A1.5.1 Sei im folgenden $a\in\mathbb{R}$ festgehalten. Wir wollen ein $M\subset\mathbb{R}$ a-induktiv nennen, wenn $a\in M$ und $x\in M \Rightarrow x+1\in M$ immer gelten.
Zeige: Es gibt genau eine kleinste a-induktive Menge N_a. Für welches a ist $N_a=\mathbb{N}$?

A1.5.2 Zeige für N_a wie oben 2 Aussagen, welche obiger Beh entsprechen

A1.5.3 Finde für jedes N_a wie oben eine bijektive Abb von N_a auf $\mathbb{N}$

A1.5.4 Zeige: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2 \ \forall\ n\in\mathbb{N}$
Lös: Für n=1 ist die Aussage sicher richtig.
Wenn sie für irgend ein n gilt, folgt
$1+3+..(2n+1)+(2n+3)=(n+1)^2+2(n+1)+1^2=(n+1+1)^2$.
Also gilt die Beh auch für n+1 anstelle von n

A1.5.5 Beweise durch vollständige Induktion:
a) Beweis $n^2\le 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\ne 3$.
Bew: n=1: $1^2\le 2^n=2$ ok
n=2: $2^2\le 2^2$ ok
IA n=4: $4^2\le 2^4$ ok
IH $n^2\le 2^n$
IS $(n+1)^2=n^2+2n+1 \underbrace{\le}_{IH} 2^n+\frac{n^2}{2}+1\le 2^n+2^{n-1}+1\le 2^n+2^{n-1}+2^{n-1}=2^n+2^n=2^{n+1}$

a) $\forall\ n\in\mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3=1+2^3+3^3+4^3+....n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(Bedeutung $\sum_{k=1}^{n+1}$ siehe D1.5.2 (709))

Bew: IAnf n=1 : $1^3=\frac{1^2*2^2}{4}=1$

IHyp für ein $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

IS $n\to n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\sum_{k=1}^{n} k^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^2(n+1)=$
$\frac{(n+1)^2(\text{n+4n+4})}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

b) Sei M eine endliche Menge, |M| bezeichne die Anzahl ihrer Elemente und $\mathbf{P}(M)$ ihre Potenzmenge. $\forall$ endlichen Mengen gilt: $|\mathbf{P}(M)|=2^{|M|}$.
Anl: Für $m\in M$ ist $\mathbf{P}(M)=A\cup(\mathbf{P}(M)\setminus A)$ mit $A=\{X\in\mathbf{P}(M):m\in X\}$
Bew: IAnf n=1 : $|M|=1 \Rightarrow M=\{m\} \Rightarrow \mathbf{P}(M)=\{\emptyset,\{m\}\} \Rightarrow |\mathbf{P}(M)|=2=2^1$.
Ihyp : $|\mathbf{P}(M)|=2^{|M|}$. für ein $n\in\mathbb{N}$...
IS $n\to n+1$: Sei $m\in M$. $\tilde{M}=M\setminus\{m\} \Rightarrow |\tilde{M}|=n$, da $|M|=n+1$.
$X=\{\underbrace{X \text{ ohne } \{m\}}_{Y}\cup\{m\}\}$

$\mathbf{P}(M)=A\cup(\mathbf{P}(M)\setminus A)=\{X\in\mathbf{P}(M):m\in X\}\cup\{X\in\mathbf{P}(M):m\notin X\}=$
$\{X\in\mathbf{P}(M):m\in X\}\cup\{Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}=\{Y\cup\{m\}:Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}\cup\{Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}$
$|\mathbf{P}(M)|=||Y\cup\{m\}:Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}|+|\mathbf{P}(\tilde{M})|=2^n+2^n=2^{n+1}$.

c) Fibonaccizahlen: Es seien $F_0=0$ und $F_1=1$ gegeben. F_n wird rekursiv definiert durch $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Dann gilt $\forall\ 2\le n\in\mathbb{N}$:

