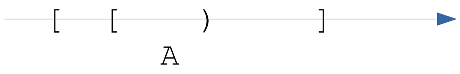
A1.3.1

a) Zeige (.) $A \subset B$, $\exists$ min A, min B $\Rightarrow$ min $A \geq$ min B

Bew: a_min A: $a \in A$ & $A \subset B \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \geq$ min B

Bspskizze



(..) $A \subset B$, $\exists$ inf A, inf B $\Rightarrow$ inf $A \geq$ inf B

Bew: $a :=$ inf A $\underbrace{\Rightarrow}_{A \subset M}$ $a \in B$ $\underbrace{\Rightarrow}_{b := \inf B}$ $a \geq b$?

A:=inf A, b:=inf B $\Rightarrow b \leq x \ \forall x \in B \underbrace{\Rightarrow}_{A \subset M} b \leq x \ \forall x \in A \Rightarrow$

b auch untere Schranke von A, d.h. $b \leq a$

(...) $\exists$ max A & max B $\Rightarrow$ $\exists$ max($A \subset B$) & max $(A \cup B)=\max\{\max A, \max B\}$

Bew: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \leq \max A \wedge x \leq \max B \Rightarrow$

$x \leq \max\{\max A, \max B\} \ \forall \ x \in A \cup B$

Da $\max\{\max A, \max B\} \in A \cup B$ ist $\max\{\max A, \max B\} = \max A \cup B$

b) $M=\{\underbrace{2-\frac{n-1/2}{n}}_{1+1/2n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ n 1 2 3 4

t 3/2 5/4 7/6 9/8

max, sup, min, inf ?

Lös: Z.z Vermutung max M=3/2

(.) $n=1 \Rightarrow 2-\frac{n-1/2}{n}=3/2 \Rightarrow 3/2\in M$

(..) $3/2 \geq t \ \forall\ t\in M$, $3/2 \geq 1+1/2n \Leftrightarrow 3/2 \geq \frac{2n+1}{2n} \Leftrightarrow 6n \geq 4n+2 \Leftrightarrow 2n \geq 2$

$\Leftrightarrow n \geq 1 \Rightarrow 3/2=\max M=\sup M$

Z.z Vermutung inf M=1

(.) 1 ist untere Schranke $\Rightarrow 1+\frac{1}{2n}>1$

(..) Kleinste untere Schranke: $\forall \varepsilon>0\ \exists\ t\in M: 1+\varepsilon>t$.

Sei $\varepsilon>0$: $1+\varepsilon>1+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n+2n\varepsilon>2n+1 \Leftrightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon}$.

Wähle $n\in\mathbb{N}: n>\frac{1}{2\varepsilon}$, $t_n:=1+\frac{1}{2n}<1+\frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}}=1+\varepsilon \Rightarrow \inf M=1$

Min M=1?

Annahme $\exists$ min M. min $M\neq 1 \Rightarrow$ min M=inf M Widerspruch

A1.3.2 Zeige: Ist $A\subset K$ nach oben(unten) beschränkt, und ist $B\subset A$, $B\neq\emptyset$, so ist B ebenfalls nach oben(unten) beschränkt)

A1.3.3 Sei $A\subset K$, $A\neq\emptyset$, $B=-A=\{-a:a\in A\}$. Zeige:

a) Genau dann ist A nach oben beschränkt, wenn B nach unten beschränkt

b) Genau dann besitzt A ein Supremum, wenn B ein Infimum besitzt und es gilt sup A=-inf B.

A1.3.4 Zeige: K selber ist nach oben und unten nicht beschränkt

A1.3.5 Zeige: Genau dann ist ζ Supremum einer Menge $A\subset K$, wenn folgendes gilt: $\forall\ a\in A: a\leq\zeta$; $\forall \varepsilon>0\ \exists\ a\in A: a>\zeta-\varepsilon$.
Finde selber eine analoge Charakterisierung für das Infimum von A.

