

1.6(800) Die komplexen Zahlen

Es soll ein \mathbf{R} umfassender Körper konstruiert werden, in dem die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar ist.

//D0.1.2 (3) $M_1=M_2: \Leftrightarrow x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2 //$

D1.6.1(800)

Die Menge $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ mit Verknüpfungen

$$+ : (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\star : (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 : (x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

heißt Körper der komplexen Zahlen $\mathbf{C} = \{z \mid z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbf{R}\}$

Beachte $z_1 = (x_1, y_1) = (x_2, y_2) = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ siehe D0.1.2 oder

Die Menge aller Punkte $z = (x, y)^T \in \mathbf{R}^2$, zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen \mathbf{C} , oder die komplexe Zahlenebene.

S1.6.1(800)

1.) $(\mathbf{C}, +, \star)$ ist ein Körper

Bew: siehe A1.1.7 (306)

Mit diesen Verknüpfungen ist \mathbf{C} ein Körper, d.h. es gelten die gleichen Regeln bzgl. $+$ und \star wie in \mathbf{R} und die Addition komplexer Zahlen entspricht genau der Vektoraddition in \mathbf{R}^2 .

Wir identifizieren $x \leftrightarrow (x, 0)^T$ für alle $x \in \mathbf{R}$, damit ist \mathbf{R} ein Unterkörper von \mathbf{C} . Die Zahl 1 entspricht also dem ersten Einheitsvektor

$$(1, 0)^T = i \Rightarrow i^2 = -1 \text{ und } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

2.) $\mathbf{C}_{\mathbf{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ ist ein Unterkörper von \mathbf{C} , der zu \mathbf{R} isomorph ist.

$\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{R}}$ definiert durch $x \mapsto (x, 0)$ ist ein Isomorphismus von \mathbf{R} auf $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}$, (d.h. φ ist bijektiv mit

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \quad \varphi(x_1 \star x_2) = \varphi(x_1) \star \varphi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$$

$$\text{Bew: } \varphi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_1 \star x_2) = (x_1 x_2, 0) = (x_1, 0) \star (x_2, 0) = \varphi(x_1) \star \varphi(x_2)$$

3.) Für imaginäre Einheit $i := (0, 1)$ gilt

$$i^2 = i \star i = (0, 1) \star (0, 1) = (0 \star 0 - 1 \star 1, 0 \star 1 + 1 \star 0) = (-1, 0) = -1 \in \mathbf{R}$$

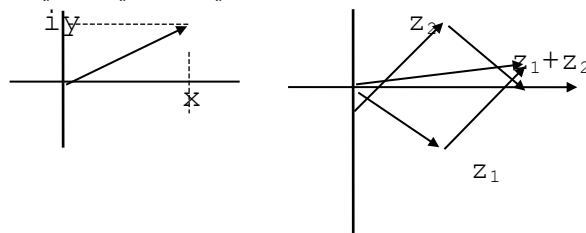
4.) $z = (0, 1)$ erfüllt $z^2 = (-1, 0)$

5.) \mathbf{C} kann nicht angeordnet werden, da $i^2 = -1 < 0$, Widerspruch zu z^2 muß > 0 sein

Kartesische Schreibweise der komplexen Zahlen

$$z \in \mathbf{C}, \quad z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}} + \underbrace{(1, 0)}_{\in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}} + \underbrace{(y, 0)}_{\in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}} + \underbrace{(0, 1)}_{=i}$$

$$z = (x, y) = (x, 0) \star 1 + (y, 0) \star i = x \star 1 + yi = x + iy, \quad x, y \in \mathbf{R}$$



Bezeichnungen: Sei $z=x+iy$ $x, y \in \mathbb{R}$ $i^2=-1$

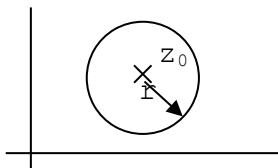
1.) $x := \operatorname{Re} z$ Realteil von z

2.) $y := \operatorname{Im} z$ Imaginärteil von z

3.) $\bar{z} := x-iy$ die zu z konjugierte komplexe Zahl

4.) $|z| := \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ Betrag von z =Abstand von z zum 0 Punkt

