1(300) Axiomatische Einführung der reellen und komplexen Zahlen

1.1(300) Gruppen und Körper

Zahlen	Einführungsgrund
1.) natürliche Zahlen $\mathbb{N}:=\{1,2,3,...\}$ $\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,3,...\}$	Abzählung
2.) ganze Zahlen $\mathbb{Z}:=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-1.-2.-3...\}$ $=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}$	Lösen von Gleichungen der Form $x+n=m$ mit $n,m\in\mathbb{N}$. Menge der ganzen Zahlen
3.) rationale Zahlen $\mathbb{Q}:=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}\right\}$	Lösen von Gleichungen der Form $x\cdot n=m$ mit $n,m\in\mathbb{Z}x$. Menge der rationalen Zahlen
4.) reelle Zahlen $\mathbb{R}$	Lösen geometr. Aufg. 2π Einheitskreisumf Grenzwerte von Zahlenfolgen aus $\mathbb{Q}$. $x^2=2$
5.) komplexe Zahlen	Lösen quadrat.Gleichungen $x^2+1=0$

Im Folgenden werden 2 unterschiedliche Verknüpfungen $\oplus,\otimes$ definiert die nicht mit den aus dem bürgerlichen Rechnen bekannten Plus + und Mal * identisch sein müssen, aber wie aus den Rechenregeln dann ersichtlich sein wird, identisch sein können. Da es sich jedoch meist um die Verknüpfungen +,* handelt, erscheinen in der Regel später nur diese im weiteren Text. Sollten andere Verknüpfungen gemeint sein, werden wieder $\oplus,\otimes$ verwendet. 0 und 1 sind zunächst auch nicht bekannt, deshalb erscheinen, um auch Verwechslungen aus alter Gewohnheit zu vermeiden, die Zeichen **0** und **1** mit evt anderer Bedeutung. In Formeln ist mir nicht bekannt, wie in meinem Textbearbeitungsprogramm die Symbole gestaltet werden können. Aus dem Zusammenhang sollte jedoch ersichtlich sein, was gemeint ist. Änderungen erfolgen später.

Mengen und Verknüpfungen

D1.1.1(301) Eine Verknüpfung ordnet durch eine Vorschrift Elementen einer
Menge Element(e) einer Menge zu. Dadurch entsteht ein Verknüpfungsgebilde.

Verknüpfungsgebilde auf einer Menge:
- Menge M, mit einer auf ihr definierten Verknüpfung. Symbol: $\circ$
- $M \neq \emptyset$
- $a,b \in M$ wird $a \circ b$ $\in M$ zugeordnet.
  Abbildung w, die 2 Elementen aus M ein Element von M zuordnet, Schreibweise (M,w)
  Bsp: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\dots\}$, Verknüpfung
  $\circ$: + (Addition)
  $1+2=3 \in N$, $2+4=6 \in N, \dots \Rightarrow$ Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{N}, \circ)=(\mathbb{N},+)$
  $\circ$: : Division...a:b
  $2:5 \neq \mathbb{N} \Rightarrow (N, \circ)=(N,:)$ kein Verknüpfungsgebilde

D1.1.2 (301)
a) Kommutatives Verknüpfungsgebilde
$\forall$ $a,b \in M$ gilt $a \circ b = b \circ a \Leftrightarrow$
$(M, \circ)$ heißt kommutatives Verknüpfungsgebilde
Bsp: - $\circ$: + (Addition), $(\mathbb{N}, \circ)=(\mathbb{N},+)$
$\mathbb{N}=\{ \underset{a}{1}\ 1,2, \underset{b}{3}\ ,4\dots\}\dots$ $1+3=3+1 \Rightarrow$ kommutatives Verknüpfungsgebilde
- $(\mathbb{Q}, \circ)=(\mathbb{Q},:)$, $\frac{3}{4}:\frac{7}{5} \neq \frac{7}{5}:\frac{3}{4} \Rightarrow$
$(\mathbb{Q},:)$ kein kommutatives Verknüpfungsgebilde

b) Assoziatives Verknüpfungsgebilde
$\forall$ $a,b \in M$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \Leftrightarrow$
$(M, \circ)$ heißt assoziatives Verknüpfungsgebilde
Bsp: - $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\dots\}$, $(\mathbb{N}, \circ)=(\mathbb{N},+)$
$(1+2)+3=6=1+(2+3) \Rightarrow (\mathbb{N},+)$ assoziatives Verknüpfungsgebilde
- $(\mathbb{Q}, \circ)$, $\circ = \frac{a+b}{2}$, gewählt $2,4,6 \in \mathbb{Q}$,
$(2 \circ 4) \circ 6=(\frac{2+4}{2}) \circ 6=3 \circ 6=\frac{3+6}{2}=4,5 \in \mathbb{Q}$
$2 \circ (4 \circ 6)=2 \circ \frac{4+6}{2}=2 \circ 5=\frac{2+5}{2}=3,5 \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow (\mathbb{Q}, \circ)$, Verknüpfungsgebilde
$\Rightarrow$ $2 \circ 4) \circ 6 \neq 2 \circ (4 \circ 6)$,
$(\mathbb{Q}, \circ)$ kein assoziatives Verknüpfungsgebilde

c) Verknüpfungsgebildemit Existenz von neutralen Elementen
Vor: $n \in M$, $(M, \circ)$
Aussage: n heißt neutrales Element in $(M, \circ) \Leftrightarrow$
$\forall$ $a \in M$ gilt $a \circ n=n \circ a=a$

Bsp: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4\dots\}$,	$(\mathbb{N},*)$		$(\mathbb{N},+)$	$(\mathbb{N}_0,+)$
	$1*?=1$	$1*1=1$	$1+?=1$	$1+0=1$
	$2*?=2$	$2*1=2$	$2+?=2$	$2+0=2$
	$3*?=3$	$3*1=3$	$3+?=3$	$3+0=3$

…… …. … ...
n=1 $0\notin \mathbb{N}$, kein n $n=0\in \mathbb{N}_0$

d) Verknüpfungsgebilde mit Existenz von inversen Elementen
Vor: $a,n\in M$, $(M, \circ)$, (n neutrales Element)
Aussage: In $(M, \circ)$ heißt $a'\in M$ inverses Element von a $\Leftrightarrow$
$a \circ a'=a' \circ a=n$
Bsp: $(\mathbb{Z},+)\Leftrightarrow n=0$ $(\mathbb{Q},*)$ $(\mathbb{N},*)$
$7+(-7)=0$ $4*\frac{1}{4}=1$ $7*?=1$
$-5+(+5)=0$ $\frac{7}{8}*\frac{8}{7}=1$ $?\notin \mathbb{N} \Rightarrow \nexists\, a'\in M \Rightarrow$
kein Verknüpfungsgebilde mit Existenz von inversen Elementen

D1.1.3 (302) Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung $\circ$
z.B +, * usw $G \circ G\to G$, $(a,b)\to a \circ b$, sodass folgende Axiome $\forall a,b,c\in G$ erfüllt sind
a) Assoziativgesetz $(a \circ b) \circ c=a \circ (b \circ c)$
b) $\exists$ neutrales Element $e\in G$, $a \circ e=a$
c) $\forall a\in G$ $\exists$ Inverses Element $a'\in G$: $a \circ a'=e$
Bem: Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G
Bsp:● Ist $(\mathbb{N},+)$ Gruppe? Nein, denn $\underbrace{a}_{\in N} + \underbrace{e}_{\in N} \neq \underbrace{a}_{\in N}$

●● $(\mathbb{Z},+)$ Gruppe? Ja, 0 neutrales Element,
-a Inverses... $(a+(-a))=e=0$

●●● Permutationen $P(M, \circ)$, $P(M)xP(M)\to P(M)$

//# **DK3.1,1'** Permutationen ohne Wiederholungen (eigener Versuch)
// #Sei $X=\{1,2,\dots,n\}$,
// #Abbildung $\underbrace{\pi_i}_{bijektiv}$: $X\to X$ ist eine Permutation von X