A1.3.6 Seien A,B Teilmengen eines geordneten Körpers.
Definiere $A+B=\{a+b:a\in A \wedge b\in B\}$, $A-B=\{a-b:a\in A \wedge b\in B\}$. Nimm an, dass für alle 4 Mengen A,B,A+B,A-B sup und inf existieren. Zeige:

a) sup(A+B)=sup A+sup B

Z.z. supA+sup B ist (..)kleinste (.)obere Schranke von A+B

(.) Z.z. $\forall\ x\in(A+B): x\leq \sup A+\sup B$

Bew: Sei $x\in(A+B)$, $x=a+b$, $a\in A$, $b\in B$. Es gilt

$\forall\ a\in A\ a\leq \sup A$, $\forall\ b\in B\ b\leq \sup B \Rightarrow \forall\ x=a+b\leq \sup A+\sup B \Rightarrow$ obere Schranke

(..) Sei $A+B\leq m$, Z.z. sup A+sup B≤m.

$A+B\leq m \Rightarrow a+b\leq m\ \forall\ a\in A,\ b\in B \underset{b\in B \text{ bel fest}}{\Rightarrow} a\leq m-b\ \forall\ a\in A \Rightarrow$

m-b obere Schranke von A $\Rightarrow \sup A\leq m-b\ \forall\ b\in B$ (da b beliebig gewählt) $\Rightarrow b\leq \underbrace{m-\sup A}_{\text{obere Schranke v B}}\ \forall\ b\in B \Rightarrow \sup B\leq m-\sup A \Rightarrow \sup A+\sup B\leq m$

Ähnliche Aufgabe/Formulierung:

$A,B\subset \mathbb{R}$ seien beschränkte Mengen, d.h. $|a|\le c_1$, $|b|\le c_2$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$ $\Rightarrow$
$|a+b|\le c_1+c_2$ $\forall$ $a\in A, b\in B$ $\Rightarrow$ $A+B=\{a+b|a\in A, b\in B\}$ ist beschränkt.
Es sei $s_1=\sup A$ und $s_2=\sup B$. Z.z. $s_1+s_2=\sup(A+B)$
Es gilt: $s_1\ge a$, $s_2\ge b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$ $\Rightarrow$ $s_1+s_2\ge a+b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$ $\Rightarrow$
s_1+s_2 ist obere Schranke.
$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $a_0\in A$, mit $a_0>s_1-\varepsilon/2$ und $b_0\in B$, mit $b_0>s_2-\varepsilon/2$ $\Rightarrow$
$a_0+b_0\in A+B$ mit $a_0+b_0>s_1+s_2-\varepsilon$ $\Rightarrow$ $s_1+s_2=\sup(A+B)$

b) $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$
Lös: Z.z (.) $A-B\le\sup A-\inf B$ (..) $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $x\in A-B$, $x\ge\sup A-\inf B-\varepsilon$
Sei $\varepsilon>0$ beliebig. $\exists$ $a\in A: a\ge\sup A-\varepsilon/2$,
$\exists$ $b\in B: b\le\inf B+\varepsilon/2$, $-b\ge-\inf B-\varepsilon/2$, $\Rightarrow$
$x=a-b\ge\sup A-\varepsilon/2-\inf B-\varepsilon/2=\sup A-\inf B-\varepsilon$.

c) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

d) $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$

A1.3.7 (Dedekindsche Schnitte)
Geg: $A,B\subset\mathbb{R}$ mit $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}$, $a\le b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$
Z.z.: $\exists_1$ $s\in\mathbb{R}$ mit $a\le s\le b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$. (Ersatz für Vollständigkeitsaxiom)
Bew: A ist nach oben beschränkt, denn jedes $b\in B$ ist obere Schranke.
Setze $s=\sup A$. Dann ist offensichtlich $a\le s$ $\forall$ $a\in A$, s ist kleinste obere Schranke von A, also $s\le b\in B$.
Noch z.z. ist Eindeutigkeit.
Sei hierzu $\tilde{s}$ mit $a\le\tilde{s}\le b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$.
Annahme $\tilde{s}\neq s$. Da $\tilde{s}$ obere Schranke von A ist, muss $\tilde{s}>s$ sein.
Dann folgt
$A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$. $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widerspruch. Also muss $\tilde{s}=s$ sein.

