A1.5.14 Zeige:Eine nach oben beschränkte Teilmenge M der natürlichen Zahlen ist endlich

A1.5.15 Zeige:Ist f: $\mathbb{N}\to A$ surjektiv, so ist A höchstens abzählbar.
*Lös:f: $\mathbb{N}\to A$ surjektiv $\Rightarrow$ $\forall$ $a\in A$ existiert mindestens ein $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

1.Fall: $\forall$ $a\in A$ existiert genau ein $n\in\mathbb{N}$:n $f(n)=a$ $\Rightarrow$ f bij $\Rightarrow$ A abzählbar ∞.

2.Fall: $\exists$ $a_{n+1}\in A$ mit $g:\{k_{n+1},k_{n+1}+1,\dots k_{n+1}+\ _{n+1}\}\to a_{n+1}$???, $n\in\mathbb{N}_0$, k, $\in\mathbb{N}$, n, ,$k\leq\infty$, k, $k_{n+1}=k_n+\ _n+1$??? $\Rightarrow$ n $f(n)=a_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\leq\infty$ $\Rightarrow$ abzählbar $\leq\infty$ $\Rightarrow$ höchstens abzählbar.

A1.5.16 Es sei F die Menge aller 0-1 Folgen aus $\mathbb{R}$, d.h. $F=\{(a_n)_{n=1}^{\infty}:a_n\in\{0,1\}\ \forall\ n\in\mathbb{N}\}$. Zeige, dass F überabzählbar ist.
Lös: Annahme F ist nicht überabzählbar, d.h. F ist höchstens abzählbar.

$|F|=\infty$, denn $\exists$ $(\delta_{nm})_{n=1}^{\infty}\in F$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}$, wobei $\delta_{nm}=\begin{cases}0\ falls\, n=m\\ 1\ falls\, n\neq m\end{cases}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{|F|=\infty}$

F ist abzählbar, d.h. lässt sich in folgender Form schreiben: $F=\{\underbrace{a^{(m)}}_{(a_n)_{n=1}^{\infty}}:m\in\mathbb{N}\}$

Sei $a^{(m)}=:(a_{mn})_{n=1}^{\infty}$, $m\in\mathbb{N}$

Definiere $a_n=\begin{cases}0\ falls\, a_{mn}=1\\ 1\ falls\, a_{mn}=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a_n\neq a_{mn}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ und $a:=(a_{mn})_{n=1}^{\infty}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{a_n\in\{0,1\}\,\forall\, n\in N}$

$a\in F$ $\Rightarrow$ $\exists$ $m_0\in\mathbb{N}$ $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}=a^{(m_0)}=(a_{n,m_0})_{n=1}^{\infty}$, insbesondere $a_{m_0}=a_{m_0,n_0}$ für ein $m_0\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\exists$ Widerspruch zur Def von a_{m_0} $\Rightarrow$ doch überabzählbar

Bem:Wie wir später sehen werden, folgt aus obigem Satz, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebig kleinen Intervall [a,b] mit a<b immer überabzählbar ist. Da ein solches Intervall nur abzählbar viele rationale Zahlen enthält, ist sogar die Menge der irrationalen Zahlen in [a,b] überabzählbar.

A1.5.17 Zeige:Eine beschränkte Teilmenge M der ganzen Zahlen ist endlich
*Lös:Sei $n\in\mathbb{N}$. $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n\in\mathbb{N}\}$.