//# **DK3.1.1''** Jede Belegung einer geordneten Menge
//# $<\pi(a_1),\pi(a_2),\dots,\pi(a_k)>$, π bijektiv,
// $\pi(a_1),\pi(a_2),\dots,\pi(a_k)\in\{a_1,a_2,\dots,a_k\}=X$,
//# heist Permutation von X.
//Analysis 1
//**D0.2.5**(202) Seien f: $X\to Y$ und $g:Y\to Z$ vorgegeben, dann heißt die
//Abb.$g \circ f$: $X\to Z$ definiert durch x $g(f(x))$ $\forall x\in X$ die
//zusammengesetzte oder verkettete Funktion aus f und g //(Komposition von f mit g)
//Bem:1.)Die Komposition ist assoziativ, aber nicht kommutativ:
// $(h \circ g) \circ f= h \circ (g \circ f)$ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
// $g \circ f\neq f \circ g$
Bew: Bedingung a) erfüllt...
DK3.1.1 Permutationen sind Abb $\underbrace{\Rightarrow}_{D0.2.5}$
$(P_a \circ P_b) \circ P_c=(P_a(P_b))P_c(M)=P_a(P_b(P_c(M)))=P_a \circ (P_b \circ P_c)$

Bedingung b) erfüllt…
$PoI_{dM}=P(I_{dM}(M))=P(M) \Rightarrow e=I_{dM}(M)$

Bedingung c) erfüllt…

$\forall \underbrace{P}_{bijektiv} (M) \in G \; \exists$ Inverses Element $P^{-1}(M) \in G$:

$P(M) \circ P^{-1}(M) = P(P^{-1}(M)) = I_{dM}(M)$

●●●● $(\mathbb{Q}, a \, o \, b)$ Arithmetische Mittel ($\mathbb{Q}$...rationale Zahlen)

$$(a\,o\,b)\,x\,o\,c = \frac{(aob)+c}{2} = \frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c}{2} = \frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2} \qquad \neq$$

$$(a\,o\,(b\,o\,c) = \frac{ao(\frac{b}{2}+\frac{c}{2})}{2} = \frac{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}{2} = \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{4} \qquad \text{keine Gruppe!!}$$

L1.1.1 (303)Sei G Gruppe

a) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt

b) Es gilt $e \circ a = a \circ e = a \;\forall\; a \in G$

c) Zu gegebenem $a \in G$ ist das Inverse eindeutig bestimmt

d) Es gilt $a' \circ a = e$ (nicht nur $a \circ a' = e$)

Bew: d) Sei $a \in G$, a' Inverses zu a, a'' Inverses zu a' $\Rightarrow$

$a' \circ a = (a' \circ a)e = (a'a)(a'a'') = (a'(aa'))a'' = (a'e)a'' = a''a'' = e$

b) $ea = (aa')a = a(a'a) = ae = a$

a) Sei $\bar{e}$ ein weiteres neutrales Element zu e $\Rightarrow e\bar{e} = e$

c) Sei $\bar{a}$ eine weiter Inverse zu a $\Rightarrow$

$\bar{a} = e\bar{a} = (a'a)\bar{a} = a'(a\bar{a}) = a'e = a'$

Schreibweise: a^{-1}= Inverse zu a

L1.1.2 (303) $(a^{-1})^{-1} = a$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $ax = ay \Rightarrow x = y$, da $\underbrace{a^{-1}a}_{e}x = \underbrace{a^{-1}a}_{e}y$

D1.1.4 (303) $H \in G$ heißt Untergruppe, falls H mit der Verknüpfung von G selbst eine Gruppe ist.

Bsp: $Z \subset (\mathbb{Q}, +)$

L1.1.3 (303) H Untergruppe von G

a) Das neutrale Element von H ist das von G

Bew: Sei e_H das neutrale Element von H und e_H^{-1} das Inverse in G $\Rightarrow$

$e = e_H e_H^{-1} = (e_H e_H) e_H^{-1} = e_H e = e_H$

b) Ist $h \in H$, so ist $h^{-1} \in H$ und ist das Inverse bzgl H

Bew: $h \in H$, h' das Inverse bzgl H $\Rightarrow hh' = e \Rightarrow h' = h^{-1}$

D1.1.5 (304) Gruppe G heißt abelsch,
falls G Gruppe und ab=ba $\forall$ a,b$\in$G

Bsp ● (Z,+) abelsch...3+4=4+3
●● (Q*=Q(\{0},*) abelsch
●●● Permutationen P(M) ist nicht abelsch,
falls M mehr als 2 Elemente hat

DK3.1.1‵ Permutationen ohne Wiederholungen (eigener Versuch)

Bez: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2) \ldots \pi(a_n) \end{pmatrix}$

Bew: Exemplarisch für P($\underbrace{3}_{3\,Elemente}$)

$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$\alpha \circ \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Nebenrechnung $1 \underbrace{\rightarrow}_{\beta} 2 \underbrace{\rightarrow}_{\alpha} 3$, $\beta \circ \alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

●●●● //**S1.5.16**(764) (Division mit Rest)

//∀ $p \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ ∃ eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$ und

//$r \in \{0,...,m-1\}$ mit $p=mq+r$ (Beweis siehe P15f Seite 764

Bem: p/m=q+r/m

Sei $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ modulo m: $\mathbb{Z}_{/m}=\{0,1,2..,m-1\}$

Definiere a⊕b = Rest von a+b nach Division durch m

m=2, a⊕b

a=	b= 0	1
0	0	1
1	1	0

NR: (0+0):2=0 Rest 0, (0+1):2=0 Rest 1
(1+0):2=0 Rest 1, (1+1):2=1 Rest 0

m=3, a⊕b

a=	b= 0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

m=5, a⊕b

a=	b= 0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Feststellung ($\mathbb{Z}_{/m}$,⊕) ist eine abelsche Gruppe

Bew: (a⊕b)⊕c=a⊕(b⊕c) ?

- Es gilt (a+b)+c=a+(b+c) ⇒ Reste modulo m sind gleich.
- Neutrales Element ist 0: a+0=0
- Inverses Element, sei $a \in \mathbb{Z}_{/m}$, setze $\underbrace{a'}_{0\le a'\le m-1} = \begin{cases} m-a & falls\ \ a\neq 0 \\ 0 & falls\ \ a=0 \end{cases}$

  Behauptung a' ist Inverses zu a

  1. Fall a≠0: a⊕a'= Rest von a+a'=Rest von a+m-a=
     Rest von m=0
  2. Fall a=0: a⊕a'=0⊕**0**=0
- a⊕b= Rest von a+b=b+a ⇒ Rest von a+b=Rest von a+b= b⊕a.

D1.1.6(306)Menge $M_H \neq \emptyset$ ist Halbgruppe $\Leftrightarrow$

● $(M_H, \circ)$ abgeschlossen

●● Es gilt das Assoziativgesetz $(a \circ b)o \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\forall$ $a,b,c \in M_H$

Bem: Jede Gruppe ist eine Halbgruppe

Bsp: $(\mathbb{N},+)$, $a \circ b$... $2 \circ 4 = 2+4 = 6 \in M_H$ abgeschlossen,

$(2 \circ 4) \circ 7 = 2 \circ (4 \circ 7)$

$(2+4)+7 = 2+(4+7) = 13$

D1.1.7(306) Menge $M_R \neq \emptyset$ mit 2 Verknüpfungen $\oplus, \otimes$ ist ein Ring $(M_R, \oplus, \otimes)$ $\Leftrightarrow$

Es gilt ● $(M_R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe

●● $(M_R, \otimes)$ ist Halbgruppe

●●● Es gelten die Distributivgesetze

$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b + a \otimes c$

$(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c + b \otimes c$ $\forall$ $a,b,c \in M_R$.

Bsp: $\mathbb{Z} = \{...-2,-1,0,1,2,…\}$, $(\mathbb{Z},+,*)$

D1.1.5 Bsp: $(\mathbb{Z},+)$ ist abelsche Gruppe

In $(\mathbb{Z},*)$ gilt D1.1.6 ● und ●● $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z},*)$ ist Halbgruppe

In $(\mathbb{Z},+,*)$ gilt das Distributivgesetz $a*(b+c)=$…..

