A0.2.1 Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf X

a) Zeige: $\forall$ $x \in X$ ist die Menge $B(x) := \{y \in X \mid$ es gilt nicht $y \sim x\}$ keine Äquivalenzklasse von ~

b) Zeige: Wenn ~ nur 2 Äquivalenzklassen hat so ist $B(x)$ eine Äquivalenzklasse

c) Zeige: Wenn es ein $x \in X$ gibt, sodass $B(x)$ eine Äquivalenzklasse ist, so hat ~nur 2 Äquivalenzklssen.

d) Zeige: Die Aussage, $\forall$ $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt auch nicht $x_1 \sim x_3$ ist falsch

e) Zeige: Die Aussage, $\forall$ $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt: Wenn weder $x_1 \sim x_2$ noch $x_2 \sim x_3$ gilt, so gilt jedenfalls $x_1 \sim x_3$ ist ebenfalls falsch.

A0.2.2 Definiere auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eine Relation R durch $(x_1, y_1) \,|_R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$. Entscheide, ob es sich hierbei um eine ÄR handelt und bestimme ggf die ÄK.

Lös: $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$, z.z.: $|_R$ definiert eine ÄR

#Die „Rechenvorschrift ist eine Beziehung zwischen Paaren (u,v))#

Reflexivität: Es sei $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \Rightarrow xy = xy$, $(x,y) \overset{R}{\sim} (x,y)$

$\#(x_1, y_1) \,|_R\, (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_1 y_1$

Symmetrie: Es gelte $(x_1, y_1) \,|_R\, (x_2, y_2)$, d.h. $x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow$

$(x_2, y_2) \,|_R\, (x_1, y_1)$ # $\Leftrightarrow x_2 y_1 = x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow$

Transitivität: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit

$(x_1, y_1) \overset{R}{\sim} (x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2) \overset{R}{\sim} (x_3,$ $x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow y_3) \Rightarrow$

$x_1 y_2 = x_2 y_1$ und $x_2 y_3 = x_3 y_2$.

Z.z: $x_1 y_3 = x_3 y_1$. Es gilt $x_1 y_3 = \frac{x_2 y_1}{y_2} y_3 = x_2 \frac{y_1 y_3}{y_2} = \frac{x_3 y_2}{y_3} \frac{y_1 y_3}{y_2} = x_3 y_1$

ÄK: $(x_0, y_0) \,|_R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x_0 y = x y_0\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid x/y = x_0/y_0\}$

A0.2.3

a) Es sei M eine beliebige Menge $\neq \emptyset$. Die Relation $\sim$ auf $M \times M$ sei wie folgt definiert: $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_2 = y_2$

Zeige, dass $\sim$ eine ÄR (auf M) ist und bestimme alle ÄK

Bew: $\sim$ ist reflexiv: $x_2 = x_2 \Rightarrow (x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$ $\forall$ $x_1, x_2 \in M \times M$

$\sim$ ist symmetrisch: Sei $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow y_2 = x_2 \Rightarrow$

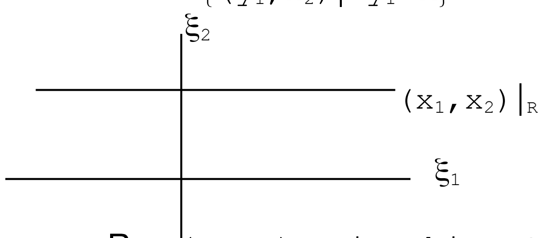
$(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2) \Rightarrow \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M$

$\sim$ ist transitiv: Seien $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \sim (z_1, z_2)$

$x_2 = y_2 \wedge y_2 = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 \Rightarrow$

$(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$ $\forall$ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) (z_1, z_2) \in M \times M$

ÄK: $(x_1, x_2) \,|_R = \{(y_1, y_2) \in M \times M \mid (y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)\} = \{(y_1, y_2) \in M \times M \mid y_2 = x_2\} = \{(y_1, x_2) \mid y_1 \in M\}$



z.B. $M = \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \,|_R$ ist hier Gerade durch $0, x_2$ parallel zur x_1 Achse.

Bem: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \bigcup_{x_n \in \mathbb{R}} (x_1, x_2) \,|_R$ disjunkte Vereinigung

(Partition von $\mathbb{R}^2$, vgl S0.2.1) $x_2 = y_2$ und $y_2 = z_2 \Rightarrow x_2 = z_2 \Rightarrow$

b) ● Auf $\mathbb{R}$ gilt
$x\sim y$ genau dann, wenn $xy\geq 0$,
Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?
Lös:
$x\sim y$ symmetrisch, da $xy=yx$; reflexiv, da $x*x\geq 0$,
nicht transitiv, da $1\sim 0$ wegen $1*0=0$, $0\sim -1$ wegen $0*(-1)=0$ aber
$1\not\sim -1$ wegen $1*(-1)<0$
Keine Äquivalenzrelation

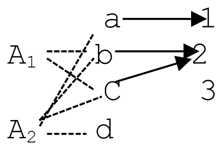
●● Auf $\mathbb{R}$ gilt
$x\sim y$ genau dann, wenn $x-y\ x\in\mathbb{Z}$.
Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?