Andere Formulierung:
Bew: Sei $M\neq\emptyset$, nach oben beschränkt: $\exists$ sup M
Sei $m\in M$ $\tilde{M}=\{x\in M: x\ge m\}\subset M$ $\Rightarrow$ M beschränkt $\exists$ s: sup $\tilde{M}$ $\Rightarrow$
s ist obere Schranke von M $\Rightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $m\in\tilde{M}: x>s-\varepsilon$ $\Rightarrow$ $s=\sup M$
A ist nach oben beschränkt, da jedes $b\in B$ obere Schranke.
Setze $s=\sup A$ $\Rightarrow$ $a\le s$ $\forall$ $a\in A$. s ist kleinste obere Schranke von A $\Rightarrow$
$s\le b$ $\forall$ $b\in B$.
Eindeutigkeit:
Sei $\tilde{s}$: $a\le\tilde{s}\le b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$. Annahme $\tilde{s}\neq s$: $\tilde{s}$ obere Schranke von A, muss $\tilde{s}>s$ sein $\Rightarrow$ $A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$, da $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widersapruch $\Rightarrow$ $\tilde{s}=s$

A1.3.9 Zeige: Zu einem $y>0$ $\exists_1$ $x>0: x^2=y$ $\Rightarrow$ d.h. oben definierte Quadratwurzel von x ist Umkehrabbildung der Funktion $x\mapsto x^2$

A1.3.10 Finde heraus, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $x=\sqrt{x}$ richtig bzw falsch ist.

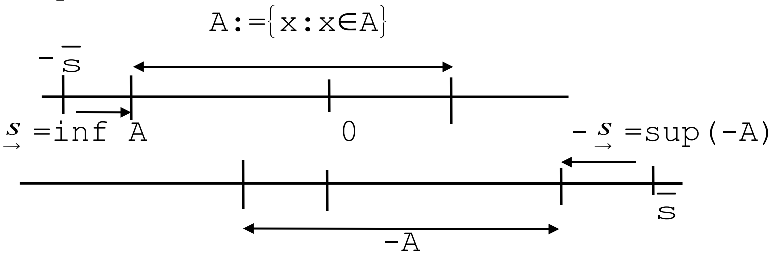
A1.3.11 Zeige, daß das Vollständigkeitsaxiom zu folgenden Aussagen äquivalent ist
a) Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von

K besitzt ein Infimum.

b) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum
c) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum

A1.3.12 Zeige: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a|=\sqrt{a^2}$

A1.3.13 Es sei K ein angeordneter Körper
a) Definiere für $A \subset K$ die Menge $-A:=\{-x : x \in A\}$.
Zeige: Es existiert $\inf A \in K$ genau dann, wenn $\sup(-A) \in K$ existiert und dann gilt: $\inf A = -\sup(-A)$.
#Bsp



Bew: "⇒" Sei $\underline{s}=\inf A \in K$.
Wir zeigen: $\sup(-A)=-\underline{s} \in K$ (insbesondere existent).
Mit Def:
(α) $-\underline{s}$ ist obere Schranke von $-A$:
$\underline{s}=\inf A \Rightarrow \underline{s} \leq x \ \forall\, x \in A \Rightarrow -\underline{s} \geq -x \ \forall\, x \in A \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def v A}} -\underline{s} \geq y \ \forall\, y \in -A$
(β) $-\underline{s} \leq \overline{s} \ \forall$ oberen Schranken $\overline{s}$ von $-A$
Sei $\overline{s}$ obere Schranke von $-A$ beliebig $\Rightarrow$
$-\overline{s}$ untere Schranke von A (denn $\overline{s} \geq y \ \forall\, y \in -A \Rightarrow$
$\overline{s} \geq -x \ \forall\, x \in A \Rightarrow -\overline{s} \leq x \ \forall\, x \in A) \underbrace{\Rightarrow}_{s=\inf A} -\overline{s} \leq \underline{s} \Rightarrow \overline{s} \geq -\underline{s}$

"⇐" Analog Aus Bew folgt $\sup(-A)=-\underline{s}=-\inf(A)$

b) Es seien A,B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit $A\subset B$

(.) Zeige: Falls sup A und sup B in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\sup A\leq\sup B$

//BeM: 3.)(500) Sei $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $\exists$ sup T bzw inf T $\Rightarrow$//