5.) $U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$ ist eine Kreisscheibe um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r (> 0)$



Für $z=x+iy \in \mathbb{C}$ gilt immer ($|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$)

$$\max\{|x|, |y|\} \leq |z| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2 \max\{x^2, y^2\}} \leq \sqrt{2 \max\{|x|, |y|\}^2} \leq$$

$$\sqrt{2} \max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{2} \left(\underbrace{|x|+|y|}_{\geq \max\{|x|, |y|\}} \right)$$

Bew: $|z|^2 = x^2+y^2 \geq x^2$, also $|z| \geq |x|$ und $|z| \geq |y|$. Daraus folgt die linke Ungleichung. Wegen $(\max\{|x|, |y|\})^2 = \max\{x^2, y^2\}$ gelten auch die anderen Ungleichungen.

Beachte, dass die obige Definition des Betrags einer komplexen Zahl im Falle $y=0$ (also $z \in \mathbb{R}$) mit der früheren Definition des Betrags der reellen Zahl übereinstimmt.

Die komplexen Zahlen werden als Punkte der Ebene \mathbb{R}^2 identifiziert. Gaußsche Zahlenebene.

\mathbb{C} läßt sich nicht anordnen, sonst wäre $\forall z \neq 0, z^2 > 0$, obwohl $i^2 = -1$ Widerspruch!

Da sich \mathbb{C} nicht anordnen lässt, ist es sinnlos, Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen zu betrachten. Allerdings kann man Ungleichungen untersuchen, in denen nur Beträge komplexer Zahlen auftreten. Z.B. gelten die Dreiecksungleichungen auch für Beträge komplexer Zahlen.

(801) Eigenschaften der komplexen Zahlen

Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$1.) \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z) \quad \text{da } i^2 = -1, 1/i = -i$$

$$\left. \begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array} \right\} \begin{array}{l} z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy \quad (y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})) \end{array}$$

$$2.) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$3.) \bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } z_2 \neq 0,$$

$$\# \overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} =$$

$$\# x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\# \text{Nach 5.) } \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} \stackrel{\text{S1.6.1}}{=} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = \overline{z_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{z_2/z_1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{5.)}}{=} \frac{1}{\overline{z_2/z_1}} \stackrel{\text{S1.6.1}}{=} \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\# \overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) =$$

$$\# (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\# \overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) =$$

$$\# (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$4.) z = x + iy, \quad |x| = |\operatorname{Re} z| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad |y| = |\operatorname{Im} z| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$5.) \left(\frac{1}{z}\right) = \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x + iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{1}{x - iy} = \frac{1}{\overline{z}}$$

S1.6.2 (802)

Vor. Sei $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ dann

$$1.) |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \quad |z| = |-z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbf{C} \quad \text{und} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad |z| = |\overline{z}| = \sqrt{\overline{z} z}$$

$$\text{Bew: } z \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1 \dots |z| = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$2.) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{falls } z_2 \neq 0$$

$$\text{Bew: } |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 z_2) (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \overline{z_1}) (z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

$$|z_1| = \left| \frac{z_1}{z_2} z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| |z_2| \Leftrightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3.) Δ Ungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 \pm z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \geq |z_1| - |z_2|$$

„=“ gilt $\Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1$ oder $z_1 = \lambda z_2 \quad \lambda \geq 0$

// (801) 1.) $\operatorname{Re} z = 1/2(z + \overline{z})$ (801) //

Bew: siehe auch A1.6.5

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_2|^2$$

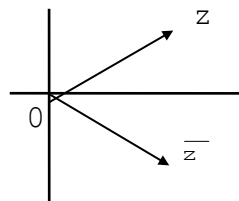
$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2 \underbrace{|\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})|}_{\geq} + |z_2|^2 \quad \text{Eig 4.)}$$

$$|z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 \stackrel{2.)}{=} |z_1|^2 + 2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + |z_2|^2 =$$

$$|z_1|^2 + 2 |z_1| |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \Rightarrow$$

