A0.2.9 Gegeben sei die Funktion $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,3,5,7\}$ mit
$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=7,\ f(4)=7,\ f(5)=5$.
Bestimme $f(\{1,2,3\}), f^{-1}(\{3\}),\ f^{-1}(\{5\}),\ f^{-1}(\{5,7\})$
Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?
Ist $f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lös: $f(\{1,2,3\})=\{f(1),f(2),f(3)\}=\{1,3,7\}$,
$f^{-1}(\{3\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\mid f(x)=3\}=\{2\}$,
$f^{-1}(\{5\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\mid f(x)=5\}=\{5\}$
$f^{-1}(\{5,7\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\mid f(x)=\{5,7\}\}=\{5,3,4\}$
f injektiv? $\exists\ x_1,x_2\in\{1,2,3,4,5\}$ mit $x_1\neq x_2: 3\neq 4$ mit $f(x_1)=f(x_2)$:
$f(3)=7,\ f(4)=7,\ f(3)=f(4)=7 \Rightarrow$ f nicht injektiv
f surjekiv? Sei $X=\{1,2,3,4,5\}, Y=\{1,3,5,7\}$
$\forall\ y\in Y=\{1,3,5,7\}\ \exists$ mindestens ein $x\in X$ mit $f(x)=y$:
$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=7,\ f(4)=7,\ f(5)=5$
f ist surjektiv (für y=7 existieren sogar 2 Elemente aus X mit $f(x)=y$)
f bijektiv? Nein, da f nicht injektiv ($f(3)=f(4)$).
$f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv? $X'=\{1,2,3\}, f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=7$,
$Y=\{1,3,5,7\}\ \forall\ x_1,x_2\in X'$ und $x_1\neq x_2: f(x_1)\neq f(x_2)$ Ja!
$f_{|\{1,2,3\}}$ surjektiv? $Y=f(X')$, $f(x)\neq 5$ für $x\in\{1,2,3\}$ Nein !
$f_{|\{1,2,3\}}$ bijektiv? $f_{|\{1,2,3\}}$ ist injektiv und nicht surjektiv $\Rightarrow$ Nein!

A0.2.10 Gebe an/zeige: Eine Abbildung f von X nach Y ist genau dann injektiv/nicht injektiv, wenn gilt:
a) $x,x'\in X$ und $x\neq x'$ folgt $f(x)\neq f(x')$
Lös: injektiv
b) Gibt es zu jedem $y\in Y$ höchstens ein $x\in X$ mit $f(x)=y$ so ist f injektiv
c) Gibt es zu jedem $x\in X$ genau ein $y\in Y$ mit $f(x)=y$, so ist f trotzdem nicht injektiv.
d) Wenn für $x,x'\in X$ mit $f(x)=f(x')$, $x=x'$ ist, so ist f injektiv
e) Gibt es eine surjektive $f:[0,1]\to[0,1]$?
Lös: $f(x)=\begin{cases} x, falls\ x\in[0,1) \\ 0, falls x=1\end{cases} \Rightarrow$ ja

A0.2.11 Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich sind injektiv, welche sind surjektiv?
$f(x)=x^3,\ f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0),\ f(x)=|x|,\ f(x)=e^x$.

A0.2.12 Gegeben sei eine Menge $M\neq\emptyset$ und deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.
a) Bestimme eine injektive Abbildung $f:M\to\mathcal{P}(M)$.
Lös: Bsp $f:M\to\mathcal{P}(M)$. $f(x)=\{x\}$. Dann ist f injektiv, denn aus $f(x_1)=f(x_2)$ folgt $\{x_1\}=\{x_2\} \Rightarrow x_1=x_2$
b) Beweise, dass es keine surjektive Abbildung $g:M\to\mathcal{P}(M)$ geben kann.
Hinweis: Betrachte die Menge $A=\{x\in M\mid x\neq g(x)\}$
Bew: Annahme: Es existiert eine solche Abb $g:M\to\mathcal{P}(M)$ surjektiv.
Sei $A=\{x\in M\mid x\neq g(x)\}$. Da g surjektiv $\exists\ x_0\in M$ mit $g(x_0)\in A$,
#d.h. $x_0\neq g(x_0)\}$# da $\mathcal{P}(M)$ außer allen $x\in M$ noch weitere Elemente enthält und diese wegen Surjektivität einen Partner in M haben müssen. Dann ist $x_0\in A$ oder $x_0\notin A$.
Wenn $x_0\in A$, dann heißt das $x_0\neq g(x_0)\in A$.
Wenn $x_0\notin A$, dann heißt das $x_0=g(x_0)\in A \Rightarrow$ Widerspruch
Annahme einer surjektiven Funktion $g:M\to\mathcal{P}(M)$ muss also falsch