$(\mathbb{Z},+,*)$ ist ein Ring

D1.1.8(306) Eine Menge mit mindestens 2 Elementen heißt Körper K

$(K, \oplus, \otimes)$: $\Leftrightarrow$ $\exists$ 2 Abbildungen(2stellige Verknüpfungen)

$\oplus$: $K \times K \to K$ und $\otimes$: $K \times K \to K$ welche folgenden Axiomen genügen:

(A1) Assoziativgesetz für Assoziativgesetz für $\oplus$:

$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ $\forall$ $a,b,c \in K$,

(A2) Existenz des $\oplus$ neutralen Elements bzgl $\oplus$:

$\exists$ genau ein Element $0 \in K$ mit $a \oplus 0 = a$ $\forall$ $a \in K$

(A3) Existenz eines Inverselements bzgl $\oplus$:

$\forall$ $a \in K$ $\exists$ genau ein $-a \in K$ mt $a \oplus (-a) = 0$

(A4) Kommutativgesetz bzgl $\oplus$: $a \oplus b = b \oplus a$ $\forall$ $a,b \in K$

(M1) Assoziativgesetz für $\otimes$: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ $\forall$ $a,b,c \in K$

(M2) Existenz des bzgl $\otimes$ neutralen Elements Eins:

$\exists$ genau ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a$ $\forall$ $a \in K$

(M3) Existenz des bzgl $\otimes$ inversen Elements

$\forall$ $a \in K \setminus \{0\}$, $\exists$ genau ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a \otimes a^{-1} = 1$

(M4) Kommutativgesetz bzgl $\otimes$: $a \otimes b = b \otimes a$ $\forall$ $a,b \in K$

(D) Distributivgesetz für $\oplus$ und $\otimes$: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Andere Formulierung:

Ein Körper ist: Eine Menge K mit 2 Verknüpfungen $\oplus, \otimes$: $K \times K \to K$,

so dass: 1. $(K, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe

das neutrale Element heißt $0 = 0_K$

2. $(K^{\otimes} = K \setminus \{0\}, \otimes)$ ist eine abelsche Gruppe

3. Es gilt das Distributivgesetz

$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$

Das neutrale Element von $(K^{\otimes}, \otimes)$ wird $1 = 1_K$ genannt.

Beachte, dass das Ergebnis von $\oplus$ oder $\otimes$ per Definition wieder zu K gehören muss. Wir sagen auch: ein Körper ist immer abgeschlossen bezgl $\oplus$ und $\otimes$.

Sind die beiden Abbildungen Addition bzw Multiplikation, dann sind die Elemente des Körpers Zahlen. Jeder derartige Körper K enthält mindestens

2 Zahlen, nämlich 0 und 1 und es gibt einen Körper, der genau aus diesen Zahlen besteht:

Bem: 1.) (A1),(A2),(A3) bedeutet bzgl $\oplus$: $(K,\oplus)$ ist Gruppe, die wegen (A4) Abel'sch ist.
(M1),(M2),M3) bedeuten, $(K\setminus\{0\},\otimes)$ ist Gruppe, die wegen (M4) Abel'sch ist

2.) Läßt man in (A2) die Eindeutigkeit von 0 weg, so folgt diese aus (A4):

Bew: Sei $a\oplus 0=a$ und $a\oplus \overline{0}=a \ \forall\ a\in K \Rightarrow \ \overline{0}\oplus 0=\overline{0}$ und $0\oplus\overline{0}=0 \underset{A4}{\Longrightarrow}$

$\overline{0}=\overline{0}\oplus 0=0\oplus\overline{0}=0$

3.) Läßt man in (A3) die Eindeutigkeit von -a weg, so folgt diese aus (A1),(A2),(A4):

Bew: $a\oplus(-a)=0,\ a\oplus\overline{a}=0$ für $a\in K$

$$\overline{a} \underset{A2}{=} \overline{a}\oplus 0 = \overline{a}\oplus(a\oplus(-a)) \underset{A1}{=} (\overline{a}\oplus a)\oplus(-a) \underset{A4}{=} (a\oplus\overline{a})\oplus(-a)=$$
$$0\oplus(-a) \underset{A4}{=} (-a)\oplus 0 \underset{A2}{=} -a$$

4.) Analog folgt in (M2) die Eindeutigkeit der 0 mit (M4) und in (M3) folgt die Eindeutigkeit von a^{-1} für $a\neq 0$ auch aus den anderen Axiomen (M1),(M2),(M4) statt $\oplus\to\otimes$

Konventionen: $a\otimes b\oplus c\otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $\quad a-b:=a\oplus(-b)$

$-a-b:=(-a)\oplus(-b)$ $\quad \dfrac{a}{b}:={}^{a}\!/_{b}: =a:b :=a\otimes b^{-1},\ b\neq 0$

b^{-1}:= inverses Element von b

Zu (M3): Sei $(a,a)\in K\times K\setminus\{(0,0)\}$

Ansatz: $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)=(a_1\otimes b_1-a_2\otimes b_2,\ a_1\otimes b_2\oplus a_2\otimes b_1)=(1,0)\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a_1b_1 - a_2b_2 &= 1\\ a_1b_2 + a_2b_1 &= 0\end{aligned}\right\}\text{unbekannt } b_1, b_2 \ \Leftrightarrow\ b_1=\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\quad b_2=\frac{-a_2}{(a_1^2+a_2^2)\neq 0}$$

5.) Ein Körper hat mindestens die Elemente 0 und 1

Bsp: • Sei $K=\{0,1\}$ mit $0\oplus 0=0,\ 0\oplus 1=1\oplus 0=1,\ 1\oplus 1=0,$
$0\otimes 0=0,\ 0\otimes 1=1\otimes 0=0,\ 1\otimes 1=1$

Verknüpfungen als Tabelle:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

alle der oben stehenden Axiome gelten, dass also K mit dieser Definition ein Körper ist.

(A1) $(1\oplus 0)\oplus 1=1\oplus(0\oplus 1)=0,\ (1\oplus 1)\oplus 1=1\oplus(1\oplus 1)=1$ …usw

(A2) neutrales Element 0: $1\oplus 0=1,\ 0\oplus 0=0$

(A3) Inverselemente $0=-0,\ 1=-1$: $1\oplus(-1)=0,\ 0\oplus(-0)=0$

(A4) $1\oplus 0=0\oplus 1=1$ …usw

(M1) $1\otimes(0\otimes 1)=(1\otimes 0)\otimes 1=0$ …usw

(M2) neutrales Element $1\neq 0$: $0\otimes 1=0,\ 1\otimes 1=1$

(M3) 1 inverses Element $a^{-1}=1\ \forall\ a\in K\setminus\{0\}$, d.h für 1, $1\otimes 1=1$

(M4) $1\otimes 0=0\otimes 1=0$ usw

(D) $1 \otimes (0 \oplus 1) = (1 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 1) = 1$ usw

●● Geg $(K, \oplus, \otimes)$ $a \oplus b = a+b+1$, $a \otimes b = a+b+a*b$, $(K, \oplus, \otimes)$ Körper?
Bez: $\mathbf{0}$ ist das neutrale Element, $(-a)$ das inverse Element in K.

(A1) $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b+c+1) = a+b+c+1+1 = a+b+1+c+1 = (a \oplus b)+c+1 = (a \oplus b) \oplus c$

(A2) $a \oplus \mathbf{0} = a$, $a \oplus \mathbf{0} = a+\mathbf{0}+1 \Rightarrow a = a+\mathbf{0}+1 \Rightarrow \mathbf{0} = -1$

(A3) $a \oplus (-a) = \mathbf{0} = -1$, $a \oplus (-a) = a+(-a)+1 \Rightarrow -1 = a+(-a)+1 \Rightarrow (-a) = -2-a$

usw

●●● Es gibt einen Körper mit 2 Elementen, nämlich $F_2=\mathbb{Z}_{/2}=\{0,1\}$
Definiere Addition + wie gehabt ⊕
Multiplikation ⊗ durch a⊗b= Rest von a*b nach Division durch m=2

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

⊗	0	1
0	0	0
1	0	1

Axiome nachrechnen…siehe auch Analysis P11 Seite 301
1.) siehe LD3 Bsp ●●●●
2.) $F_2^{\otimes}=\{0,1\}\backslash\{0\}=\{1\}$, 1*1=1 abelsche Gruppe
3.) Distributivgesetz mit Tabelle nachrechnen oder $m\in\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_{/m}$
⊕ erledigt
⊗ Distributivgesetz a⊗b=Rest von a*b nach Division durch m
Distributivgesetz das in $\mathbb{Z}$ gilt vererbt sich auf $\mathbb{Z}_{/m}$
Es gilt a(b+c)=ab+ac in $\mathbb{Z}$
$a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

ohne Bew: $\mathbb{Z}_{/m}$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist
●●●● $\mathbb{Z}_{/4}=\{0,1,2,3\}$, 2=1⊕1, 3=1⊕1⊕1, (Verknüpfungen wie bei ●●●) Körper?