$F_n=\frac{[1/2(1+\sqrt{5})]^n-[1/2(1-\sqrt{5})]^n}{1/2(1+\sqrt{5})-1/2(1-\sqrt{5})}=\frac{\lambda^n-m^n}{\lambda-m}$, $\lambda=½(1+\sqrt{5})$ $\mu=½(1-\sqrt{5})$

Bew:IAnfang n=2: $F_2=F_1+F_0=1+0=1$

$F_2=\frac{\lambda^2-m^2}{\lambda-m}=\lambda+\mu=1/2(1+\sqrt{5})+½(1-\sqrt{5})$

IHyp :Für ein $n\in\mathbf{N}$ gilt $F_k=\frac{\lambda^k-m^k}{\lambda-m}$ $\forall\ 2\le k\le n$

IS n→n+1:z.z. $F_{n+1}=\frac{\lambda^{n+1}-m^{n+1}}{\lambda-m}=F_n+F_{n-1}\underbrace{=}_{\text{IHyp} f.\,n \text{ und } n-1}\frac{\lambda^n-m^n}{\lambda-m}+\frac{\lambda^{n-1}-m^{n-1}}{\lambda-m}=$

$\frac{(\lambda^n+\lambda^{n-1})-(m^n+m^{n-1})}{\lambda-m}=\frac{\lambda^{n+1}-m^{n+1}}{\lambda-m}$ siehe NR

NR: $\lambda^n+\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda+1)=\lambda^{n-1}\lambda^2=\lambda^{n+1}$.????

Beh: $(\lambda+1)=\lambda^2$,

$½+\sqrt{5}/2+1=3/2+\sqrt{5}/2$, $[1/2(1+\sqrt{5})]^2=¼(1+2\sqrt{5}+5)=3/2+\sqrt{5}/2$

analog $\mu^n+\mu^{n-1}=\mu^{n+1}$.

d) $\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1\ \forall\ n\in\mathbf{N}$

Lös: n=0: $\sum_{k=0}^{0}2^k=2^0=1$, $2^{0+1}-1=2^1-1=1$ ....ok

Indh: $\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+1}-1$ für $n\ge0$

n→n+1: $\sum_{k=0}^{n+1}2^k=\sum_{k=0}^{n}2^k+2^{n+1}\underbrace{=}_{IH}2^{n+1}-1+2^{n+1}=2*2^{n+1}-1=2^{(n+1)+1}-1$

e) $\prod_{k=2}^{n}(1-k)=(-1)$

A1.5.6

a) Durch das Rekursionsschema

$a_0:=-2$, $a_1:=1$, $a_{n+1}:=1/2(a_n+a_{n-1})$, $n\in\mathbf{N}$, wird genau eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ festgelegt. Man gebe eine explizite Darstellung für diese Folge.

Anleitung: Man berechne a_n für n=2,3,4,5 und beweise sodann die sich ergebende Vermutung.

*//**S1.5.3** (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*
//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall\ m\in N$ mit $1\le m\le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr",// //so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n\in N$//

Lös: $a_2=1/2(1+(-2)=-1/2$ $a_3=1/4$ $a_4=-1/8$ $a_5=1/16$.. Vermutung:

Beh: $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=(-1/2)^{n-1}\ \forall\ n\in\mathbf{N}_0$. Bew mit Indsatz 2. Fassung

A(n): $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\ \forall\ n\in\mathbf{N}_0$.

Bew: IAnf S1.5.3: n=0: $a_0=-2=(-1/2)^{0-1}$, d.h. $A_{(0)}$ wahr

IS : $\forall\ n\in\mathbf{N}_0$ gilt $(A_{(m)}\ \forall\ m\in\mathbf{N}_0$ mit $0\le m\le n\Rightarrow A_{(n+1)})$.