$M=P\cup\{0\}\cup L=\{m_+\in\mathbb{N}\,|\,m_+=f(n)\leq\overline{m}\}\cup\{0\}\cup\{-m_-\in\mathbb{N}\,|\,m_-=f(n)\leq\underline{m}\}\subset\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ M durch $\overline{m}$ und $\underline{m}$ beschränkt $\Rightarrow$ $\exists$ Abb $\{n\in\mathbb{N}\,|\,1\leq n\leq\overline{m}\}\to P$ mit $n\mapsto f(n)=m_+$ $\forall$ $n\leq m_+$ d.h. bijektiv $\Rightarrow$ $|1,2,...n|\leq\overline{m}$ $\Rightarrow$ $|P|=k\leq\overline{m}$, $f(n)=f(k+1)=0$ bijektiv $\Rightarrow$

$\exists$ Abb $\{n\in\mathbb{N}\,|\,k+1\leq n\leq\overline{m}\}\to L$ mit $n\mapsto f(n)=m_-$ $\forall$ $n\leq m_-$ d.h. bijektiv $\Rightarrow$ $|k+2,k+3,...,k+n|\leq\underline{m}$ $\Rightarrow$

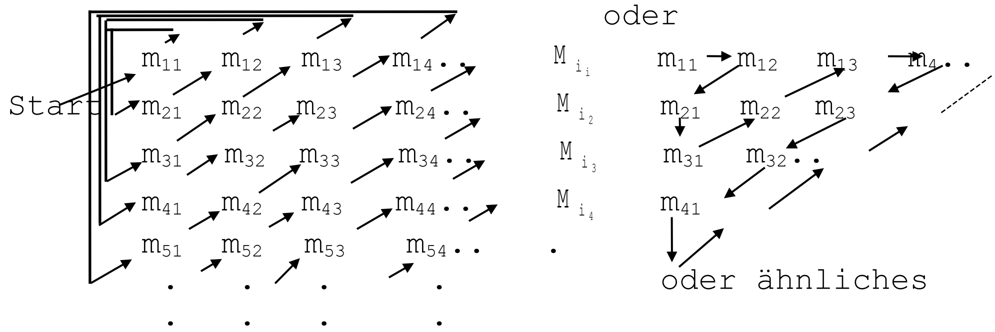
$\exists$ bij Abb $f:\{1,2,...(k+n)\leq(\overline{m}+1+\underline{m})\}\to P\cup\{0\}\cup L=M$ mit $|M|\leq\overline{m}+1+\underline{m})\leq\infty$

A1.5.18 Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit a<b und $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ injektiv. Zeige, dass $f((a,b])$ überabzählbar ist.

A1.5.19 Zeige:Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. ist I eine abzählbare Indexmenge und M_i abzählbar für alle $i\in I$, so ist $\bigcup_{i\in I} M_i$ abzählbar.

Bew:I abzählbar $\Rightarrow$ I läßt sich in der Form $I=\{i_\nu \mid \nu\in \mathbb{N}\}$ schreiben (mit paarweise verschiedenen i_ν). M_{i_ν} abzählbar $\Rightarrow$ $M_{i_\nu}=\{m_{\nu\mu}:\mu\in\mathbb{N}\}$ (mit $m_{\nu\mu_1}\neq m_{\nu\mu_2}$ $\forall$ $\mu_1\neq\mu_2$), $\forall$ $\nu\in\mathbb{N}$. (jedes M_i, $i\in I$ lässt sich als M_{i_ν}, $\nu\in\mathbb{N}$ schreiben).Betrachte folgendes Schema:

oder



Durchlaufe obiges Schema in Pfeilrichtung und ordne den $m_{\nu\mu}$ fortlaufend die Nummer 1,2,3..zu, wobei man schon aufgetretene $m_{\nu\mu}$'s überspringt,

d.h. 1 m_{11}, 2 $\begin{cases} m_{21}, \text{falls } m_{21} \neq m_{11} \\ m_{12}, \text{falls } m_{21} = m_{11} \end{cases}$ (beachte: $m_{12}\neq m_{11}$, da $m_{11},m_{12}\in M_{i1}$) usw

Man beachte, dass dieses Verfahren nicht abbricht, da $M_{i_\nu}\subset \bigcup_{i\in I} M_i$ und M_{i_ν} eine unendliche Menge ist.