⊕	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

⊗	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

2 hat kein Inverses 2⊗?=1
$\Rightarrow \mathbb{Z}_{/4}=\{0,1,2,3\}$ kein Körper

Konstruktion eines Körpers K_4 mit 4 Elementen
$\mathbb{Z}_{/4}=\{0,1,2,3\}$ kein Körper ⇒
K_4 kann nicht nur aus Elementen der Form 0,1,1⊕1,1⊕1⊕1,..bestehen ⇒
$\exists\, a\in K_4, \underset{D1.1.1}{\Rightarrow} 0,1,a,a+1\in K_4 \Rightarrow$
Sei $a\in K_4 \underset{D1.1.1}{\Rightarrow} a+1\in K_4 \Rightarrow K_4=\{0,1,a,a+1\}$ mit
D1.1.1 (A4): a⊕1=1⊕a,
1⊕1=0 da: 1⊕1≠1, 1⊕1≠a, 1⊕1≠a⊕1
a⊕a=a⊗(1⊕1)=a⊗0=0, (a⊕1)⊕(a⊕1)=(a⊕1)(1⊕1)=(a⊕1)⊗0=0,
(a⊕1)⊕1=a⊕(1⊕1)=a=1⊕(a⊕1), (a⊕1)⊕a=a⊕a⊕1=1

⊕	0	1	a	a⊕1
0	0	1	a	a⊕1
1	1	0	a⊕1	a
a	a	a⊕1	0	1
a⊕1	a⊕1	a	1	0

0 ist Nullelement
jedes Element hat genau 1 Inverses
Assozitivgesetz gilt

$a\otimes(a\oplus 1)\neq 0$, da sonst $a=0$ oder $a\oplus 1=0$
$a\otimes(a\oplus 1)\neq a$, da sonst $(a\oplus 1)=1$
$a\otimes(a\oplus 1)\neq a\oplus 1$, da sonst $a=1$ $\Rightarrow$ $a\otimes(a\oplus 1)=1$ Analog $(a\oplus 1)\otimes a=1$

$\Rightarrow$ $a\otimes a=1\oplus a=a\oplus 1$ da $(a\oplus 1)\otimes a=(a\otimes a\oplus 1\otimes a)\oplus a=a\otimes a\oplus(1\otimes a\oplus a)=$
$a\otimes a\oplus(a\oplus a)=a\otimes a\oplus 0=1\oplus a$ (siehe $\oplus$ Verknüpfung)
und $(a\oplus 1)\otimes(a\oplus 1)=(a\oplus 1)\otimes a\oplus a\oplus 1=1\oplus a\oplus 1=a$

$\otimes$	0	1	a	$a\oplus 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	a	$a\oplus 1$
a	0	a	$a\oplus 1$	1
$a\oplus 1$	0	$a\oplus 1$	1	a

Jedes $\in K_4 \neq 0$ hat 1 multiplikatives Inverses (in jeder Zeile 1x die 1) Assoziativ- und Distributivgesetz nachzurechnen.

A1.1.1 Zeige:
a) $\forall\ a\in K: a\otimes 0=0$
Lös: Verwendung von – siehe Konventionen.
Sei $b=a\otimes 0$ gesetzt. Dann ist $b=a\otimes(0\oplus 0)=(a\otimes 0)\oplus(a\otimes 0)=b\oplus b$ $\Rightarrow$
$0=b-b=((b\oplus b)-b=b\oplus(b-b)=b\oplus 0=b$

b) Das additive Inverse $-a$ zu einem $a\in K$ ist eindeutig bestimmt und es gilt $-a=(-1)\otimes a$, wobei -1 das additive Inverse der Zahl 1 bedeutet.
Lös: Gelte $a\oplus b=0$ und $a\oplus c=0$. Mit den Axiomen folgt dann
$b=b\oplus 0=b\oplus(a\oplus c)=(b\oplus a)\oplus c=(a\oplus b)\oplus c=0\oplus c=c$, also $b=c$.
Weiter ist $a+(-1)\otimes a=a\otimes(1\oplus(-1))=a\otimes 0$ und nach a) ist $a\otimes 0=0$.
Also ist $(-1)\otimes a$ additives Inverses zu a.

c) Das multiplikative Inverse a^{-1} zu einem $a\in K\setminus\{0\}$ ist eindeutig bestimmt
Lös: Ann $a\otimes b=1=a\otimes c$ $\Rightarrow$ $c=c\otimes(a\otimes b)=(c\otimes a)\otimes b=(a\otimes c)\otimes b=1\otimes b=b$ $\Rightarrow$ Beh

A1.1.2
Es sei K ein Körper und $a,b\in K$. Zeige die Binomische Formel $(a\oplus b)^2 = a^2\oplus 2\otimes a\otimes b\oplus b^2$ nur mit Hilfe der Körperaxiome.
Hierbei ist $2: = 1\oplus 1$ und $x^2 = x\otimes x$ für $x\in K$

// D1.1.1 (300) (A1) $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c)$ $\forall$ $a,b,c\in K$,//
//(M2) $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a$ $\forall$ $a\in K$ (M4) $a\otimes b=b\otimes a$ $\forall$ $a,b\in K$ //
// (D) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

Bew: $(a\oplus b)^2=(a\oplus b)\otimes(a\oplus b) \underset{(D)}{=} (a\oplus b)\otimes a \oplus (a\oplus b)\otimes b \underset{(M4)}{=}$

$a\otimes(a\oplus b) \oplus b\otimes(a\oplus b) \underset{(D)}{=} (a\otimes a\oplus a\otimes b) \oplus (b\otimes a \oplus b\otimes b)=$

$(a^2\oplus a\otimes b) \oplus (a\otimes b \oplus b^2) \underset{(A1)}{=} ((a^2\oplus a\otimes b) \oplus (a\otimes b)\oplus b^2=$

$((a^2\oplus(a\otimes b\oplus a\otimes b))\oplus b^2 \underset{(M2)}{=}$

$(a^2 \oplus(1\otimes(a\otimes b)) \oplus 1\otimes(a\otimes b))\oplus b^2 \underset{(D)}{=}$

$(a^2\oplus(a\otimes b)\otimes(1\oplus 1))\oplus b^2 \underset{(M4)}{=} (a^2\oplus 2\otimes(a\otimes b))\oplus b^2=$

$a^2\oplus 2\otimes a\otimes b \oplus b^2$ Klammern können wegen (A1) und (M1) weggelassen werden
Genauer steckt im letzten Schritt eine Def und zwar

$x \oplus y \oplus z := (x \oplus y) \oplus z \underset{A1}{=} x \oplus (y \oplus z)$

$x \otimes y \otimes z := (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ jeweils $x,y,z \in K$

A1.1.3 Gegeben sei ein Körper $(K,+,*)$. Setze man $2:=1+1$. Zeige: Definiert man auf (K) Abbildungen $\oplus$ und $\otimes$ durch: $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b := 2a+2b+a*b+2$, so erhält man einen Körper K^* mit Addition $\oplus$ und Multiplikation $\otimes$

Lös: Definiere $4:=2+2=2*2=2*(1+1)=2*1+2*1=4$

Überprüfung der Körperaxiome für $\oplus$ und $\otimes$

(A1) Für $a,b,c \in K$ gilt $(a \oplus b) \oplus c = (a+b+2) \oplus c = a+b+2+c+2 = a+b+c+4 = a+(b+c+4) = a+(b \oplus c)+2 = a \oplus (b \oplus c)$

(A2) Für $a \in K$ gilt $a \oplus 0 = a \Leftrightarrow 0+2=0 \Leftrightarrow 0=-2$ d.h. $0=-2$ ist eindeutiges neutrales Element bzgl a.