// sup T = $\min\{\mathring{s} / \mathring{s}$ ist obere Schranke von T in $\mathbb{K}\}$//

Lös: Z.z. $\exists$ sup A, sup $B\in\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $\sup A\leq\sup B$,

$\sup A \underbrace{=}_{\text{Bem 3}} \min\{s' : s' \text{ ist obere Schranke von A in } \mathbb{K}\} \underbrace{\leq}_{\text{Abschätzung}}$

$\min\{s'' : s'' \text{ ist obere Schranke von B in } \mathbb{K}\} = \sup B$

Bew: Aus „>„

Annahme $\exists$ s_0'' obere Schranke von B mit $\sup A > s_0''$ $\underbrace{\Rightarrow}_{A\subset B}$

s_0'' ist obere Schranke von A mit $\sup A > s_0''$ $\Rightarrow$ Widerspruch

Bem: $s_0''\geq b$ $\forall$ $b\in B$ $\Rightarrow$ $s_0''>a$, $A\subset B$ $\forall$ $a\in A$

(..) Zeige: Falls inf A und inf B in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\inf A\geq\inf B$

Lös: analog(.)

(...) Gibt es solche Mengen $A\neq B$, für die inf A, inf B, sup A, sup B existieren, mit sup A=sup B und inf A =inf B?

Lös: Sei $B=(0,1]$ $\Rightarrow$ sup B=1, inf B=0 (insbesondere existent in $\mathbb{K}$).

$A:=(0,1]\setminus\{\underbrace{1/2}_{\text{irgend ein Punkt}}\}$ $\Rightarrow$ sup A=1, inf A=0.

analog zum Bew für B

A1.3.14 Es sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper und $A:=\{x\in K:x>1\}$.
Existieren inf A, min A, sup A, max A in K? Bestimme im Falle der Existenz die entsprechenden Werte.

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K//*
// R:=<,Anordnungsaxiome://
// (O2)Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c \ \forall a,b,c\in K$//
// (O3)$a<b \Rightarrow a+c < b+c \ \forall c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$//
*//**S1.3.1** (501)Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset \mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
// 2.)$\exists$ maxT $\Leftrightarrow \exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//
// $\exists$ minT $\Leftrightarrow \exists$ infT$\in$K und infT$\in$T: minT=infT//

Bew:(.)sup A existiert nicht in $\mathbb{K}$, sonst wäre sup $A\in\mathbb{K}$ obere Schranke von A d.h. $x\le \sup A \ \forall x\in A \underset{x>1\forall x\in A}{\Rightarrow} 1<\sup A$, $0<\sup A \underset{(O2),(O3)}{\Rightarrow} 1<(\sup A)+1$

$\underset{\text{Def } A}{\Rightarrow}$ $(\sup A)+1\in A$ Widerspruch zu sup A obere Schranke von A, denn $\sup A<(\sup A)+1$

max A existiert nicht in $\mathbb{K}$, da sup A nicht existiert in $\mathbb{K}$, wg. S1.3.1 2.)

(..)inf A existiert und inf A=1. Bew mit Def von inf, denn

α)1 ist untere Schranke von A, klar, da $1<x \ \forall x\in A$ (insbesondere $1\le x \ \forall x\in A$)

β)$1\ge \underline{s} \ \forall$ unteren Schranken $\underline{s}$ von A.

Bew:Annahme: $\exists \ \underline{s}>1$ für untere Schranke von A $\underset{RR}{\Rightarrow}$ $\exists \ c\in\mathbb{K}:1<c<\underline{s}$,

insbesondere $c\in A$.

Widerspruch zu $\underline{s}$ untere Schranke von A, da $c<\underline{s}$ $\underset{\alpha),\beta),\text{Def}}{\Rightarrow}$

$\inf A=1\in\mathbb{K}$

min a existiert nicht, da $1\notin A$ (S1.3.1)

Andere Formulierung:
$M_1=\{x\in\mathbb{R}:x>2\}$
Lös:Es gilt sup $M_1=\infty$ und inf $M_1=2$, min M_1 existiert nicht.
Bew:$M_1\neq\emptyset$, da $2+1>2$, d.h.$2+1\in M_1$. M_1 besitzt keine obere Schranke, denn wenn s eine obere Schranke wäre, dann müsste gelten: $s\ge 2+1$ und $s+1>2$ und $s+1>s$ Widerspruch $\Rightarrow$ sup $M_1=\infty$

2 ist untere Schranke von M_1. Sei nun $s>2$. Dann gilt $2<\frac{2+s}{2}<s$,

d.h. $\frac{2+s}{2}<s$ und $\frac{2+s}{2}\in M_1 \Rightarrow$ s ist keine untere Schranke von $M_1 \Rightarrow$ inf $M_1=2$. Da $2\notin M_1$ existiert min M_1 nicht.