Sei $n\in\mathbf{N}_0$ fest aber bliebig

(Z.z. ist: $\underbrace{A_{(m)},0\le m\le n}_{\text{Ind } Hyp}\Rightarrow\underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Ind } Beh}$)

1.Fall: n=0 $a_{n+1}=a_1=1=(-1/2)^0=(-1/2)^{(n+1)-1}=$
$(-1/2)^{(1+1)-1}=(-1/2)$ wahr,

d.h. $A_{(0)} \Rightarrow A_{(0+1)}$, $A_{(0)}$ wurde hier nicht benötigt

2.Fall: $n\geq 1$ IndHyp: $a_m=(-1/2)^{m-1}$ für alle m $0\leq m\leq n$,

IndBeh : $a_{n+1}=(-1/2)^{(n+1)-1}=(-1/2)^n$

$a_{n+1}=1/2(a_n+a_{n-1}) \underbrace{=}_{IndHyp} 1/2((-1/2)^{n-1}+(-1/2)^{(n-1)-1})=$

$\frac{1}{2}((-1/2)^{n-1}\underbrace{(1+(-1/2)^{-1}}_{=1+(-2)} =$

$(-1)(1/2)(-1/2)^{n-1}=(-1/2)(-1/2)^{n-1}=(-1/2)^n$

*//**S1.5.3** (703) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*

//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall$ $m\in\mathbb{N}$ mit $1\leq m\leq n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr"//

// so gilt: Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}$//

Es wurde also für beliebiges aber festes $n\in\mathbb{N}_0$ gezeigt

$A_{(m)}$, $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$ mit $0\leq m\leq n \Rightarrow A_{(n+1)}$,

also nach Teil 2) in S1.5.3 $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ gilt ($A_{(m)}$, $m\in\mathbb{N}_0$, $0\leq m\leq n \Rightarrow$ $A_{(n+1)}$).

Die Vor nach S1.5.3 ist also erfüllt mit IndAnf n=0.

Damit: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ (Teil 1 und 2))

b) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert:

$a_0:=3$, $a_{n+1}:=1/2(a_n+5/a_n)$, $n\geq 0$.

(.) Zeige: $\sqrt{5}<a_{n+1}<a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.

(..) Ist $\sqrt{5}$ das Infimum der Wertemenge der Folge (a_n)?

Bem: Diese Def ist sinnvoll, da $a_n>0$ d.h. auch $a_n\neq 0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.

Bew durch Induktion

$n=0: a_0=3>0$, $n\to n+1: a_{n+1}=1/2(\underbrace{a_n}_{>0}+\underbrace{5/a_n}_{>0})>0$

*//**A1.2.10**c)408)a,b∈K angeordnet. c)$a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn $|a|<|b|$//*
*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*
// 1.) $\underline{s}$ = inf T:⇔ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //
// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //
// ⇔ $\forall\ t\in T$: $t\geq\underline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$//

Lös:Z.z. $\sqrt{5}<a_{n+1}<a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

$5<a_n^2$ (damit $\sqrt{5}<a_n$, denn $(\sqrt{5})^2=5<a_n^2 \underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.10} \underbrace{|\sqrt{5}|}_{=\sqrt{5},\sqrt{}\ stets\geq 0}<|a_n|=a_n>0$

und $a_n>a_{n+1}\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$).

Bew $5<a_n^2$ (IHyp)durch Induktion nach n.

Ianf n=0: $5<a_0^2=3^2=9$ und

$a_1=1/2(a_0+5/a_0)=1/2(3+5/3)=7/3<9/3=3=a_0$

IS n $\underbrace{a}_{n\geq 0}$ n+1: $a_{n+1}^2-5=[1/2(a_n+5/a_n)]^2-5=1/4(a_n^2+10+(5/a_n)^2-20)=$

$1/4(a_n^2-10+(5/a_n)^2)=[1/2(a_n-5/a_n)]^2=\left(\frac{a_n^2-5}{2a_n}\right)^2>0$,

(da nach IHyp $a_n^2-5\neq 0$ wegen $a_n^2>5$) ⇒ $a_{n+1}^2>5$

Beh: $a_{n+1}<a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

Bew: $a_n-a_{n+1}=a_n-1/2(a_n+5/a_n)=1/2(a_n-5/a_n)=\frac{a_n^2-5}{2a_n}>0$

(nach IHyp da $a_n^2-5\neq 0$ wegen IHyp $a_n^2>5$) also $a_n>a_{n+1}\forall\ n\in\mathbb{N}_0$

Nach obigem ist die Menge $\{a_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ nach unten durch

$\sqrt{5}$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{Vollständigkeitsax.}$ $\exists\ \alpha:=\inf\{a_n,n\in\mathbb{N}_0\}$

existent in $\mathbb{R}$ und $\alpha\geq\sqrt{5}$

Beh: $\alpha=\sqrt{5}=\inf\{a_n,n\in\mathbb{N}_0\}$.