gewesen sein.(...auch für ∞ große P(M) richtig)

A0.2.13 Es seien $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv, g f injektiv ⇒ g injektiv

b) g injektiv, g f surjektiv ⇒ surjektiv

c) Aus g f injektiv ⇒ f injektiv

d) Aus g f surjektiv ⇒ g surjektiv

e) Sind f und g injektiv ⇒ g f injektiv

Bew: $g: X\to Y$, $f: Y\to Z$, $x,x'\in X$, $f\ \ g(x)=f\ \ g(x')$; Zu zeigen $x=x'$

$$f(\underbrace{g(x)}_{y})=fog(x)\underbrace{=}_{g\text{ injektiv}}fog(x')=f(\underbrace{g(x')}_{y'})\Rightarrow f(y)=f(y')\underbrace{\Rightarrow}_{f\text{ injektiv}}y=y'\Rightarrow$$

$$g(x)=g(x')\underbrace{=}_{g\text{ injektiv}}x=x'$$

f) Sind f und g surjektiv ⇒ g f surjektiv

Bew: $z\in Z$. $\exists\ y\in Y: f(y)=z$. Da g surjektiv $\exists\ x\in X$: $g(x)\underbrace{=}_{g\text{ surjektiv}}y\underbrace{\Rightarrow}_{f\text{ surjektiv}}$

$fog(x)=f(g(x))=f(y)=z \Rightarrow$ fog surjektiv

g) Folgere aus c) und d): f,g bijektiv ⇒ g f bijektiv und zeige, dass dann $(g\ \ f)^{-1}=f^{-1}\ \ g^{-1}$.

A0.2.14 Es seien $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv ⇔ $\exists\ g:Y\to X$ mit $f\ \ g=id_Y$

Lös: "⇐" $y=id_Y(y)=(f\ \ g)(y)=f(\underbrace{g(y)}_{x})=f(x)\Rightarrow$ d.h. alle Elemente von Y werden von y erreicht, f ist surjektiv

„⇒" definiere $g:Y\to X$, $g(y)=x$ (wobei $f(x)=y$) d.h. zu jedem y finde ich mindestens ein x da surjektiv.

$(f\ \ g)(y)=f(g(y))=f(x)=y=id_y$

A0.2.15 Geg sei eine nichtleere Menge X und 2 Funktionen $f,g:X\to X$. Beweise oder widerlege: Es gilt stets $f\ \ g=g\ \ f$

Lös: #Wertebereich muss nicht gleich X sein

$f\ \ g\neq g\ \ f$: Setze z.B.: $X=\{0,1\}$ und definiere

$f:X\to X$ durch $f(0)=f(1)=0$ und $g:X\to X$ durch $g(0)=g(1)=1$ ⇒

$f(g(0))=f(g(1))=f(1)=0$ und $g(f(0))=g(f(1))=g(0)=1$ ⇒ $f\ \ g\neq g\ \ f$

A0.2.16

a) Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. $A_1\subset A$, $B_1\subset B$.