A1.3.15 $A,B\neq\emptyset$, $A,B\subset\mathbb{R}$. $\forall a\in A,b\in B$ gelte $a\le b$. Zeige, sup $A\le$ inf B.
Lös:Ann sup A>inf B $\Rightarrow \exists \ a\in A$ mit $a\ge \inf B+\varepsilon/2 \Rightarrow \inf B\le a-\varepsilon/2 \Rightarrow$
$\exists \ b\in B$ mit $b\le(a-\varepsilon/2)+\varepsilon/4=a-\varepsilon/4 \Rightarrow$ Widerspruch zur Vor $b\ge a$

A1.3.16

Bestimme sup X und inf X (mit Bew) für folgende Mengen X und prüfe, ob diese Mengen ein max oder min besitzen

a) $X=\{x:x=\frac{|t|}{1+|t|},\ t\in\mathbb{R}\}$

Lös: $0\le|t|<1+|t| \Rightarrow 0\le\frac{|t|}{1+|t|}<\frac{|t|}{|t|}=1\ \ \forall\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ 0 ist untere Schranke,

1 ist obere Schranke von X.

- inf,min ? Für t=0 ist $\frac{|t|}{1+|t|}=0 \Rightarrow 0\in X$, $0=\min X=\inf X$
- sup? Annahme $\exists$ m<1 mit $\frac{|t|}{1+|t|}\le m\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$, $1-m>0 \Leftrightarrow$

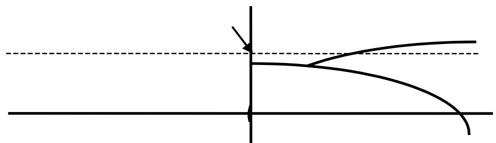
  $|t|\le m(1+|t|)=m+|t|m \Leftrightarrow |t|(1-m)\le m \Leftrightarrow |t|\le\frac{m}{1-m}\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$,

  Widerspruch zu $\mathbb{R}$ unbeschränkt $\Rightarrow \forall\ m: m\ge x: x\in X \Rightarrow m\ge 1 \Rightarrow \sup X=1$.
- 1=max X? $t\in\mathbb{R}: 1=\frac{|t|}{1+|t|} \Leftrightarrow 1+|t|=|t| \Leftrightarrow 1=0!$ falsch $\Rightarrow 1\notin X \Rightarrow$

  X hat kein max.

Andere Formulierung:

$M=\{\frac{|x|}{1+|x|}: x\in\mathbb{R}\}$



*//**D1.2.2** (405) $K=(K,+,^*,<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$.//*
// $\overline{m}=\max T:\Leftrightarrow \forall\ t\in T: t\le\overline{m}$. $\underline{m}=\min T:\Leftrightarrow\forall\ t\in T: \underline{m}\le t$//
*//**S1.3.1** (501) Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
// 1.) $\overline{s}=\sup T: \Leftrightarrow \alpha)\ \overline{s}$ ist obere Schranke von T und //
// $\beta)\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $\overline{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T//
// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T: t\le\overline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overline{s}-\varepsilon$//
// 2.) $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T\in K$ und $\inf T\in T: \min T=\inf T$//

Lös: Beh $M=[0,1)$. Damit inf M=min M=0, sup M=1, $\exists$ kein max M, denn

$0\in M$ und $0\le y\ \ \forall\ y\in M \underset{D1.2.2}{\Rightarrow} \min M=0 \Rightarrow \inf M \underset{S1.3.1\ 2.)}{=} 0$.