Dadurch erhält man eine bijektive Abb $\mathbb{N}\to \bigcup_{\nu\in N} M_{i_\nu} = \bigcup_{i\in I} M_i$, also ist $\bigcup_{i\in I} M_i$ abzählbar.

Bem:Ein exakter mathematischer Beweis obiger Aussage ist relativ aufwendig! Man benötigt z.B. folgende Aussagen:

(.) $f:X\to Y$ surjektiv, wobei X abzählbar $\Rightarrow$ Y höchstens abzählbar

(..) $\exists$ bijektive Abb $\mathbb{N}\to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (z.B. g^{-1}, wobei $g: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$g(n,m):=1/2((n+m)(n+m+1)+m)$
Es reicht eine surjektive Abb. $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times \mathbb{N}$ z.B. die linksinverse der injektiven Abb $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto 2^n 3^m$

A1.5.20 Geg sei die Menge aller schließlich konstanten Folgen mit rationalen Gliedern, d.h.

$M=\{f: \mathbb{N}\to \mathbb{Q}$: Es existiert ein n_0 mit $f(n)=f(n_0)\ \forall\ n\geq n_0\}$.

Zeige, dass M abzählbar ist.

Bew: Def $M_{q,n_0}=\{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Q}$ mit $f(n)=q\ \forall\ n\geq n_0\}$ $\Rightarrow$ $M=\cup_{k=1}^{\infty} M_{q,n_0}$

Wir zeigen: M_{q,n_0} ist abzählbar $\forall\ q\in\mathbb{Q}$, $n_0\in\mathbb{N}_0$, insbesondere

$M_{q,1}=\{f: \mathbb{N}\to \mathbb{Q}: f(n)=q\ \forall\ n\in \mathbb{N}\}$ $\Rightarrow$ $|M_{q,1}|=1$. Q^{n_0-1}

Wenn $n_0\geq 1$, dann ist $M_{q,n_0}=\{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Q}: f(n)=q\ \forall\ n\geq n_0\}=$

$\{(f(1),f(2),...f(n_{0-1}),q,q,q,...):f(1)....f(n_{0-1})\in\mathbb{Q}\}$,

Mit anderen Worten:

$T: M_{q,n_0}\to Q^{n_0-1}$, $T(f)=(f(1),....f(n_{0-1}))$ ist bijektiv und $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar $\forall\ n\in \mathbb{N}$ ($\mathbb{Q}^2=\mathbb{Q}x\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}^n=\mathbb{Q}^{n-1}x\mathbb{Q}$ ist abzählbar) $\Rightarrow$ $M=\cup_{n_0=1}^{\infty} M_{q,n_0}$ ist abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

A1.5.21 Es seien $\forall\ m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $f:\{1,...,m_1\}\to\{1,...,m_2\}$ bijektiv.
Zeige: $m_1=m_2$. (Zur Erinnerung: $\{1,...,m\}:=\{n\in\mathbb{N} \mid 1\le n\le m\}$)

*//**D0.2.5** (202)Bem 2.) $f:X\to Y$ & $g:Y\to Z$ bij $\Rightarrow g\circ f:X\to Z$ bij und//*
// $(g\circ f)^{-1}:Z\to X: (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ //
*//**S1.5.2** /702/703) Rechenregeln in N: $\forall m,n\in\mathbb{N}$ gilt//*
//6.) $m>n \Rightarrow m\ge n+1 \not\Rightarrow \exists$ natürliche Zahl zwischen n und n+1//
// $(n\ne m \Rightarrow |n-m|\ge 1)$/

Bew: Wird durch Induktion nach $m_1\in\mathbb{N}$ bewiesen.