Beweise: $f^{-1}(f(A_1))\supset A_1$

Lös: Sei $x\in A_1$. Def $y=f(x)$ und $B_1=f(A_1)$ ⇒ $y\in B_1$ ⇒ $f^{-1}(B_1)=\{z\in A|f(z)\in B_1\}$

⇒ x erfüllt die Bedingung $f(z)\in B_1$, denn $f(x)=y\in B_1$ ⇒

$x\in f^{-1}(B_1)=f^{-1}(f(A_1))$

$f^{-1}(f(A))=A$ gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel siehe b)

#Lös: $A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

Sei $x\in A_1$ baf ⇒ $y\in f(A_1)$ mit $f(x)=y$ ⇒

$\exists\ x\in A_1: f^{-1}(y)=x$ oder ($\exists\ x'\in A\setminus A_1: f^{-1}(y)=x'$ und $\exists\ x\in A_1: f^{-1}(y)=x$)

⇒ $x\in A_1$ und $x\in f^{-1}(f(A_1))$ ⇒ $A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

b) Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f: X\to Y$ eine Abbildung.

Zeige für $A\subset X$, $B\subset Y$: $f(A)=\{f(x)|\ x\in A\}$, $f^{-1}(B)=\{x\in X|\ f(x)\in B\}$

$f(f^{-1}(B))=B$ gilt im allgemeinen nicht. Gegenbeispiel

Bew: Sei $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, mit $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ und $f:X\to Y$ definiert durch $f(x_1)=f(x_2)=y_1$ (d.h. $f(X)=y_1$).

Gegenbeispiel:

Weiter sei $A=\{x_1\}$ und $B=Y=\{y_1,y_2\}$ ⇒

$f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{y_1\})=\{x_1,x_2\}=X\neq A$ und $f(f^{-1}(B))=f(\underbrace{\{x_1,x_2\}}_{=X})=\{y_1\}\neq B$

Bem: (.) $f^{-1}(f(A))=A\ \ \forall\ A\subset X \Leftrightarrow f$ injektiv
(..) $f(f^{-1}(B))=B\ \ \forall\ B\subset Y \Leftrightarrow f$ surjektiv

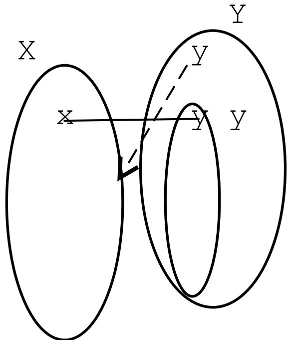
c) f ist injektiv $\Leftrightarrow f(\bigcap_{M\in S} M)=\bigcap_{M\in S} f(M)\ \ \forall\ S\subset \mathcal{P}(X), S\neq\emptyset$ $\quad \bigcap_{M\in S}$
//D0.2.6 Bem: 2.)(203) f: $X\to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)\ \ \forall A,B\subset X$//
//(107) Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f//
//b) $f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap_{M\in S} f(M)$, $M\subset X$//
Bew: "$\Leftarrow$" folgt aus D0.2.6 Bem 2 mit S={A,B} für beliebige $A,B\subset X$
$(f(A)\cap f(B)=\bigcap_{M\in S} f(M)=f(\bigcap_{M\in S} M)=f(A\cap B))$
"$\Rightarrow$" Sei f injektiv. Sei $S\subset \mathcal{P}(X)$, $S\neq\emptyset$ bel. $\underbrace{\Leftrightarrow}_{f\ injektiv}$
$f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap_{M\in S} f(M)$. Noch z.z. $f(\bigcap_{M\in S} M)\supset \bigcap_{M\in S} f(M)$ wie folgt
$y\in \bigcap_{M\in S} f(M) \underbrace{\Leftrightarrow}_{Def\ \cap} y\in f(M)\ \ \forall\ M\in S$ (besser: $\forall\ M\in S: y\in f(M)$) $\underbrace{\Leftrightarrow}_{Def\ Bild}$
$\forall\ M\in S\ \exists\ x_M\in M$ mit $y=f(x_M)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{f\ injektiv}$
$\forall\ M\in S\ \exists\ x\in M$ mit $y=f(x)$ und zwar dasselbe x $\forall\ M\in S$ $\quad x_{M_1}$
"$\Leftarrow$" klar
"$\Rightarrow$" $f(x_{M_1})=f(x_{M_2}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{f\ injektiv} x_{M_1}=x_{M_2}$
$\Leftrightarrow\ \exists\ x\in \bigcap_{M\in S} M$ mit $y=f(x) \Leftrightarrow y\in f(\bigcap_{M\in S} M)$
Bem: Es wurde sogar $\bigcap_{M\in S} f(M)=f(\bigcap_{M\in S} M)$ bewiesen