Bew:Annahme: $\alpha\neq\sqrt{5}$, d.h. $\alpha>\sqrt{5}\ \underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.10c}\ \alpha^2>5$ ⇒ $a_n-a_{n+1}=\frac{a_n^2-5}{2a_n}\underbrace{\geq}_{a_n\geq\alpha\forall n}$

$\underbrace{\frac{\alpha^2-5}{2\cdot 3}}_{a_n\le a_0=3\,\forall n} =: \varepsilon\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, wobei $\varepsilon>0$ (da $\alpha^2>5$).

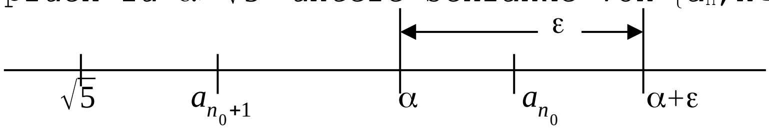
$* \ a_{n_0} - a_{n_0+1} \ge \varepsilon \Rightarrow -a_{n_0+1} \ge \varepsilon - a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0+1} \le a_{n_0} - \varepsilon$

Zu diesem $\varepsilon>0$ $\underbrace{\exists t_\varepsilon}_{S1.3.1\ 1.)} \in \{a_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ da α Infimum, mit $t_\varepsilon<\alpha+\varepsilon$,

d.h. $\exists\ n_0\in\mathbb{N}_0$: $a_{n_0}<\alpha+\varepsilon$, d.h. $a_{n_0}-\varepsilon<\alpha \Rightarrow a_{n_0+1} \le a_{n_0}-\varepsilon<\alpha \Rightarrow$

$\sqrt{5} < a_{n_0+1} < \alpha$..

Widerspruch zu $\alpha>\sqrt{5}$ untere Schranke von $\{a_n, n\in\mathbb{N}_0\} \Rightarrow \alpha=\sqrt{5}$



A1.5.7

a) $a_n := \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$. Zeige $a_n \ge \frac{1}{2}$.

Lös: $a_{n+1}<a_n$, $\frac{1}{2}<a_n<1\ \ \forall\ n\ge 2$,

$$a_n-a_{n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

Für $n\ge 2$: $a_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} < \frac{n}{n} = 1$

(man braucht 2 Summanden, daher n>=2, größter Summand ist $\frac{1}{n}$)

für n=1: $a_n=1<1$, $a_n - \frac{1}{2} = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \underset{n\ge 2}{>} \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2n-(2n-1)}{4n-2} = \frac{1}{4n-2} > 0$

gilt auch für n=1, dann $> \to \ge$

b)Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3)

*//**S1.5.3** (703)Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*
//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall\, m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist// //wahr", so gilt: Beh:$A_{(n)}$ ist wahr $\forall\, n \in \mathbb{N}$//
//Bem:Induktion kann auch bei $n_0 \in N$ beginnen $B_{(n)} := A_{(n_0+n-1)}$ //

Beweise: $\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

//D1.5.2 (709)//

$$// \ (.) \quad \text{Die Summe } \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \text{ durch } \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{0} a_\nu := 0 \\ \sum_{\nu=1}^{1} a_\nu := a_1 \\ \sum_{\nu=1}^{m+1} a_\nu := a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu,\ 1 \leq m \leq n-1 \end{cases} \quad //$$