$A(m_1)$: $m_2\in\mathbb{N}$ und $f:\{1,...,m_1\}\to\{1,...,m_2\}$ bijektiv $\Rightarrow m_1=m_2$)

$m_1=1$: Sei $m_2\in\mathbb{N}$ und $f: \{1\}\to\{1,...,m_2\}$ bijektiv
$\forall\ n\in\{1,...,m_2\}$ gilt $:f(1)=n$, da f surjektiv,
(für $n\in\{1,...,m_2\}\ \exists\ k\in\{1\}$ mit $f(k)=n$, d.h. $f(1)=n$)
insbesondere $1=f(1)=m_2$ (da 1 und $m_2\in\{1,...,m_2\}$), also
$m_1=1=m_2$ d.h. A(1) ist wahr

$\underbrace{m_1 \to}_{m_1\ge 1} m_1+1$: (Induktionsschluß: $A(m_1) \Rightarrow A(m_1+1)$)

Es sei $m_2\in\mathbb{N}$ und $f:\underbrace{\{1,...,m_1\}}_{=:M_1}\to\underbrace{\{1,...,m_2\}}_{=:M_2}$ bijektiv,

Z.z. $m_1+1=m_2$

$m_2\in M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{f\ surjektiv} \exists\ n_0\in M_1: f(n_0)=m_2 \Rightarrow$

$f|_{M_1\setminus\{n_0\}}: M_1\setminus\{n_0\}\to\underbrace{M_2\setminus\{m_2\}}_{=\{1,...,m_2-1\}}$ bijektiv (wie man leicht nachprüft)

(Bew: $M_2\setminus\{m_2\}=\{n\in\mathbb{N}: 1\le n\le m_2$ und $n\ne m_2\} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.2} \{n\in\mathbb{N}: 1\le n\le m_2-1\}=\{1,...,m_2-1\}$)

Definiere $g: M\setminus\{n_0\}\to\{1,..,m_1\}$ durch

$g(n)=\begin{cases} n, falls\ 1\le n\le n_0\text{-}1 \\ n-1, falls +1\le n\le m_1\end{cases}$ (beachte: g ist wohldefiniert, da $g(n)\in\{1,..,m_1\}\ \forall\ n\in M_1\setminus\{n_0\}$).

Dann ist g bijektiv, wie man leicht nachrechnet:

g surjektiv: Sei $m\in\{1,..,m_1\}$ bel..

Def $n:=\begin{cases} m, falls\ 1\le m\le n_0\text{-}1 \\ m+1, falls\ n_0\le m\le m_1\end{cases}$ $\Rightarrow g(n)=m$ und $n\in M\setminus\{n_0\}$

g injektiv: Seien $g(n_1)=g(n_2) \Rightarrow n_1=n_2$ oder $n_1-1=n_2-1 \Rightarrow n_1=n_2$

$\Rightarrow g^{-1}:\{1,..,m_1\}\to M_1\setminus\{n_0\}$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{D0.2.5\,Bem2}$

$f|_{M_1/\{n_0\}}\ g^{-1}=\{1,..,m_1\}\to\{1,..,m_2-1\}$ bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\underbrace{\Rightarrow}_{IndHyp} m_1=m_2-1$

$\Rightarrow m_1+1=m_2$

1 2 . . . n_0-1 n_0 n_0+1 . . . m_1 $\underbrace{\rightarrow}_{f}$ 1 2 . . m_2-1 m_2

g g^{-1} 1 2 n_0-1 n_0 m_1 $\underbrace{|_{M_1/\{n_0\}\circ g^{-1}}}_{\rightarrow}$ 1,2 . . m_2-1

*Einige eigene Ergänzungen und Änderungen. Fehlerfrei?