Lös: $x\sim y$ reflexiv da $\forall\ x\in\mathbb{R}$: $x \stackrel{\sim}{=} x$ wegen $x-x=0\in\mathbb{Z}$;
$x\sim y$ symmetrisch, da $z=x-y \underbrace{\in}_{x\stackrel{\sim}{=}y} \mathbb{Z} \Rightarrow -z=y-x \underbrace{\in}_{x\stackrel{\sim}{=}y} \mathbb{Z}$;

$x\sim y$ transtiv, da $x\sim y$ & $y\sim z \in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$ & $y-z\in\mathbb{Z} \Rightarrow$
$x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\sim z$

$x \stackrel{\sim}{=} y$ ist Äquivalenzrelation
$2|_R := \{y\in\mathbb{R} \mid y\sim 2\} = \{y\in\mathbb{R} \mid (2,y)\in R\} = \{y\in\mathbb{R} \mid (2-y)\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}|_R := \mathbb{Z}$, Partition $P = \bigcup_{x\in R} \{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\} = \bigcup_{x\in[0,1]} \{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$

A0.2.4 Vor: $A\neq\emptyset$, $A_1,A_2\subset X$, Beweise: $A_1\subset A_2 \Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$
Bew: Bsp



$f(A_1)=\{2\}$
$f(A_2)=\{1,2\}$

$\forall\ x\in A_1$ gilt $x\in A_2$
z.z: $\forall\ y\in f(A_1)$ gilt $y\in f(A_2)$
Sei $y\in f(A_1)$, y baf $\Rightarrow$
$\exists\ x\in A_1: f(x)=y \underbrace{\Rightarrow}_{Vor} \underbrace{\Rightarrow}_{Vor}$
$\exists\ x\in A_2: f(x)=y \Rightarrow y\in f(A_2)$

A0.2.5 Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. Die Mengen A_1,A_2 seien Teilmengen von A während B_1,B_2 Teilmengen von B seien.
Beweise: $B_1\supset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$
Bew: "$\subset$" von $\Leftrightarrow$ gilt zunächst nur $\Rightarrow$. Sei $x\in f^{-1}(B_1\setminus B_2)$ baf $\Leftrightarrow$
$f(x)\in B_1\setminus B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{B_2\subset B_1} f(x)\in B_1$ und $f(x)\notin B_2 \Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)$ und $x\notin f^{-1}(B_2)$
$\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$
" $\supset$" siehe oben Teil $\Leftarrow$ von $\Leftrightarrow$

A0.2.6 Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f: X\to Y$ eine Abbildung.
Zeige für $A\subset X$, $B\subset Y$: $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$ $f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$

a) $f^{-1}(Y\setminus B) = X\setminus f^{-1}(B)$
Bew: $x\in f^{-1}(Y\setminus B) \underset{\text{Def Urbild}}{\Leftrightarrow} f(x)\in Y\setminus B$ und $x\in X \Leftrightarrow f(x)\notin B$ und $x\in X$ und $f(x)\in Y$
$\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)$ und $x\in X \Leftrightarrow x\in X\setminus f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(f(A))\supset A$
//D0.2.3 3.) (105) $f: X\to Y$: d) $f(A):=\{f(x) \mid x\in A\}$ Bild der Teilmenge $A\subset X$//
//unter f. ($=\{y\in Y \mid \exists\ x\in A: y=f(x)\}$), $(x,y)\in f$.//
//e) $f^{-1}(B) := \{x\in X \mid f(x)\in B\}$//
Bew: Sei $x\in A$ beliebig $\underset{D=0.2.3\ 3.)}{\Rightarrow} f(x)\in \underbrace{f(A)}_{\tilde{B}} \Leftrightarrow x\in f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(f(A))$ $\tilde{B}$

c) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Bew: Sei $y \in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\tilde{A}}) \underset{D=0.2.3\ 3.)}{\Rightarrow} \exists\ \underbrace{x \in \tilde{A} = f^{-1}(B)}_{d.h.\ y=f(x) \in B}$ mit $f(x)=y \Leftrightarrow y=f(x) \in B$

A0.2.7 Sei $f: X \to Y$ eine Funktion und $A, B \subset X$ und $C, D \subset Y$. Zeige:

- a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ und finde ein Beispiel mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$
- c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- d) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

A0.2.8 $X \neq \emptyset$, $A, B \subset X$, $f(X) \to Y$ Abbildung

a) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

Bew: $y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A)\ \&\ y \notin f(B)$

$\Leftrightarrow\ \exists\ x \in A$: $y = f(x)\ \&\ f(\tilde{x}) \neq y\ \forall\ \tilde{x} \in B \ \Rightarrow \exists\ x \in A \setminus B$: $y = f(x))$

$\Leftrightarrow y = f(A \setminus B) \ \Leftrightarrow\ f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

b) Bedingung für $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$?

Lös: nach a) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$, gesucht Bedingung für $f(A) \setminus f(B) \supset f(A \setminus B)$

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$, $y = f(A \setminus B) = f(x)$, $\tilde{x} \in B$, $x \neq \tilde{x}$

Fall $y = f(x) \underset{f\ surjektiv}{=} f(\tilde{x}) \in f(B) \Rightarrow y \notin f(A) \setminus f(B) \Rightarrow \cancel{f}(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$

Fall $y = f(x) \underset{f\ injektiv}{\cancel{=}} f(\tilde{x}) \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$

$\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$