A0.2.17 $f:X\to Y$. Zeige daß immer gilt $f\ \ id_X=f$ und $id_Y\ \ f=f$

A0.2.18 $f:X\to Y$ bij und f^{-1} die Umkehrfkt.
Zeige $f\ \ f^{-1}=id_Y$, $f^{-1}\ \ f=id_x$

A0.2.19 Sei angenommen, daß eine Funktion $g:Y\ \ X$ existiert, sodaß
$f\ \ g=id_Y$, $g\ \ f=id_x$. Zeige, daß dann f bijektiv und $g=f^{-1}$ ist.
Was kann man schließen, wenn nur $f\ \ g=id_Y$ oder $g\ \ f=id_x$ gilt?

A0.2.20
Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f:X\to Y$ eine Abbildung. Zeige:
a) f ist genau dann injektiv, falls es eine Abbildung
$g:Y\to X$ mit $g\ \ f=id_x$ gibt
Bew: „$\Rightarrow$" Sei f <u>injektiv</u> $\Rightarrow\ \forall\ y\in f(X)$ <u>$\exists$ genau ein</u> $x_y\in X: f(x_y)=y$
wähle außerdem noch ein $x^*\in X$ fest
(möglich, da $X\neq\emptyset$) Def $g:Y\to X$,
$$g(y)=\begin{cases} x_y, falls\ \ y=f(x) \\ x^*, falls\ y\notin f(X)\ d.h.\ y\in Y\setminus f(X)\end{cases}$$



$x^{\star}$ ——— y y Sei $x \in X$ beliebig $\Rightarrow$ $(g \;\; f)(x) = g \underbrace{f(x)}_{=: y \in f(X)} = x$, da

~~x~~ ——— y y $f(x)=y$, d.h. $x_y = x$ (beachte: x_y ist

f eindeutig) $\underset{x\text{ bel}}{\Rightarrow}$ $g(y)=x$ da $f(x)=y$ $\forall$ $x \in X$ $\Rightarrow$

$g \;\; f = id_x$.. beachte Def und Wertebereich von $g \;\; f$ und id_x sind gleich

„$\Leftarrow$„: $\exists$ $g: Y \to X$ mit $g \;\; f = id_x$ d.h. Z.z:f injektiv,

d.h.z.z. $\forall$ x_1, x_2 mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h. $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1)=f(x_2)$ $\Rightarrow$

$x_1 = id_x(x_1) \underset{\text{Vor}}{=} (g \;\; f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2) = (g \;\; f)(x_2) \underset{\text{Vor}}{=} id_x(x_2) = x_2$

Sei $x \in X$ bel, $\Rightarrow$ $g \;\; f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=: y \in f(X)}) = x$, da $f(x)=y$, d.h. $x_y = x$

(beachte das x_y ist eindeutig) $\underset{x\text{ bel}}{\Rightarrow}$ $g \;\; f = id_x$

(Beachte: Definitionsbereich und Wertemenge/Zielmenge der beiden Funktionen sind gleich).

b) f ist genau dann surjektiv, falls es eine Abbildung $h: Y \to X$ mit $f \;\; h = id_Y$ gibt.

Beh: f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\exists$ $h: Y \to X$ mit $f \;\; h = id_Y$ (h heißt Rechtsinverses)

Bew: Skizze siehe bei Def für Surjektion

"$\Rightarrow$„Sei f surjektiv $\Rightarrow$ $\forall$ $y \in Y$ $\exists$ $x_Y \in X$: $f(x_Y)=y$. Dies ist möglich, da f surjektiv. Sei ein x_Y fixiert (es gibt viele). Sei $h: Y \to X$, $h(y) := x_Y \Rightarrow (f \;\; h)(y) = f(x_Y) = y \Rightarrow f \;\; h = id_y$

„$\Leftarrow$„$\exists$ $h: Y \to X$ mit $f \;\; h = id_y$

Z.z.: f surjektiv, d.h. $\forall$ $y \in Y$ $\exists$ $x \in X$: $f(x)=y$.