$m_1 \overset{m_1\geq 1}{\rightarrow} m_1+1 = m_1'$:(Induktionsschluß:A(m_1) ⇒ A(m_1+1))

Es sei $m_2 \in \mathbb{N}$ und f: $M_1' := \underbrace{1,\ldots m_1+1}_{=:M_1'} \rightarrow \underbrace{\{1,\ldots m_2\}}_{=:M_2}$ bijektiv

Z.z. $m_1+1=m_2$

$m_2 \in M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{f\ surjektiv} \exists\ n_0 \in M_1' : f(n_0)=m_2 \Rightarrow$

$f|_{M_1'/\{n_0\}}: M_1' \setminus \{n_0\} \rightarrow \underbrace{M_2 \setminus \{m_2\}}_{=\{1,\ldots,m_2-1\}}$ bijektiv (wie man leicht

nachprüft) (Bew: $M_2\setminus\{m_2\}=\{n\in\mathbb{N}: 1\leq n\leq m_2$ und

$n\neq m_2\} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.2\ 6.)} \{n\in\mathbb{N}: 1\leq n\leq m_2-1\}=\{1,\ldots,m_2-1\}$)

Definiere g: $M_1' \setminus\{n_0\}\rightarrow\{1,\ldots,m_1\}$ durch

$$g(n)=\begin{cases} n, falls\ 1\leq n\leq n_0-1 \\ n-1, falls\ n_0+1\leq n\leq m_1 \end{cases}$$ (beachte: g ist

wohldefiniert, da $g(n)\in\{1,\ldots,m_1\}\ \forall\ n\in M_1'\setminus\{n_0\}$).

Dann ist g bijektiv, wie man leicht nachrechnet

g surjektiv:Sei $m\in\{1,\ldots,m_1\}$ bel..

Def $n := \begin{cases} m, falls\ 1\leq m\leq n_0-1 \\ m+1, falls\ n_0\leq m\leq m_1 \end{cases}$ ⇒g(n)=m und

$n\in M_1' \setminus\{n_0\}$

g injektiv:Seien $g(n_1)=g(n_2) \Rightarrow n_1=n_2$ oder $n_1-1=n_2-1 \Rightarrow$

$n_1=n_2$

$\Rightarrow g^{-1}:\{1,\ldots,m_1\}\rightarrow M_1\setminus\{n_0\}$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{D0.2.5\ Bem\ 2}$

$f|_{M/\{n_0\}} \circ g^{-1} = \{1,\ldots,m_1\}\rightarrow\{1,\ldots,m_1'\}\setminus n_0 \rightarrow \{1,\ldots,m_2-1\}$ bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\underbrace{\Rightarrow}_{IndHyp}$ $m_1=m_2-1$

1 2 . . . n_0-1 n_0 n_0+1 . . . $m_1'=m_1+1$ $\underbrace{\rightarrow}_{f}$ 1 2 . . m_2-1 m_2

g g^{-1} 1 2 n_0-1 n_0 m_1 $\underbrace{|_{M_1/\{n_0\}\circ g^{-1}}}_{\rightarrow}$ 1 2 . . m_2-1

A1.5.22 Zeige, daß folgende zusätzliche Rechenregeln gelten

a) $\forall\ x\in\mathbb{R}: -\infty+x=-\infty$

b) $\forall\ x\in\mathbb{R}_+: x(-\infty)=-\infty, (-x)\infty=-\infty, (-x)(-\infty)=\infty$

c) $-\infty+(-\infty)=-\infty, (-\infty)\infty=-\infty, (-\infty)(-\infty)=\infty$

A1.5.23 Zeige, dass es nicht möglich ist, die Ausdrücke $\infty+(-\infty)$ und $0*\infty$ so zu definieren, daß $\overline{R}$ zu einem Körper wird.

A1.5.24 Bestimme,falls existent, sup M, max M, inf M, und min M für folgende Mengen:

a) $M=\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}: n,m\in\mathbb{N}\}$ b) $M=\{x^2-10x-24: x\in(1,3]\}$ c) $M=[1,\sqrt{2}]$ $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

A1.5.25 Zeige: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0: 1/n<\varepsilon$

A1.5.26 Zeige: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0: (n^2-5)^{-1}<\varepsilon$

A1.5.27 Zeige: Ist $z\in\mathbb{C}$ und $|z|\leq 1/n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, so folgt $z=0$

A1.5.28 Zeige: $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper.