*//**S1.5.1** (701)vollständigen Ind//*
//Vor. $\forall\, n \in N$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es
// gelte 1.)"$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang) und//
// 2.) $\forall\, n \in N$ (beliebige $n \in N$) folgt aus „$\underbrace{A_{(n)} \text{ist wahr}}_{IndHyp}$" auch//
// „$\underbrace{A_{(n+1)} \text{ist wahr}}_{IndAussage}$" so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in N$//
// $\forall\, n \in N$ gilt $\underbrace{(\underbrace{A_{(n)}}_{Induktionshypothese} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{Induktionsbehauptung})}_{\text{Induktionsschluss } n \Rightarrow n+1}$ ist wahr//
//Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\, n \in N$//

Bew:Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Induktion kann bei jedem Element von $\mathbb{Z}$ anfangen(mit A(n):"$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$")

IAnf n=0 : $\sum_{\nu=1}^{0} \nu \underbrace{=}_{D1.5.2} 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ wahr, d.h. $A_{(0)}$ wahr

IS $n \to n+1$ ($n \geq 0$):Z.z. $\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}}_{A_{(n)}\ Indhyp} \Rightarrow \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}}_{A_{(n+1)}\ Indbeh}$ ist wahr

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu \underbrace{=}_{D1.5.2} (n+1) + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \nu}_{\text{Ind}\,Hyp = \frac{n(n+1)}{2}} = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(1+n/2) =$$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, damit ergibt sich die Beh aus S1.5.1 (vollständige Induktion) mit Induktionsanfang n=0 anstelle von n=1

c) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Bew: Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$

$n=0 \quad : \sum_{\nu=1}^{0} \nu^2 \underbrace{=}_{D1.5.2} 0 = \frac{0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0+1)}{6}$ wahr

$\underbrace{n}_{n>0} \quad n+1 : \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^2 \underbrace{=}_{D1.5.2} (n+1)^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \overset{=}{\scriptstyle\text{IndHyp}} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$(n+1) \frac{6(n+1) + n(2n+1)}{6} = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} =$

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

d) $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1$

Bew: Ihyp : $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1$

$n=1 \quad : \prod_{k=1}^{1} (1+1/k) = 1+1$

$n \mapsto n+1$: Es gelte $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$\prod_{k=1}^{n+1} (1+1/k) = \prod_{k=1}^{n} (1+1/k)(1+\frac{1}{n+1}) \underbrace{=}_{IHyp} (n+1)\frac{n+2}{n+1} = n+2 = (n+1)+1$

e) $\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$ für $x_1, ..., x_n > 0$.

Wenn $x_1, ..., x_n = x$: $(1+x)^n \geq 1+nx$, siehe auch weiter unten S1.5.6 mit $x \geq -1$

Bew: $n=1 \quad : \prod_{k=1}^{1} (1+x_n) = 1+x_1 = 1+\sum_{k=1}^{1} x_k$

$n \to n+1 : \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) = \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)(1+x_{n+1}) \geq (1+\sum_{k=1}^{n} x_k)(1+x_{n+1}) =$

$1 + \sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{x_{n+1}}_{>0} + \underbrace{x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k}_{\leq 0} \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$.

f) $\sum_{k=1}^{n} a_k * \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2 \ (a_1, \ldots a_n > 0)$

Bew: Für $x,y>0$ gilt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2+2xy}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} = 2$

Bew durch Induktion nach n

$n=1: \quad \sum_{k=1}^{1} a_k * \sum_{j=1}^{1} \frac{1}{a_j} = \frac{a_1}{a_1} = 1^2$

$n \to n+1$: Für $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n+1} a_k * \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{a_j} = (\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1})(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}}) =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + a_{n+1}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} a_j + a_{n+1}\frac{1}{a_{n+1}} >$

$$n^2+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{n+1}}{a_j}+\frac{a_j}{a_{n+1}}\right)+1\geq n^2+\sum_{j=1}^{n} n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

g) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Bew: n=1: $\sum_{k=1}^{n} k^3=1=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

n→n+1: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+\frac{4n+4}{4}\right)=(n+1)^2+\frac{(n+2)^2}{4}=$

A1.5.8 Beweise: $\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j} a_{jk}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k}^{n} a_{jk}$

Bew:1. Möglichkeit:

K=: 1 2 3 … n

j=1: a_{11}

j=2: a_{21} a_{22}

j=3: a_{31} a_{32} a_{33}

.

