rightarrow A_1 \neq \emptyset \wedge A_2 \neq \emptyset$.
Widerspruch, also Annahme falsch, d.h. $(A_1 x A_2) = \emptyset$.

c) (.) $A_1 \subset B_1 \wedge A_2 \subset B_2 \Rightarrow A_1 x A_2 \subset B_1 x B_2$;

(..) $A_1 x A_2 \subset B_1 x B_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1 x A_2 \neq \emptyset} A_1 \subset B_1 \wedge A_2 \subset B_2$.

Bew: (.) $(A_1 \subset B_1 \wedge A_2 \subset B_2) \wedge$ sei $(x_1,x_2) \in A_1 x A_2 \Rightarrow x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1 \subset B_1 \wedge A_2 \subset B_2}$

$x_1 \in B_1 \wedge x_2 \in B_2 \Rightarrow (x_1,x_2) \in B_1 x B_2 \Rightarrow A_1 x A_2 \subset B_1 x B_2$

(..) Sei $\underbrace{x_1 \in A_1}_{\Rightarrow A_1 \neq \emptyset} \underbrace{\Rightarrow}_{b): A_1 x A_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_2 \neq \emptyset} \exists x_2 \in A_2 \Rightarrow (x_1,x_2) \in A_1 * A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1 x A_2 \subset B_1 x B_2} (x_1,x_2) \in B_1 * B_2 \Rightarrow$

$x_1 \in B_1 \wedge x_2 \in B_2 \Rightarrow \underbrace{x_1 \in A_1}_{\Rightarrow A_1 \neq \emptyset} \wedge x_1 \in B_1 \Rightarrow A_1 \subset B_1$

**A0.1.11** Setze $B_j = X \setminus A_j \ \forall j \in J$ und führe die zweite de Morgansche Regel auf die erste zurück: $M_1 \subset M_2 (\subset M_3) \Leftrightarrow M_2^C \subset M_1^C$

**A0.1.12** Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C \subset A \Leftrightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

*//Distributivgesetze (8): $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$//*

*//D0.1.4 (4) 2.) $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1$ und $x \in M_2\}$//*

Bew: $\Rightarrow (A \cap B) \cup C \underset{Distributivgesetz}{=} \underbrace{(A \cup C)}_{=A,\, da\, C \subset A} \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$

„⇐" Sei $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup C$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D\,0.1.4.2\ 2.)}\quad x\in A \wedge x\in(B\cup C) \Rightarrow x\in A \quad\Rightarrow C\subset A$

Widerspruchsbeweis:

Annahme $C\not\subset A$ trotzdem $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$...?

$C\not\subset A \Rightarrow x\in C \wedge x\notin A \Rightarrow \neg\,(x\in A \wedge x\in(B\,\hat{}\,C) \Rightarrow x\notin(A\cap(B\,\hat{}\,C))$

$\Rightarrow x\in A \vee x\in(B\,\hat{}\,C \Rightarrow x\in(A\cap(B\,\hat{}\,C))$

$\Rightarrow (A\cap B)\,\hat{}\,C\neq A\cap(B\,\hat{}\,C)$ Widerspruch zu $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in C \wedge x\in A \quad \Rightarrow C\subset A$

**A0.1.13** (Siehe auch Distributivgesetze)

Seien A,B und C Mengen. Zeige:

a) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Lös: $x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C) \Leftrightarrow x\in(A\cup B) \wedge x\in(A\cup C) \Leftrightarrow$

$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

b) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

**A0.1.14**

Es seien A,B und C Teilmengen einer Menge $X\neq\emptyset$. Zeige:

a) $A\subset B \Leftrightarrow B^c\subset A^c$.

Lös: (.) "$\Rightarrow$": Sei $x\in B^c \Rightarrow x\notin B \Rightarrow x\notin A$ (sonst $x\in A \Rightarrow x\in B$ Widerspruch) $\Rightarrow$

$x\in A^c \Rightarrow B^c\subset A^c$

(..) "$\Leftarrow$": Sei $B^c\subset A^c \underbrace{\Rightarrow}_{(.)} (A^c)^c\subset(B^c)^c \Rightarrow A\subset B$

b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

Lös: Sei $x\in(A\cap B)^c$ baf $\Leftrightarrow x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B \Leftrightarrow$

$x\in A^c \vee x\in B^c \Leftrightarrow x\in A^c\cup B^c$

**A0.1.15** Beweise: $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

#Lös: $\forall\, x\in(A\setminus(B\setminus C)$ gilt: $\{x\in A \wedge x\notin(B\setminus C)\} \Leftrightarrow \{x\in A \wedge(x\notin B \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow$

# $\{x\in A \wedge(x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

**A0.1.16**

Def: $\Delta(Z):=\{(x,y)\in Z\,|\,x=y\}\subset Z^2$, Zeige: $X\subset Y \Leftrightarrow \Delta(X)\subset\Delta(Y)$

Bew: „$\Rightarrow$" Sei $X\subset Y$ & $(a,b)\in\Delta(X)\Rightarrow (a,b)\in X^2=X\mathrm{x}X$, $a=b \Rightarrow (a,b)\in\Delta(Y)$

„$\Leftarrow$" Sei $\Delta(X)\subset\Delta(Y)$ & $x\in X \Rightarrow (x,x)\in X^2 \Rightarrow (x,x)\in\Delta(X) \Rightarrow (x,x)\in\Delta(Y)\Rightarrow$

$(x,x)\in Y^2 \Rightarrow x\in Y \Rightarrow x\in X \wedge x\in Y \Rightarrow X\subset Y$