A1.5.29 Zeige: Die Menge der rationalen Zahlen r mit $0<r^2\leq 2$ ist nicht leer, nach oben beschränkt und besitzt (in $\mathbb{Q}$) kein Supremum.
Schließe hieraus:

a) Der Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

b) Es gibt mindestens eine positive irrationale Zahl.

A1.5.30 Zeige: Jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ enthält unendlich viele rationale, aber auch irrationale Zahlen.

A1.5.31 Finde die Dual- und die Hexadezimaldarstellunge(d.h. die g-adischen Darstellungen mit g=2 und g=16) der Zahlen n=24, n=123, n=315 . Benutze dabei für g=16 die Bezeichnungen A,B,C,D,E,F für die Ziffern 10,11,12,13,14,15.

Lös: g=2,

$g^0=1, g^1=2, g^2=4, g^3=8, g^4=16, g^5=32, g^6=64, g^7=128, g^8=256$

n=24: 24:16=1R8, 8:8=1R0

$=1*16+1*8+0*4+0*2+0*1 \Rightarrow 11000_2$.

n=123: 123:64=$\underline{1}$R59:32=$\underline{1}$R27:16=$\underline{1}$R11:8=$\underline{1}$R3:2=$\underline{1}$R$\underline{1}$

$=1*64+1*32+1*16+1*8+0*4+1*2+1*2^0 \Rightarrow 1111011_2$.

n=315: 315:2=157R1 $\Rightarrow z_0=1$ 9:2=4R1 $\Rightarrow z_5=1$

157:2=78R1 $\Rightarrow z_1=1$ 4:2=2R0 $\Rightarrow z_6=0$

78=2=39R0 $\Rightarrow z_2=0$ 2:2=1R0 $\Rightarrow z_7=0$

39:2=19R1 $\Rightarrow z_3=1$ 1<2 $\Rightarrow z_8=1$

19:2=9R1 $\Rightarrow z_4=1$

$=100111011_2$.

g=16,

n=24: 24:16=1R8 $\Rightarrow 18_{16}$.

n=315: 315:16=19R$\underline{11}$ $\Rightarrow z_0=B$

19:16= $\underline{1}$R$\underline{3}$ $\Rightarrow$ $z_1=3$

$=13B_{16}$.

*Andere Formulierung:

g=2 z $z_{k_2}\in\{0,1\}$, $p\in\mathbb{N}_0$, z $z_{k_{16}}\in\{0,1,...9A,B,...,E,F\}$,

$n=z_0+z_1g+...z_pg^p$

$24=2^{?} \Rightarrow 2^4+\underbrace{\Delta}_{8=2^3} =0+0*2^1+0*2^2+1*2^3+1*2^4=11000$ (binär)

$=16^{?} \Rightarrow 16^1+8=8+1*16=18$ (hex)

$123=2^{?} \Rightarrow \underbrace{64}_{2^6} + \underbrace{59} =1+1*2^1+1*2^3+1*2^4+1*2^5+1*2^6=111111$ (bin)

$\underbrace{32}_{2^5}+\underbrace{27}$

$\underbrace{16}_{2^4}+\underbrace{11}$

$\underbrace{\underbrace{8}_{2^3}+3}$

$\underbrace{2}_{2^1}+\underbrace{1}_{2^0}$

$123=16^{?} \Rightarrow \frac{7*16}{112+11} =B+7*16=1B$ (hex)

A1.5.32 Es seien $a,b\in R$ mit $a<b$ und $f:(a,b]\to R$ injektiv. Zeige, daß $f((a,b])$ überabzählbar ist.

A1.5.33 Untersuche, welche der oben eingeführten Intervalle nach oben (unten) beschränkt sind

A1.5.34 Bestimme,falls existent, sup(inf), max(min) der oben eingeführten Intervalle.