.

j=n: a_{n1} a_{n2} $a_{n3}...a_{nn}$

$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j} a_{jk}=\prod_{j=1}^{n} a_{j1}a_{j2}a_{j3}...a_{jj}=(a_{11})(a_{21}a_{22})...(a_{n1}...a_{nn})=$$

$$\left(\prod_{j=k}^{n} a_{1k}a_{2k}...a_{nk}\right)=\prod_{k=1}^{n} a_{kk}a_{k+1k}...a_{nk}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k}^{n} a_{jk}$$

2. Möglichkeit:

$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j} a_{jk}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\underbrace{a_{jk}}_{\text{Setze } a_{jk}=1 \text{ für } k>j}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} a_{jk}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k}^{n} a_{jk}.\quad 1\leq k\leq j\leq n$$

A1.5.9 Es seien $x_1,...,x_n\in \mathbb{R}$ mit $x_\nu\geq 0$ $\forall$ $\nu=1,...,n$.

Beweise: $\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)\geq 1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$.

Bew: $\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)\underbrace{(1+x_{n+1})}_{\geq 0}\geq\left(1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)(1+x_{n+1})=1+\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu+\underbrace{x_{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu}_{\geq 0}\geq 1+\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu$

Durch vollständige Induktion:

n=1: $\prod_{\nu=1}^{1}(1+x_\nu)=1+x_1\geq 1+\sum_{\nu=1}^{1} x_\nu=1+x_\nu$

n→ n+1: $\prod_{\nu=1}^{n+1}(1+x_\nu)=(1+x_{n+1})\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)(1+x_\nu)\geq(1+x_{n+1})\left(1+\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)\right)=$

$$1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu+x_{n+1}+\underbrace{x_{n+1}}_{^30}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu}_{\geq 0}{}^3\ 1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu+x_{n+1}=1+\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu\Rightarrow$$

A(n) ist wahr

A1.5.10 Es seien $a_1,...,a_n,b_1,...,b_{n+1}\in \mathbb{C}$, und es sei $A_n:=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zeige: $\sum_{k=1}^{¥} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{¥} A_k(b_{k+1}-b_k)$

Bew: Induktion nach n oder $\sum_{k=1}^{¥} A_k(b_{k+1}-b_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{v=1}^{k} a_v(b_{k+1}-b_k) =$

$\sum_{v=1}^{n} a_v \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k)}_{Teleskopsumme} = \sum_{v=1}^{n} a_v(b_{n+1}-b_v) = b_{n+1}A_n - \sum_{v=1}^{n} a_v b_v$.

oder rechte Seite:

$A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1}-b_k) = b_{n+1}\sum_{k=1}^{\infty} a_v - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)\sum_{v=1}^{k} a_v}_{1\le v\le k\le n} =$

$b_{n+1}\sum_{v=1}^{\infty} a_v - \sum_{v=1}^{n} a_v \sum_{k=0}^{\infty}(b_{k+1}-b_k) = \sum_{v=1}^{n} a_v(b_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(b_{k+1}-b_k)) =$

$\sum_{v=1}^{n} a_v(b_{n+1}+b_v-b_{n+1}) = \sum_{v=1}^{n} a_v\, b_v$: linke Seite

A1.5.11 Beweise $\forall\, n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge 2$ die Ungleichung $1+\frac{1}{n} < (1+\frac{1}{n^2-1})^n$.

Bew: $(1+\frac{1}{n^2-1})^n \underbrace{\ge}_{Bernoulli} 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$, $\underbrace{\frac{n^2}{n^2-1}}_{>1} > 1+\frac{1}{n}$

A1.5.12

Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0\in\mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3). Beweise:

a) $n^2\le 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0\setminus\{3\}$

*//**A1.2.9** (408)a) aus a<b und b≤c folgt a<c//*

Bew: $n=0$, $0^2=0\le 1=2^0$, $n=1: 1^2=1\le 2=2^1$, $n=2: 2^2\le 2^2$, $n=3: 3^2\not\le 2^3$

$n^2\le 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $n\ge 4$ wird unten durch Induktion nach n noch bewiesen. Dazu benötigt man Lemma:

$2n+1<2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$ Induktion nach n

$n=3$: $2\cdot 3+1=7<8=2^3$ wahr

$\underbrace{n}_{n\ge 3}$ $n+1: 2(n+1)+1=(2n+1)+2 \underbrace{<}_{IndHyp} 2^n+\underbrace{2}_{<2^n} < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n=2^{n+1}$

Also: $2(n+1)+1<2^{n+1}$ (mit **A1.2.9** a)

Bem: $2\le 2^n=(1+1)^n \underbrace{\le}_{Bernoulli\ Ungl} 1+n\ge 2\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Noch z.z.: $n^2\le 2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}, n\ge 4$ ... Induktion nach n

$n=4$: $4^2=16\le 16=2^4$ wahr

$\underbrace{n}_{n\ge 4}$ $n+1: (n+1)^2=\underbrace{n^2}_{\le 2^n}+2n+1 \underbrace{\le}_{IndHyp\ Abschätzung} 2^n+\underbrace{2n+1}_{\le 2^n \text{ siehe oben da } n\ge 3}$

$\le 2^n+2^n=2^{n+1} \Rightarrow (n+1)^2\le 2^{n+1}$

Bem: Genauer gilt $n^2<2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, $n\ge 5$ oder $n\in\{0,1\}$

$n^2=2^n$ für $n\in\{2,4\}$

$n^2>2^n$ für $n=3$

b) $\sum_{v=1}^{2n}\frac{(-1)^{v+1}}{v} = \sum_{v=n+1}^{2n}\frac{1}{v}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

//**D1.5.2** *(709)* $\sum_{v=1}^{n} a_v := \begin{cases} \sum_{v=1}^{0} a_v := 0 \\ \sum_{v=1}^{1} a_v := a_1 \\ \sum_{v=1}^{m+1} a_v := a_{m+1} + \sum_{v=1}^{m} a_v ,\ 1 \le m \le n-1 \end{cases}$ //

Bew:Induktion nach n

n=0: $\sum_{v=1}^{2\cdot 0} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \underbrace{=}_{D1.5.2} 0 \underbrace{=}_{D1.5.2} \sum_{v=1}^{0} \frac{1}{v} = \sum_{v=0+1}^{2\cdot 0} \frac{1}{v}$ wahr

n n+1: $\sum_{v=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{v+1}}{v} \underbrace{=}_{2xD1.5.2} \sum_{v=1}^{2n} \frac{(-1)^{v+1}}{v}) + \frac{(-1)^{\overbrace{(2n+1)+1}^{gerade}}}{2n+1} + \frac{(-1)^{\overbrace{(2n+2)+1}^{ungerade}}}{2n+2} \underbrace{=}_{IndHyp*(715)}$

$\underbrace{\left(\sum_{v=n+1}^{2n} \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{2n+1}}_{=\sum_{v=n+1}^{2n+1} \frac{1}{v}} + \frac{-1}{2n+2} = \left(\sum_{v=n+2}^{2n+1} \frac{1}{v}\right) + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}}_{=+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = +\frac{1}{2n+2}} =$

$\sum_{v=n+2}^{2n+2} 1/v = \sum_{v=(n+1)+1}^{2(n+1)} 1/v$

* $(-1)^k = \begin{cases} 1, \text{falls } k \text{ gerade} \\ -1, \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$ (Bew. durch Ind nach k)

$\left(\sum_{v=n+1}^{2n} 1/v + \frac{1}{2n+1} = \sum_{v=n+1}^{2n+1} 1/v \right)$

A1.5.13 $M = \left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

M={1/2; 1; 9/8; 1; 0,78125; 0,5625,…}……Vermutung:
Beh:inf M=0, min M existiert nicht ,sup M=max M=9/8