Definiere $h(y) = x_Y$. Sei $y \in Y$ beliebig,

Setze $x := h(y) \Rightarrow x \in X \Rightarrow f(x_Y) = f(h(y)) = (f \;\; h)(y) = id_y(y) = y \Rightarrow f \;\; h = id_y$

Beachte: Def und Wertebereich von f,h und id_y sind gleich) d.h.

$\forall$ $y \in Y$ $\exists$ $x \in X$: $f(x)=y$

c) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g: Y \to X$ mit $g \ \ f = id_x$ und $f \ \ g = id_y$ gibt. Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Beh(.) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists\ g: Y \to X$ mit $g \ \ f = id_x \quad f \ \ g = id_y$

(..) dieses g ist eindeutig

($g = f^{-1}$ siehe später, heißt inverse Funktion)

Bew(.): "$\Rightarrow$" 1. Möglichkeit: Wähle $g = f^{-1}: Y \to X \Rightarrow$

$g \ \ f = f^{-1} \ \ f = id_x$, $f \ \ g = f \ \ f^{-1} = id_y$

2. Möglichkeit: Da f injektiv und surjektiv ist,

$\exists\ g: Y \to X$ mit $g \ \ f = id_x$ (nach a)) und

$\exists\ h: Y \to X$ mit $f \ \ h = id_y$ (nach b)). Genügt z.z. h=g.

Dies gilt, da $h = id_x \ \ h = (g \ \ f) \ \ h = g \ \ (f \ \ h) = g \ \ id_y = g$

"$\Leftarrow$" klar nach a), b). $\exists\ g: Y \to X$ mit $g \ \ f = id_x$ und $f \ \ g = id_y$ ...surjektiv+ injektiv....bijektiv

Bew(..) Eindeutigkeit von g:

Sei $\tilde{g}: Y \to X$ mit $g \ \ f = \tilde{g} \ \ f = id_x$, $f \ \ g = f \ \ \tilde{g} = id_y$

Z.z: $\tilde{g} = g$

Bew: $\tilde{g} = id_x \ \ \tilde{g} = (g \ \ f) \ \ \tilde{g} = g \ \ (f \ \ \tilde{g}) = g \ \ id_y = g$

A0.2.21 Sei $\mathsf{M} \neq \emptyset$ eine Menge von Mengen. Die Relation ~ auf M sei wie folgt definiert:

$M_1 \sim M_2 :\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Abbildung $f: M_1 \to M_2$

Zeige, daß ~ eine ÄR auf M ist

//D0.2.6 (203) Bem:3.) f: $X \to Y$ bijektiv g: $Y \to Z$ bijektiv //

// $\Rightarrow g \ \ f: X \to Z$ bijektiv und $(g \ \ f)^{-1} = f^{-1} \ \ g^{-1}$//

Bew: (.) ~ ist reflexiv, d.h. $M \sim M\ \forall\ M \in \mathsf{M}$, denn $id_M: M \to M$ ist bijektiv.

(..) ~ ist symmetrisch, $\forall\ M_1, M_2 \in \mathsf{M}$. $M_1 \sim M_2 \Rightarrow M_2 \sim M_1$

Bew: Sei $M_1 \sim M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{Def \sim} \exists$ bij $f: M_1 \to M_2 \Rightarrow f^{-1}: M_2 \to M_1$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{Def \sim} M_2 \sim M_1$

(...) ~ ist transitiv, d.h. $\forall\ M_1, M_2, M_3 \in \mathsf{M}$: $M_1 \sim M_2 \sim M_3 \Rightarrow M_1 \sim M_3$,

Bew: Sei $M_1 \sim M_2$ und $M_2 \sim M_3 \Rightarrow \exists$ bijektive $f: M_1 \to M_2$, $g: M_2 \to M_3$

$\underbrace{\Rightarrow}_{Bem3} g \ \ f: M_1 \to M_3$ bijektiv $\Rightarrow M_1 \sim M_3$