(A3) Es sei $a \in K$. Dann gilt $\Leftrightarrow a \oplus (-a) = 0 \Leftrightarrow a+(-a)+2=-2 \Leftrightarrow (-a)=-a-4$, d.h. $-a-4$ ist das eindeutige additive Inverse zu a bzgl $\oplus$

(A4) Für $a \in K$ gilt: $a \oplus b = a+b+2 = b+a+2 = b \oplus a$

(M1) Für $a,b,c \in K$ gilt:

$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (2b+2c+bc+2) =$
$2a+2(2b+2c+bc+2)+a(b+2c+bc+2)+2=$
$2a+4b+4c+2bc+4+2ab+2ac+abc+2a+2$
$(a \otimes b) \otimes c = (2a+2b+ab+2) \otimes c =$
$2(2a+2b+ab+2)+2c+(2a+2b+ab+2)c+2=$
$4a+4b+2ab+4+2c+2ac+2bc+abc+2c+2 \Rightarrow$
$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$

(M2) $\forall\ a \neq 0 = -2$ gilt $a \otimes 1 = a \Leftrightarrow 2a+2*1+a*1+2=a \Leftrightarrow$
$a+2*1+a*1+2=0 \Leftrightarrow (a+2)(1+1)=0 \Leftrightarrow 1+1=0 \Leftrightarrow 1=-1$
d.h., $1=-1$ ist das eindeutige Einselement bzgl $\otimes$
(Beachte $0 \otimes 1 = (-2) \otimes (-1) = 2(-2)+2(-1)+2+2=-2=1$)

(M3) $\forall\ a \neq 0$ gilt $a \otimes a^{-1} = 1 \Leftrightarrow 2a+2a^{-1}+aa^{-1}+2=-1 \Leftrightarrow$

$a^{-1}(a+2) = -1-2-2a \Leftrightarrow a^{-1} = \frac{-1-2-2a}{a+2}$ d.h. $\frac{-3-2a}{a+2}$

ist das eindeutige Inverse zu $a \neq 0$ bzgl $\otimes$

(M4) Für $a,b \in K$ gilt: $a \otimes b = 2a+2b+ab+2 = 2b+2a+ba+2 = b \otimes a$

(D) $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes (b+c+2) = 2a+2(b+c+2)+a(b+c+2)+2 =$
$2a+2b+2c+4+ab+ac+2a+2$ und
$(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = (2a+2b+ab+2) \oplus (2a+2c+ac+2) =$
$2a+2b+ab+2+2a+2c+ac+2+2$ d.h.
$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Facit: $(K, \oplus, \otimes)$ ist Körper

(312)**Abgeleitete Rechenregeln (RR) in** K :

Sei K ein Körper. Dann gilt $\forall$ a,b,c

1.) $0\neq 1$

Bew: 1= neutrales Element von $K^{\otimes}=K\setminus\{0\} \Rightarrow 1\neq 0$ # $a\otimes 1=a$, $a\otimes 0=0$

1.) $a\oplus 0=0\oplus a=a$, $a\oplus(-a)=(-a)\oplus a=0 \quad \forall\ a\in K$

$a\otimes 1=1\otimes a=a\ \forall\ a\in K$, $a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a\ \forall\ a\neq 0$

//D1.1.1 (300) (A3) $a\oplus(-a)=0$ *(A4)* $a\oplus b = b\oplus a\ \forall\ a,b\in K$*//*

Bew: folgt aus Kommutativgesetz ((A3),(A4))

$0*a = (0+0)*a=0*a+0*a$

$0*a\mathbf{+(-0a)} = 0*a+0*a\mathbf{+(-0a)}$

$0= 0*a$

2.) $\forall$ a,b$\in K\ \exists$ genau ein x$\in K$: $a\oplus x=b$ mit $x=b-a$

Bew:Sei x eine Lösung von $a\oplus x=b \Rightarrow (-a)\oplus(a\oplus x)=$

$(-a)\oplus b=b\oplus(-a)=b-a \Rightarrow ((-a)\oplus a)\oplus x = b-a \Rightarrow 0\oplus x=b-a\Rightarrow$

x=b-a, b-a ist eine Lösung:

$a\oplus(b-a)=(b-a)\oplus a=(b\oplus(-a))\oplus a=b\oplus 0=b$

Andere Formulierung

// D1.1.1 (300) (A2) $a\oplus 0=a\ \forall\ a\in K$ *(A3)* $a\oplus(-a)=0$*//*

//(A4) $a\oplus b = b\oplus a\ \forall\ a,b\in K$ *//*

Für x=b-a gilt $a\oplus x \underset{(A4)}{=} a\oplus b-a=a-a\oplus b=a\oplus(-a)\oplus b \underset{(A3)}{=} 0\oplus b \underset{(A4)}{=} b\oplus 0 \underset{(A2)}{=} b$

Eindeutigkeit:

Annahme x und y sind Lösungen $\Rightarrow a\oplus x=a\oplus y \Rightarrow -a\oplus(a\oplus x)=-a\oplus(a\oplus y) \Rightarrow$

$x\oplus 0=y\oplus 0 \Rightarrow x=y$

3.) (.) $-(-a)=a$ (..) $-(a\oplus b)=-a-b$ $-0=0$

Bew(.): $\overrightarrow{a\oplus(-a)=0,\ (-a)\oplus(-(-a))=0 \underset{(A4)}{\Rightarrow}}\ (-a)\oplus a=0$

d.h. $-(-a)$ ist Lösung von $(-a)\oplus x=0 \Rightarrow a = -(-a)$ (=x)

speziell $-0=0$

Andere Formulierung:

$-(-a)$ eindeutige Lösung von $(-a)\oplus x=0$, andererseits

$(-a)\oplus a=0 \Rightarrow -(-a)=a$

(..): $-(a\oplus b)$ Lösung von $(a\oplus b)\oplus x=0$

$(a\oplus b)\oplus(-a-b)=(a\oplus b)\oplus((-a)\oplus(-b)) \underset{(A4)}{\Rightarrow} (a\oplus b)\oplus((-b)\oplus(-a))=$

$a\oplus((b\oplus(-b)))\oplus(-a)=a\oplus(0\oplus(-a))=a\oplus(-a) \underset{(A3)}{=} 0 \underset{2.)}{\Rightarrow}$

$-(a\oplus b)=(-a)\oplus(-a)=-a-b$

Andere Formulierung

$-(a\oplus b)$ ist die eindeutige Lösung von $(a\oplus b)\oplus x=0$ nach (A3),

andererseits ist $(a\oplus b)\oplus(-a-b)=a\oplus b\oplus(-a)\oplus(-b) \underset{(A4)}{=}$

$a\oplus(-a)\oplus b\oplus(-a) \underset{(A3)}{=} 0\oplus 0 \underset{(A2)}{=} 0$

4.) $\forall\ a,b\in K,\ a\neq 0.\ \exists$ genau ein $x\in K$: $a\otimes x=b$
nämlich $x=a^{-1}\otimes b=b\otimes a^{-1}=b/a$

//D1.1.1 (300) (M1) $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c\ \ \forall\ a,b,c\in K$ //
//(M2) $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a\ \ \forall\ a\in K$ (M3) $\forall\ a\in K\setminus\{0\},\ a^{-1}\in K,\ a\otimes a^{-1}=1$//
//(M4) $a\otimes b=b\otimes a\ \ \forall\ a,b\in K$//

Bew: folgt analog zu 2.) und 3.) aus den Axiomen (M1)...(M4)

5.) $(a^{-1})^{-1}=a,\ (a\otimes b)^{-1}=a^{-1}\otimes b^{-1}\ \ \forall\ a,b\in K,\ a,b\neq 0$
Bew: folgt analog zu 2.) und 3.) aus den Axiomen (M1)...(M4)

6.) $a\otimes b=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$. Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0\ \ \forall\ a\neq 0$
//(D) (300) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

Bew: "$\Leftarrow$" 1.) $a=0 \Rightarrow a\otimes b=\underline{0\otimes b}=(0\oplus 0)\otimes b \underset{(D)}{=}$
$\underline{0\otimes b\ \oplus\ 0\otimes b}$ d.h. $0\otimes b$ ist Lösung x von
$0\otimes b\oplus x\ =\ 0\otimes b$. Da $0\otimes b\oplus 0\ =\ 0\otimes b \underset{2.)}{\Rightarrow} 0\otimes b=0$

2.) $b=0 \Rightarrow a\otimes b=a\otimes 0=0\otimes a=0$

"$\Rightarrow$" Annahme $b\neq 0 \Rightarrow \exists\ b^{-1}$ mit $b\otimes b^{-1}=1$
$\Rightarrow (a\otimes b)\otimes b^{-1}=0\otimes b^{-1} \Rightarrow (a\otimes b)\otimes b^{-1} \underbrace{=}_{\Leftarrow} 0 \underset{(M1)}{\Rightarrow} a\otimes(b\otimes b\otimes^{-1})=0 \Rightarrow$

$a\otimes 1 \underset{(M2)}{=} 0 \Rightarrow a=0$

Andere Formulierung:
Bew: $a,b\neq 0 \Rightarrow a,b\in K^{\otimes} \Rightarrow ab\in K^{\otimes}$ da $K^{\otimes}$ Gruppe $\Rightarrow ab\neq 0$

7.) $(-1)\otimes a=-a,\quad -(a\otimes b)=(-a)\otimes b\ =a\otimes(-b)$
//D1.1.1 (300) (A3) $a\oplus(-a)=0$
//(M1) $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c\ \ \forall a,b,c\in K$ (M2) $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a\ \ \forall\ a\in K$
// (M4) $a\otimes b=b\otimes a\ \ \forall\ a,b\in K$ (D) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