1 ist obere Schranke von M und $1-\varepsilon\ \ \forall\ \varepsilon>0$ ist keine obere

Schranke von M $\underset{S1.3.1\ 1.)}{\Rightarrow}$ sup M=1 $\underset{1\notin M}{\underbrace{\overset{S1.3.1\ 2.)}{\Rightarrow}}}$ max M existiert nicht, da

$1\notin M$

Bew: • $M\subset[0,1)$, sei $y\in M$,

Nebenrechnung: $1+|x|>|x|$, $\frac{1}{1+|x|}<\frac{1}{|x|}$, $\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}$

d.h. $y=\frac{|x|}{1+|x|}$ mit $x\in\mathbb{R} \Rightarrow 0\le|x|<1+|x| \Rightarrow 0\le\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}=1$ falls $x\neq 0$

bzw

$0\le\frac{0}{1+0}<1$, falls x=0

• $M\supset[0,1)$, $y\in[0,1)$, Nebenrechnung: $y=\frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y+xy=x \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

Definiere $x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x\ge 0 \Rightarrow y=\frac{x}{1+x}=\frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow y\in M$

Ähnliche Aufgabe

$M=\{\frac{|x|}{1+2|x|} : x\in\mathbb{R}\}$

Es gilt min M=inf M=0, sup M=1/2, max existiert nicht.

Für $x\in\mathbb{R}$ gilt $0\leq\frac{|x|}{1+2|x|}=\frac{2|x|}{1+2|x|}*\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ ⇒

0∈M ist untere Schranke ⇒ min M=0=inf M

½ obere Schranke vom M ⇒ Sei s<1/2. Setze $t=\frac{s+1/2}{2}$

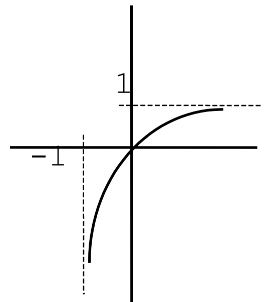
(⇒ s<t<1/2).

Dann ist t∈M, denn für x>0 gilt $t=\frac{x}{1+2x}$ ⇔ $2t=\frac{1+2x-1}{1+2x}$ ⇔

$2t=1-\frac{1}{1+2x}$ ⇔ $\frac{1}{1+2x}=1-2t$ ⇔ $1+2x=\frac{1}{1-2t}$ ⇔ $x=\frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{1}{\underbrace{1-2t}_{<1}}}^{>1}-1\right)$ ⇒

s ist also keine obere Schranke ⇒ 1/2=supM,
1/2∉M ⇒ maxM existiert nicht

b) $M=\left\{\frac{x}{1+x}: x\in\mathbb{R}, x>-1\right\}$



Beh: $M=(-\infty,1)$, damit $\inf M=-\infty$ d.h. M ist nach unten nicht beschränkt.
$\exists$ kein inf M und kein min M
sup M=1. $\exists$ kein max M,
Begründung analog zu a)
Bew: Wir zeigen : $M=(-\infty,1)=\{y\in\mathbb{R}: y<1\}$.

- $M\subset(-\infty,1): y\in M \Rightarrow \exists\ x\in\mathbb{R},\ x>-1$ mit $y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y<1$, d.h. $y\in(-\infty,1)$,

  denn 1.Fall $x=0 \Rightarrow y=0<1$

  2.Fall $x>0 \Rightarrow 1+x>x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{1+x}\underbrace{<}_{x>0}\frac{x}{x}=1$

  3.Fall $x<0 \Rightarrow y=\underbrace{x}_{<0}\ \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0 \text{ da } x>-1}<0<1$

- $M\supset(-\infty,1]: y\in(-\infty,1]$, d.h. $y<1,\ 1-y>0,\ y=\frac{x}{1+x}\ \underbrace{\Leftrightarrow}_{x>-1\Leftrightarrow 1+x>0}\ y+yx=x \Leftrightarrow$

  $x-yx=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

  Setze $x:=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x\in\mathbb{R}$ und $x>-1 \Rightarrow y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$,
  denn

  1.Fall $y\geq 0$, $x=y\underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0,\, da\ y<1}\geq 0>-1$ wie in Def M gesetzt

  2.Fall $y<0$, $1-y>-y$, $x=\frac{y}{1-y}\underbrace{>}_{*}\frac{y}{-y}=-1 \Rightarrow y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$