*//**A1.5.12** (715) a)* $n^2 \le 2^n\ \forall\ n \in N_0 \setminus \{3\}$
*//**S1.3.1** (501) Vor.:* $\mathbb{K}$ *angeordnet* $T \subset \mathbb{K},\ T \ne \emptyset,\ s \in \mathbb{K}$
// 1.) $\bar{s} = \sup T: \Leftrightarrow \alpha)\ \bar{s}$ *ist obere Schranke von T und*
// $\beta)\ \forall\ \varepsilon > 0$ *ist* $\bar{s} - \varepsilon$ *keine obere Schranke von T*
// $\Leftrightarrow\ \forall\ t \in T:\ t \le \bar{s}$ *und* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ t_\varepsilon \in T$ *mit* $t_\varepsilon > \bar{s} - \varepsilon$
// $\underline{s} = \inf T: \Leftrightarrow \alpha)\ \underline{s}$ *ist untere Schranke von T und //*
// $\beta)\ \forall\ \varepsilon > 0$ *ist* $\underline{s} + \varepsilon$ *keine untere Schranke von T//*
// $\Leftrightarrow\ \forall\ t \in T:\ t \ge \underline{s}$ *und* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ t_\varepsilon \in T$ *mit* $t_\varepsilon < \underline{s} + \varepsilon$*//*
// 2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in \mathbb{K}$ *und* $\sup T \in T: \max T = \sup T$*//*
// $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in \mathbb{K}$ *und* $\inf T \in T: \min T = \inf T$*//*

Bew:(.) $\frac{n^2}{2^n} \le 1\ \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ nach A1.5.12 a), für n=3: $\frac{n^2}{2^n} = 9/8 \underbrace{\Rightarrow}_{1 \le 9/8}$

$\frac{n^2}{2^n} \le 9/8\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $9/8 \in M \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def max}}$ max M=9/8 $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{S1.3.1 2.)}}$ sup M=9/8.

(..) $\frac{n^2}{2^n} > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ ist untere Schranke von M

Noch z.z.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ m_\varepsilon \in M$ mit $m_\varepsilon < \varepsilon$. Dann folgt aus S1.3.1 1.)

inf M=0 $\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{\text{S1.3.1 2.)}}}_{0\notin M}$ ~~min M~~ existiert nicht

Bew: Sei $\varepsilon>0$ bel aber fest.

$\mathbb{N}$ unbeschränkt $\Rightarrow \exists \underbrace{n_0}_{\in n_0(\epsilon)} \in \mathbb{N}$: $n_0>1/\varepsilon$ bzw. $1/n_0<\varepsilon$. $\underbrace{<}_{2^{n_0}>n_0^3}$

O.B.d.A. $n_0\geq 10$

Setze $m_\varepsilon=\dfrac{n_0^2}{2^{n_0}} \Rightarrow m_\varepsilon\in M$ und $m\varepsilon \underbrace{<}_{2^{n_0}>n_0^3} \dfrac{n_0^2}{n_0^3}=\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Einschub: Beh $2^n>n^3\ \forall\ n\in\mathbb{N}, n\geq 10$. Bew Induktion nach n

$n=10$: $2^{10}=1024>1000=10^3$

$n \underbrace{\mapsto}_{n\geq 10} n+1$: $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ $\underbrace{¿}_{IndHyp}$ $2^n+\underbrace{\left(3n^2+3n+1\right)}_{<2^n,\text{ da } n\geq 10}<2^n+2^n=$

2^{n+1}

Nebenrechnung: $3n^2+3n+1<2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 10$

(stimmt auch für n=8 und n=9) Bew durch Induktion nach n

$n=10$: $3\cdot 10^2+3\cdot 10+1=331<1024=2^{10}$

n n+1: $3(n+1)^2+3(n+1)+1=(3n^2+6n+3)+(3n+3)+1=$

$(3n^2+3n+1)+(6n+6) \underbrace{<}_{IndHyp} 2^n+\underbrace{6(n+1)}_{<2^n(Induktion)} <2^n+2^n=2^{n+1}$

Beh: $6(n+1)<2^n\ \forall\ n\in\mathbb{N}, n\geq 10$

$n=10$: $66<1000$

n n+1: $6(n+2)=6(n+1)+6 \underbrace{<}_{IndHyp} 2^n+\underbrace{6}_{<2^n} <2^n+2^n=2^{n+1}$