Bew: $\underset{(M2)}{\Rightarrow}\ a \underset{(M2)}{\Rightarrow} a\otimes 1 \underset{(M4)}{=} 1\otimes a,\ \underline{a\oplus(-1)\otimes a}=1\otimes a\oplus(-1)\otimes a \underset{(D)}{=}$
$(1\oplus(-1))\otimes a \underset{(A3)}{=} 0\otimes a \underset{6.)}{=} 0 \Rightarrow \underline{a\oplus(-1\otimes(a))=0},$
$a\oplus x=0$ hat die Lösung $(-1)\otimes a$ und nach (A3) $(-a) \underset{2.)}{\Rightarrow} (-1)\otimes a=-a$
$-(a\otimes b) \underset{\text{wie oben}}{=} (-1)\otimes(a\otimes b) \underset{(M1)}{=} ((-1)\otimes\ a\otimes b)=(-a)\otimes b \underset{(M1)}{=} a\otimes(-1)\otimes b)=$
$a\otimes(-b)$

Andere Formulierung:
$-a$ ist die eindeutige Lösung von $a+x=0$. Andererseits ist
$a+\underline{(-1)\otimes a} \underset{(M1),(M4)}{=} a\otimes 1\oplus a\otimes(-1) \underset{D}{=} a\otimes(1\oplus(-1))=a\otimes 0=0 \Rightarrow (-1)\otimes a=\underline{-a}$

Andere Formulierung:
$ab+a(-b)=a(b+(-b))=a*0=0$
Eindeutigkeit des additiven Inversen $a(-b)=-(ab)$
$(-a)b=-(ab)$ analog

8.) • $a(b-c)=ab+ac$, •• $ac=ab,\ a\neq 0 \Rightarrow c=b$
Bew: • $a(b-c)=a(b+(-c))=ab+a(-c)=ab+(-(ac))=ab-ac$

•• Es gelte $ab=ac \Rightarrow ab-ac=0 \Rightarrow a(b-c)=0 \underbrace{\Rightarrow}_{c} \left.\begin{matrix} a=0\ \ oder \\ b-c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b-c=0 \Rightarrow$
$b=c$

9) $(-a)\otimes(-b)=a\otimes b$
Bew: $(-a)\otimes(-b) \underset{7.)}{=} ((-1)\otimes a)((-1)\otimes b) \underset{(M1),(M4)}{=} (-1)\otimes((-1)\otimes(a\otimes b)) \underset{7.)}{=}$
$(-1)\otimes(-(a\otimes b))=-(-(a\otimes b))=a\otimes b$

10.) $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a \otimes d \oplus c \otimes d}{b \otimes d} \quad \forall$ a,b,c,d$\in$K, b,d$\neq$0

Bew: $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = a \otimes b^{-1} \oplus c \otimes d^{-1} = a \otimes d \otimes d^{-1} \otimes b^{-1} \oplus c \otimes b \otimes b^{-1} \otimes d^{-1} =$

$a \otimes d \otimes b^{-1} \otimes d^{-1} \oplus c \otimes b \otimes b^{-1} \otimes d^{-1} \underset{(D)}{=} (a \otimes d \oplus b \otimes c) \otimes (b^{-1} \otimes d^{-1}) =$

$(a \otimes d \oplus b \otimes c) \otimes (b \otimes d)^{-1} = \frac{a \otimes d \oplus c \otimes d}{b \otimes d}$, b,d$\neq$0

$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \otimes c}{b \otimes d}$ folgt aus (M4) b,d$\neq$0

Bew:Z.z $(ab^{-1})(cd^{-1})=(ac)(bd)^{-1}$

$(ab^{-1})(cd^{-1})=(ab^{-1})(cd^{-1}) \underbrace{(bd)(bd)^{-1}}_{=1} = a \underbrace{b^{-1}b}_{=1} c \underbrace{d^{-1}d}_{=1} (bd)^{-1} = (ac)(bd)^{-1}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \otimes d}{b \otimes c}$ b,d,c$\neq$0

Ab jetzt können die Zeichen + und * verwendet, wobei es sich nicht unbedingt um die Zeichen des „bürgerlichen" Rechnens handeln muß. Die Axiome und Rechenregeln treffen aber zu, deshalb ist es auch richtig, wenn die bekannten Verknüpfungszeichen verwendet werden. * wird/wurde häufig auch weggelassen, wenn der Sinn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.

A1.1.4 Wie sieht es mit der Lösungsmenge zu RR4 für a=0 aus?

A1.1.5 Zeige, dass $(-1)^2=(-1)*(-1)=1$ $(-a)^2=a^2$ gilt.

A1.1.6 Seien a,b,c,d Elemente eines Körpers. Zeige

a) $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ (a,c$\neq$0)

Lös: $(ab^{-1})(cd^{-1})=(ab^{-1})(cd^{-1}) \underbrace{(bd)(bd)^{-1}}_{=1} = a \underbrace{b^{-1}b}_{=1} c \underbrace{d^{-1}d}_{=1} (bd)^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$.

b) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$ (b,c,d$\neq$0)

A1.1.7 Es sei $(K,\oplus,\otimes)$ ein Körper mit der Eigenschaft $x^2+y^2\neq 0 \;\forall\; (x,y)\neq(0,0)$. Auf $K\times K$ seien folgende Verknüpfungen definiert:

$(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2) := (x_1 y_1-x_2y_2,\; x_1y_2+x_2y_1)$

Zeige, daß $(K\times K,\oplus,\otimes)$ ein Körper ist

Bem: Wählt man $K=R$ (hier gilt: $x^2+y^2>0 \;\forall\; (x,y)\neq(0,0)$), so erhält man hiermit, dass $C= R\times R$ ein Körper ist.

Bew: Prüfe alle Körperaxiome nach D1.1.1:

$\oplus$ und $\otimes$ sind Abb. $(K\times K)\times(K\times K)\to K\times K$

(Abgeschlossenheit bzgl $\oplus$ und $\otimes$, denn

$x_1+y_1, x_2+y_2, x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1 \in K \;\forall\; (x_1x_2),(y_1,y_2)\in K\times K$)

d.h. $(x_1,x_2) \oplus (y_1,y_2) := (x_1+y_1,x_2+y_2)\in K\times K$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2) := (x_1y_1-x_2y_2,\; x_1y_2+x_2y_1)\in K\times K$

//D1.1.1 (300) (A1) $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c) \;\forall\; a,b,c\in K$//

(A1) bzgl $\oplus$ Assoziativgestz $\underbrace{=}_{(A1)\text{ in }K}$

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel$\Rightarrow$

$((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+b_1,a_2+b_2)\oplus(c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$

$((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2) \underbrace{=}_{(A1)\text{ in }K} ((a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2)) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$

$(a_1,a_2)\oplus(b_1+c_1,b_2+c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2))$

//D1.1.1 (300) (A2) $a\oplus 0=a \;\forall\; a\in K$//

// Bem:2.) Eindeutigkeit 0: $a\oplus 0=a$, $a\oplus\bar{0}=a$ …. $\bar{0}=\bar{0}\oplus 0=0\oplus\bar{0}=0$//

(A2) (Existenz der Null) Die Null in $K\times K$ ist $(0,0)$, denn

Für $(a_1,a_2)\in K\times K$ bel gilt: $(a_1,a_2)+(0,0) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+0,a_2+0)$

$\underbrace{=}_{(A2)\text{ in }K} (a_1,a_2)$.