  $*1-y>-y \Rightarrow \frac{1}{1-y}<\frac{1}{-y} \Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\underbrace{>}_{y<0}\frac{y}{-y}=-1$

*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*
// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//
// $\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ infT$\in$K und infT$\in$T: minT=infT//

Aus $M=(-\infty,1)$ folgt sofort die Beh., denn
(.) Wäre M nach unten beschränkt, so $\exists\ k\in\mathbb{R}: k\neq y,\ \forall\ y\in M=(-\infty,1) \Rightarrow$ $k\leq 1 \Rightarrow k-1<1$, also $k-1\in M$ Widerspruch zu k untere Schranke $(k-1<k)$.
(..) min M existiert nicht, da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert (S1.3.1)
(...) sup M=1
(....) max M<x nicht, da $1\notin M$ (und S 1.3.1)

Andere Formulierung:

$X=\{x: x=\frac{t}{1+t},\ t>-1\}$

Lös: Für $-1<t<0 \Rightarrow \frac{t}{1+t}<0$

Für $t>0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{wie a)}} x=\{0\leq x<1\}$ und sup X=1, es existiert kein max.

Beh: X ist nach unten unbeschränkt.

Bew: Annahme $\exists\ K\in\mathbb{R}$ (oBdA $K<1$) mit $x\geq K\ \forall\ x\in X \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Def Menge}} \frac{t}{1+t}\geq K\ \forall\ t>-1$

$\Leftrightarrow\ t\underbrace{(1-K)}_{>0}\geq K \Leftrightarrow t\geq\frac{K}{1-K}>-1$ da $K>K-1$ bzw $\frac{K}{K-1}<1 \Leftrightarrow \frac{K}{1-K}>-1$

$\Leftrightarrow \exists\ t:=1/2\underbrace{(\underbrace{\frac{K}{1-K}}_{>-1}-1)}_{>-2},\ \frac{K}{1-K}>t>-1 \Rightarrow \frac{K}{1-K}>t>-1$ Widerspruch

*da $t>-1$, d.h. auch $t>\frac{K}{1-K} \Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ Beh falsch

Andere Formulierung:

$M=\{\frac{x}{1+x},\ x\in\mathbb{R},\ x>-1\}$

Lös: zu beweisen inf $M=-\infty$, d.h. nicht nach untenbeschränkt $\Rightarrow$ inf M in $\mathbb{R}$ nicht existent

min, max existiert nicht, sup M=1

$M=(-\infty,1)=\{y\in\mathbb{R}: y<1\}$ weil

$M\subset(-\infty,1)$: $y\in M \Rightarrow \exists\ x\in\mathbb{R},\ x>-1$ mit $y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y<1$, d.h. $y\in(-\infty,1)$ denn

1.Fall: $x=0,\ 1+x>x \Rightarrow y=0<1$

2.Fall: $x>0,\ 1+x>x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{x}{x}=1$

3.Fall: $x<0$: $y=\underbrace{x}_{<0}*\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0}<0<1$

$M\supset(-\infty,1)$: $y\in(-\infty,1)$, d.h. $y<1$. Setze $x:=\frac{y}{1-y}$ (vgl oben) $\Rightarrow$

$x\in\mathbb{R}$ & $x>-1$, denn 1.Fall: $y\geq 0 \Rightarrow x=\underbrace{y}_{\geq 0}*\underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0}\geq 0>-1$

2.Fall: $y<0$: $1-y>-y \Rightarrow \frac{1}{1+y}<\frac{1}{-y} \Rightarrow x=\frac{y}{1-y}>=\frac{y}{-y}=-1$

$\Rightarrow y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$

$M=(-\infty,1) \Rightarrow$ zu Beweisendes da

(.) Wäre M nach unten beschränkt $\Rightarrow \exists\ K\in\mathbb{R}$: $K\neq y\in M=(-\infty,1) \Rightarrow K<1 \Rightarrow$ $k-1<1 \Rightarrow k-1\in M \Rightarrow$ Widerspruch zu K ist untere Schranke (K=1<K)

(..) min existiert nicht da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert.