A1.5.35

a) $A\subset B$, $\exists$ min A und min B $\Rightarrow$ min A$\geq$min B

Bew: Bspskizze: [[ )] a=min A: $a\in A$ & $A\subset B \Rightarrow a\in B \Rightarrow a\geq \min B$

b) $A\subset B$, $\exists$ inf A & inf B $\Rightarrow$ inf A$\geq$inf B

Bew: a:=inf A, B:=inf B $\Rightarrow b\leq x \;\forall\; x\in B$ $\quad b\leqslant x\,\forall x\in B \underset{A\subset B}{\Rightarrow} b\leqslant x\,\forall x\in A \Rightarrow$

b untere Schranke von A $\Rightarrow$ $b\leq a$

c) $\exists$ max A und max B $\Rightarrow$ $\exists$ max $(A\cup B)$ & max $\Rightarrow$ $\max(A\cup B)=\max\{\max A, \max B\}$

Bew: Sei $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\leq \max A \wedge x\leq \max B \Rightarrow$

$x\leq\max\{\max A,\max B\}\;\forall\; x\in A\cup B$, da $\max\{\max A, \max B\}\in A\cup B$

ist $\max\{\max A, \max B\}=\max(A\cup B)$

A1.5.36 Max, Min, Sup, Inf?

a) $A=\bigcup_{n\in N}[0,\frac{1}{n}]$

Lös: $\frac{1}{m} \underset{m>n}{\underbrace{<}} \frac{1}{n} \Rightarrow [0,\frac{1}{m}]\subset[0,\frac{1}{n}] \Rightarrow [0,\frac{1}{n}]\subset[0,\frac{1}{1}]=[0,1] \;\forall\; n \Rightarrow A=[0,1]$

0$\in A$ & $\forall\; x\in A$: $x\in[0,1] \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow \min A=0$

$0\leq x \;\forall\; x\in A \Rightarrow \inf A=0$

$1 \in A$ & $\forall x \in A: x \in [0,1] \Rightarrow 0 \; x \leq 1 \Rightarrow \max A = 1$

$x \leq 1 \; \forall x \in A \Rightarrow \sup A = 1$

b) $B = \bigcap_{n \in N} [0, \frac{1}{n}]$

Lös: $0 \in [0, \bigcap_{n \in N}] \Rightarrow 0 \in B \; \forall n$

- $x<0$: $x \notin [0, \frac{1}{1}] \Rightarrow x \notin B$

•• $x>0$: $\underset{\text{N unbeschränkt}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbf{N}: n > x^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{n} \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}: x \notin [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow x \notin B$

• & •• $\Rightarrow B=\{0\}$, da $x>0$ oder $x<0$ oder $x=0$ in $\mathbf{R} \Rightarrow$
min B=inf B=max b=sup B

c) $C = \bigcap_{n \in N} (0, \frac{1}{n})$

Lös: $(0, \frac{1}{n}) \subseteq [0, \frac{1}{n}] \; \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow C \subset B = \{0\}$

$0 \notin (0, \frac{1}{n}) \Rightarrow 0 \notin C \Rightarrow C = \emptyset \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbf{R}$: x ist obere Schranke von C, x-1 ist ebenfalls obere Schranke von C
$\Rightarrow \cancel{\exists} \; \bar{S}: \bar{S}$ kleinste obere Schranke von C $\Rightarrow$
kein sup, analog kein inf $\Rightarrow$ kein max, kein min

d) $D = \bigcap_{n \in N} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

//**S1.5.18**(763) Intervallschachtelungsprozess
// Vor:Seien $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$ mit $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$
// Beh:$\exists$ mindestens ein $x \in \mathbf{R}$: $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, d.h. $a_n \leq x \leq b_n \; \forall n \in \mathbf{N}$

Lös: D ist Intervallschachtelung $\underset{S1.5.18}{\Rightarrow} |D|=1 \underset{B}{\Rightarrow} D=\{0\} \Rightarrow$
supD=inf D=max D=min D=0