Die Eindeutigkeit der Null folgt aus D1.1.1 Bem 2

//D1.1.1 (300) (A3) $a\oplus(-a)=0$//

//Bem 3.) Eindeutigkeit $-a$: $a\oplus(-a)=0$, $a\oplus\bar{a}=0$… $\underbrace{=}_{A4} (-a)\oplus 0 \underbrace{=}_{A2} -a$//

(A3) (Existenz des inversen Elements bzgl $\oplus$)

Sei $(a_1,a_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\oplus(-a_1,-a_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$

$(a_1+(-a_1),a_2+(-a_2)) \underbrace{=}_{(A3)\text{ in }K} (0,0) \Rightarrow (\underbrace{-a_1}_{\in K},\underbrace{-a_2}_{\in K})\in K\times K$ ist

additiv inverses Element von (a_1,a_2) (insbesondere existiert dieses inverse Element in $K\times K$)

Die Eindeutigkeit des Inversen Element bzgl $\oplus$ folgt aus D1.1.1 Bem 3

//D1.1.1 (300) (A4) $a\oplus b = b\oplus a \;\forall\; a,b\in K$ //

(A4) (Kommutativgesetz bzgl $\oplus$)

Seien Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)$

$\underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+b_1,a_2+b_2) \underbrace{=}_{(A4)\text{ in }K} (b_1+a_1,b_2+a_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (b_1,b_2)\oplus(a_1,a_2)$

//D1.1.1 (300) (M1) $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c \quad \forall\, a,b,c \in K$//

(M1) (Assoziativgesetz bzgl ⊗) $\underbrace{=}_{KAx,\,Rechenr.}$

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2) \in K \times K$ bel ⇒

$((a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2)) \otimes (c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$(a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1) \otimes (c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$(a_1b_1-a_2b_2)c_1-(a_1b_2+a_2b_1)c_2\ ,(a_1b_1-a_2b_2)c_2+(a_1b_2+a_2b_1)c_1$

$\underbrace{=}_{KAx,\,Rechenr.} \quad a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2, a_1b_1c_2-a_2b_2c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1=$

$(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1), a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1-b_2c_2)$

$\underbrace{=}_{\text{Def} \otimes} (a_1,a_2) \otimes (b_1c_1-b_2c_2, b_1c_2+b_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$(a_1,a_2) \otimes ((b_1,b_2) \otimes (c_1,c_2))$

//D1.1.1 (300) (M2) $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a \quad \forall\, a \in K$//

//4.) in (M2) Eindeutigkeit 1 mit (M4)//

//RR in K 6.) $a \otimes b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$ Speziell $\Rightarrow a^{-1} \neq 0 \quad \forall\, a \neq 0 \quad \forall\, a \neq 0$//

(M2) (Existenz der Eins) Die Eins in $K \times K$ ist (1,0),

denn $(1,0) \neq \underbrace{(0,0)}_{\text{Null in } K}$ und für $(a_1,a_2) \in K \times K$ bel gilt:

$(a_1,a_2) \otimes (1,0) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes} (\underbrace{a_1 \cdot 1}_{=a_1} - \underbrace{a_2 \cdot 0}_{=0} , \underbrace{a_1 \cdot 0}_{=0} + \underbrace{a_2 \cdot 1}_{=a_2}) =$

wg (M2) und Rechenr 6

$(a_1-0, 0+a_2) \underbrace{=}_{Rechenr\, in K} (a_1,a_2)$

Die Eindeutigkeit der Eins folgt aus Bem4 D1.1.1

//(M3) (300) $\forall\, a \in K \setminus \{0\},\ a^{-1} \in K,\ a \otimes a^{-1} = 1$ //

(M3) (Existenz des inversen Elements bzgl ⊗)

Sei $(a_1,a_2) \in K \setminus \{0,0\}$ bel ⇒

$\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2} \right)$ ist multiplikativ inverses Element von

(a_1,a_2), denn $\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2} \right) \in K \times K$

(Wie findet man dieses inverse Element $(b_1,b_2) \in K \times K$?

Ansatz: $(a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) = (1,0) \Leftrightarrow a_1b_1-a_2b_2=1, a_2b_1-a_1b_2=0$

$\Leftrightarrow b_1=a_1/(a_1^2+a_1^2),\ b_2=-a_2/(a_1^2+a_1^2)$.

Beachte $a_1^2+a_1^2 \neq 0$ nach Vors)

und $(a_1,a_2) \otimes \left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2} \right) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$\left(a_1 \cdot \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2} - a_2 \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2},\ a_1 \cdot \frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2} + a_2 \frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}\right) \underbrace{=}_{Rechenr\, in K}$

$\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2}, \frac{-a_1a_2+a_1a_2}{a_1^2+a_2^2} \right) = (1,0) =$ Eins in $K \times K$

Die Eindeutigkeit des multiplikativen inversen Elements folgt aus D1.1.1 Bem 4

//(300) (M4) $a \otimes b = b \otimes a \quad \forall\, a,b \in K$//

(M4) (Kommutativgesetz bzgl $\otimes$) Seien

$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$

$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1) \underbrace{=}_{(M4)} (b_1a_1-b_2a_2,b_1a_2+b_2a_1) \underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$

$(b_1,b_2)\otimes(a_1,a_2)$

//(300)(D) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

(D) (Distributivgesetz)

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$

$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\oplus(c_1,c_2)) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1,a_2)\otimes(b_1+c_1,b_2+c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$

$((a_1(b_1+c_1)-(a_2(b_2+c_2),a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1))=$

Rechenr., Axiome, insbes (D) in K

$(a_1b_1+a_1c_1-a_2b_2-a_2c_2,a_1b_2+a_1c_2+a_2b_1+a_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Rechenr } in K}$

$((a_1b_1-a_2b_2)+(a_1c_1-a_2c_2),(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1c_2+a_2c_1)) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$

$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)\oplus(a_1c_1-a_2c_2,a_1c_2+a_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$

$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\oplus((a_1,a_2)\otimes(c_1,c_2))$

beachte: $\otimes$ bindet stärker als $\oplus$ (Punkt vor Strich)

Bem: Wählt man $K=R$, (hier gilt: $x^2+y^2>0\ \forall(x,y)\neq(0,0)$), so erhält man hiermit, daß $C=R\times R$ ein Körper ist.

In $C=R\times R$ schreibt man anstelle von (x_1,x_2): $x+iy$ wobei $i=(0,1)$

Anstelle von $\oplus$ und $\otimes$ benutzt man die Symbole + und *, also

$(x_1+ix_2)+(y_1+iy_2):=(x_1+y_1)+i(x_2+y_2)$

$(x_1+ix_2)\cdot(y_1+iy_2):=(x_1y_1-x_2y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

Nach A1.1.7 ist $(C,+,*)$ also ein Körper, d.h. man kann wie gewohnt rechnen. Beachte noch:

$i=(0,1)$ $\quad i^2=i*i=(0+1*i)*(0+1*i) \underbrace{=}_{\text{Def von}\cdot} (0\cdot0-1*1)+(0*1+1*0)i=$

$-1+0*i=-1$ also $i^2=-1$

$i^2=(0,1)*(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$

A1.1.8 Es sei (G,*) eine Gruppe und a∈G (fest). Beweise, daß die folgenden Abbildungen bijektiv sind, und gib jeweils die zugehörigen Umkehrabbildungen an:

Bem:Wir zeigen die Bijektivität von f_j (j∈{1,2,3}) mit
Angabe eines g_j:G→G mit $g_j\ \ f_j=id_G=f_j\ \ g_j$
Dann ist $f_j^{-1} = g_j$

Bem:1.)(M1),(M2),M3) bedeuten, (K\{0},⊗) ist Gruppe,
die wegen(M4) Abel'sch ist

a)f_1:G→G, x x^{-1} (x^{-1} sei das inverse Element zu x in der Gruppe G)

//A0.2.19 (206) X,Y≠∅ & f:X→Y Abb Zeige://
*//*c)Beh(.)f bijektiv ⇔ ∃ g: Y→X mit g f=id_x f g=id_y*//*
//   (..)g eindeutig g=f^{-1} *//*
//D0.2.6 (203)//
//Bem:3.)f: X→Y bijektiv g: Y→Z bijektiv ⇒ //
//g f: X→Z bijektiv und (g f)$^{-1}$ = f^{-1} g^{-1}//

Lös:y=x^{-1} ⇔ x=y^{-1} f_1(x):=x^{-1}

Sei g_1:=f_1 ⇒ (g_1 f_1)(x) $\underset{f_1=g_1}{=}$ (f_1 f_1)(x)= f_1(f_1(x)=f_1(x^{-1})=

(x^{-1})$^{-1}$ =x ∀ x∈G ⇒ g_1 f_1 = id_G und f_1 g_1 $\underset{f_1=g_1}{=}$ g_1 f_1= id_G $\underset{A0.2.19\,c)}{\Rightarrow}$

f_1 bijektiv und f_1^{-1}=f_1(=g_1)

b)f_2:G→G, x a*x

Lös:y=a*x ⇔ x=a^{-1}*y
f_2(x):= a*x. Definiere g_2: G→G g_2(x)=a^{-1} *x ⇒
(g_2 f_2)(x)=g_2(f_2(x))=g_2(a*x)=a^{-1}*(a*x)= $\underbrace{\left(a*a^{-1}\right)}_{e\ldots 1}*x$ =x ∀ x∈G
und (f_2 g_2)(x)=f_2(g_2(x))=f_2(a^{-1}*x)=a*(a^{-1}x)=x ⇒
g_2 f_2=id_G=f_2 g_2 ⇒ f_2 bijektiv und f_2^{-1}=g_2

c)f_3:G→G, x x*a

Lös:f_3(x)=x*a Definiere g_3:G→G, g_3(x)= x*a^{-1} = ⇒ analog a),b)
⇒ g_3 f_3=id_G=f_3 g_3⇒f_3 bijektiv ∀ f_3^{-1} =g_3 ⇒
(g_3 f_3)(x)=g_3(f_3)(x)=g_3(x*a)=(x*a)*a^{-1} =x*(a*a^{-1})=x*1 = x
∀ x∈G und (f_3 g_3)(x)=(f_3(g_3)(x)=f_3(x*a^{-1})=(x*a^{-1})*a=
x*(a*a^{-1})=x*1=x ∀ x∈G

A1.1.9 Es sei K ein Körper und $a\in K$ (fest). Auf K seien die Relationen | und ~ wie folgt definiert:

$x|y :\Leftrightarrow \exists\, c\in K$ mit $y=c*x$

$x\sim y :\Leftrightarrow a|(x-y)$

a) Ist die Relation | reflexiv, symmetrisch, transitiv?