(...) sup M=1 Bew siehe a)

(....) max M existiert nicht, da $1\notin M$

c) $M=\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{m}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$

//**D1.2.2** *(405) $K=(K,+,^*,<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$. $\overline{m}=\max T :\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\leq\overline{m}$ .//*

//**S1.3.1** *(501) Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*

// 1.) $\underset{\rightarrow}{s}$ inf T:$\Leftrightarrow$ α) $\underset{\rightarrow}{s}$ ist untere Schranke von T und //

// β) $\forall\,\varepsilon>0$ ist $\underset{\rightarrow}{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //

// $\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\geq\underset{\rightarrow}{s}$ und $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underset{\rightarrow}{s}+\varepsilon$//

// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//

Beh: Aus Vermutung inf M=0, min M existiert nicht, sup M=max M=3

Bew: (.) $\frac{1}{n}+\frac{2}{m}\underbrace{\leq}_{n\geq1}\frac{1}{1}+\frac{2}{m}\underbrace{\leq}_{m\geq1}1+\frac{2}{1}=3\ \forall\ m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$t\leq3\ \forall\ t\in M$ und $3\in M$ (mit m=n=1) $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.2.2}$ max M=3 $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 2.)}$ sup M=3

(..) Wegen $\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}+\underbrace{\frac{2}{m}}_{>0}>0\ \forall\ m,n\in\mathbb{N}$ ist 0 untere Schranke von M

Zwischenbetrachtung: $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ t^{\varepsilon}\in M$ mit $t^{\varepsilon}<\varepsilon$?

Bew: Sei $\varepsilon>0$ bel fest $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt $\Rightarrow$

$\exists\ \underbrace{n_0, m_0}_{\text{von } \varepsilon \text{ abhängig}}\in\mathbb{N}: n_0>2/\varepsilon,\ m_0>2\cdot2/\varepsilon$.

Setze $t^{\varepsilon}:=\frac{1}{n_0}+\frac{2}{m_0}\ \Rightarrow\ t^{\varepsilon}\in M$ und $t^{\varepsilon}<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

Aus Zwischenbeh $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 1.)}$ inf M=0 $\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 2.)}}^{0\notin M}$ min M existiert nicht

d) $M=\{1\}\cup\left\{\frac{n-m}{n+m}\mid n,m\in N\right\}$

Lös: Es gilt $\frac{n-m}{n+m}<\frac{n}{n+m}<1$, 1 obere Schranke von M und

$\frac{n-m}{n+m}>\frac{-m}{n+m}>-1$, -1 untere Schranke von M.

Wegen 1∈M folgt 1=max M=sup M.

Bleibt zu zeigen: -1=inf M.

Da −1 untere Schranke, genügt es, zu zeigen, dass t∈M mit t<-1+ε

$\forall$ s>-1+ε. Andererseits gilt $\frac{1-m-1+1}{1+m}<-1+\varepsilon\Leftrightarrow$

$\frac{2}{1+m}-1<-1+\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2}{\varepsilon}<1+m\Leftrightarrow m>\frac{2}{\varepsilon}-1$. Wähle hier ein m∈$\mathbb{N}$ mit $m>\frac{2}{\varepsilon}$

(existiert, da $\mathbb{N}$ nicht beschränkt). Dann gilt $\frac{1-m}{1+m}\in M$ und $\frac{1-m}{1+m}<-1+\varepsilon$

⇒ -1=inf M und min M existiert nicht, denn -1∉M

e) $\{x\in\mathbb{R}\mid(x-a)(x-b)(x-c)<0\}$, wobei $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<b<c$.

Lös: Es gilt A=(x-a)(x-b)(x-c)=0 für x∈{a,b,c}. Da a<b<c ist, gilt

(x-a)(x-b)(x-c)<0, wenn x∈{(-∞,a)∪(b,c)} und x∈{a,b})∪{b,∞} ⇒

$\{x\in\mathbb{R}\mid(x-a)(x-b)(x-c)\}=(-\infty,a)\cup(b,c)$ ⇒

A ist nicht nach unten beschränkt, inf A=-∞ und sup A=c, denn

c ist obere Schranke von A und für ε>0 existiert

d∈(b,c) mit d>c-ε ⇒ max A existiert nicht, denn c∉A.