Lös: 1. Möglichkeit

//(RR) in K (304) 1.)…. $a\otimes 1=1\otimes a=a\ \forall\, a\in K$ ….//

//6.) $a\otimes b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$ Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0\ \forall\, a\neq 0$//

(.) | ist reflexiv: $x|x\ \forall\, x\in K$,

denn $x \underset{\text{Rechenregel 1.)}}{=} 1*x\ \forall\, x\in K$ (d.h. Wähle $c=1\in K$)

(..) | ist nicht symmetrisch: es gilt $1|0$

(denn $0 \underset{6.)}{=} 0*1$, wähle $c=0\in K$) aber $0\nmid 1$ (d.h. nicht $(0|1)$, 0 teilt nicht 1), denn falls $0|1$,

dann $\exists\, c\in K$ mit $1 = c*0 \underset{6.)}{=} 0$ Widerspruch da $1\neq 0$

(...) | ist transitiv: Es sei $x|y$ und $y|z$,

d.h. $\exists\, c_1 c_2\in K$: $y=c_1*x$ und $z=c_2*y \Rightarrow$

$z=c_2*y=c_2*(c_1*x) \underset{(M1)}{=} \underbrace{(c_2*c_1)}_{\in K} *x$ und $c_1c_2\in K \Rightarrow x|z$

Bem: Die obige Rechnung stimmt immer noch, wenn K durch einen kommutativen Ring ersetzt wird (z.B. $\mathbb{Z}$)

2. Möglichkeit: Wegen $x|y\ \forall\, x\in K\setminus\{0\},\ \forall\, y\in K$

(Wähle $c = \frac{y}{x}$) und ($0|y\Leftrightarrow y=0$) gilt:

$x|y \Leftrightarrow (x=0 \Rightarrow y=0)$ bzw $(x\neq 0$ oder $y=0)$

$\Rightarrow$ | reflexiv (da $x=0 \Rightarrow y=0$)

| nicht symmetrisch (z.B. $x=0$ und $y=1$)

| transitiv (aus $x=0 \Rightarrow y=0$ und $y=0 \Rightarrow z=0$ folgt $x=0 \Rightarrow z=0$

b) Zeige, daß ~: x~y: ⇔ a|(x-y) eine ÄR ist und bestimme alle ÄKn. (Hinweis: Unterscheide die Fälle a=0 und a≠0)

//Eine Menge R mit zwei inneren binären Verknüpfungen „+" und//
//„." auf R ist ein Ring, wenn gilt://*
//1.) (R,+) ist eine abelsche Gruppe, mit 0 als neutralem //
//   Element;//
*//2.) (a*b)*c=a(b*c); //*
//3.) ∀ a,b,c ist a(b+c)=a*b+a*c (a+b)*c=a*c+b*c.//*
*//4.) kommunitativer Ring: a*b=b*a//*

//G Menge, (G,), :GxG→G heißt Gruppe, wenn folgende //
//Axiome erfüllt sind://
//∀ a,b,c gilt (a b) c=a (b o c)//
//∃ e∈G, ∀ a∈G: a o e=e o a=a//
//∀ a∈G: ∃ a-1 mit a o a-1=a-1 o a=e //
//G abelsch: zusätzlich gilt a o b=b o a   Abgeschlossenheit//

//D1.1.1 (300)//
//(A1) (a⊕b)⊕c=a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K (A2) a⊕0=a ∀ a Î K//
//(RR) in K (304)//
//1.) a⊕0=0⊕a=a, a⊕(-a)=(-a)⊕ a=0 ∀ a∈K
// a⊗1=1⊗a=a ∀ a∈K, a⊗a^{-1}=a^{-1} ⊗a ∀ a≠0

Bew: 1. Möglichkeit benutze nur Eigenschaften eines kommutativen Ringes (z.B. Z)

x|y: ⇔ ∃ c∈K mit y=c*x

x~y: ⇔ a|(x-y)

(.) ~ ist reflexiv: Wegen 0=0·a (mit c=0) gilt a|0=x-x ⇒ x~x

(..) ~ ist symmetrisch: Sei x~y ⇒ a|x-y ⇒ $ c∈K: x-y=ca ⇒

$$y-x=-(-y)-x=-(-y+x)=-(x+(-y))=-(x-y)=-(ca)=\underbrace{(-c)}_{\hat{I}K} a \Rightarrow a|y-x$$

⇒ y~x

(...) ~ ist transitiv: Seien x~y und y~z ⇒ a|x-y und a|y-z ⇒

⇒ c_1, c_2∈K mit x-y=c_1a und y-z=c_2a ⇒

$$x-z \underbrace{=}_{(A2)} (x+0)-z \underbrace{=}_{\text{Rechenr1)}} (x+((-y)+y))-z \underbrace{=}_{(A1)} ((x+(-y))+y)-z=$$

$$((x+(-y))+y)+(-z)=(x+(-y))+(y+(-z))= (x-y)+(y-z)=$$

$$c_1a+c_2a= a(c_1+c_2)=\underbrace{(c_1+c_2)}_{\in K} a \Rightarrow a|x-z \Rightarrow x\sim z$$

2. Möglichkeit

1.Fall: a=0: x~y ⇔ x=y

$$(\text{denn}: 0|x-y \Leftrightarrow \$\ c\in K\ \underbrace{x-y}_{=x+(-y)} =c*0=0 \Leftrightarrow x=-(-y)=y) \Rightarrow$$

~ ist ÄR da = eine ÄR ist

2.Fall: a≠0: x~y ∀ x,y∈K denn a|x-y ⇔ $ c∈K: x-y = c*a

wahr ∀ x,y∈K (Wähle c= (x-y)* a^{-1}, beachte a≠0) d.h. ~ ÄR

$$\text{ÄK: } x|_\sim = \{y\in K\ |y\sim x\}=\begin{cases}\{x\}, \text{falls} a=0\\ K, \text{falls} a^1 0\end{cases}$$

Es macht wenig Sinn, diese x~y Relation in K zu betrachten.

D1.1.9 (321) Die Charakteristik von Körper K

char(K)=das kleinste m∈$\mathbb{N}$ mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\,mal}=0$ falls es dieses m gibt.

Falls es dieses m nicht gibt, gelte char(K)=0

Bsp: F_2 Seite 306

S1.1.1 (321) char(F_P=$Z_{/P}$)=P (P eine Primzahl)

Bew: Annahme chr(K)=m ist keine Primzahl ⇒ m=dk; d,k∈$\mathbb{N}$; d,k≥2

Sei $\underline{k}=\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{k\,mal}\in K$, $\underline{d}=\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d\,mal}\in K$ ⇒

$\underline{d}\ \underline{k}=(\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{k\,mal})(\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d\,mal})=\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d*k\,mal}=0 \Rightarrow \underline{d}$ oder $\underline{k}=0 \underset{d,k<m}{\Rightarrow}$

Fall $\underline{d}=0$, $\underline{k}\neq 0 \Rightarrow \underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d<m\,mal}=0 \Rightarrow$

$\underline{d}$ <m ist kleinste Zahl $\underbrace{1_k+1_k+\ldots+1_k}_{d\,mal}=0$

Widerspruch zu m kleinste m∈$\mathbb{N}$ mit $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m\,mal}=0$

Fall $\underline{k}=0$ analog

⇒⇒ Annahme falsch ⇒ char(K)ist Primzahl