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$



$$\text{Bem: } 1.) \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

$$\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

$$2.) z = x + iy \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{array} \right\} \leq |z| \leq |x| + |y| \quad \text{*da } (x^2 + y^2) \leq (|x| + |y|)^2$$

$$3.) z = x + iy \neq 0, \quad 1/z = z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

4.) der Betrag für $z \in \mathbf{R}$ stimmt mit dem reellen Betrag überein

A1.6.1 z.z.: In $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ gilt das „=" wenn $\sqrt{\underbrace{\operatorname{Re}^2(z_1\bar{z}_2)+\operatorname{Im}^2(z_1\bar{z}_2)}_{=0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)=0}}$

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) > 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0$$

Bew: $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2 =$
 $|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \stackrel{*}{\geq} |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$

$$*\Rightarrow |z_1\bar{z}_2| = \sqrt{\underbrace{\operatorname{Re}^2(z_1\bar{z}_2)+\operatorname{Im}^2(z_1\bar{z}_2)}_{=0}} = |\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| = \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$*\Leftarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1\bar{z}_2| = \sqrt{\underbrace{\operatorname{Re}^2(z_1\bar{z}_2)+\operatorname{Im}^2(z_1\bar{z}_2)}_{=0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)=0}}$$

D1.6.2 (803)

Für $z \in \mathbb{C}$: $z^0 := 1$, $z^1 := z$, $z^{n+1} := z * z^n$, $z^{-n} := (1/z)^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$)

S1.6.3 (803)

Für $z \in \mathbb{K}$ (Körper) und $n \in \mathbb{Z}$ sei für $-n \in \mathbb{N}$ $nz := (-n)(-z)$ und, falls $z \neq 0$, $z^n := (z^{-1})^{-n} = (1/z)^{-n} \forall n, m \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{K}$ gilt

$nz+mz = (n+m)z$, $m(nz) = (mn)z$, $nz+nw = n(z+w)$, ($z, w \neq 0$, falls $n, m < 0$)

(.) $z^n z^m = z^{n+m}$

Bew: $\alpha) n, m \geq 0$:

Induktion nach n . $A(n) : z^n * z^m = z^{n+m} \forall m \in \mathbb{N}_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und auf Grund der rekursiven Def

$\beta) n \geq 0, m \leq 0$

$$z^{n-1} * z^1 = z^n \stackrel{z \neq 0}{\Leftrightarrow} z^{n-1} = z^n * z^{-1}$$

$z \neq 0 \dots$ Induktion nach n . $z^n * z^m = z^{n+m} \forall m \in (-\mathbb{N}_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$n=0$: $z^0 * z^m = 1 * z^m = z^m = z^{0+m}$

$n \mapsto n+1$: $z^{n+1} * z^m \stackrel{\text{Def } \alpha}{=} z^n * (1/z) * z^m = z^n (1/z) * z^m$

(da $-m \in \mathbb{N}$) $= z^n (1/z)^{-m-1} = z^n z^{m+1} \stackrel{\text{IndHyp}}{\Leftrightarrow} z^{n+m+1} \forall m \in \mathbb{N}_0$.

$\gamma) z \neq 0, n, m \geq 0$

$$z^n z^m \stackrel{\text{Def}}{=} (1/z)^{-n} (1/z)^{-m} \stackrel{\alpha}{=} (1/z)^{-n-m} = z^{n+m}$$

(..) $(z^n)^m = z^{nm}$

Bew: $A(n) : (z^n)^m = z^{n*m} \forall n \in \mathbb{Z}$ für $m \in \mathbb{N}_0$

$m=0$: $1=1$

$m \mapsto m+1$: $(z^n)^{m+1} = (z^n)^m (z^n)^1 \stackrel{\text{IndHyp}}{\Leftrightarrow} z^{nm} z^n = z^{n(m+1)}$

$m < 0$: $(z^n)^{-1} = z^{-n}$ weil nach (.) $z^n z^{-n} = z^0 = 1$

(...) $(zw)^n = z^n w^n$, $z, w \neq 0$ für $n, m < 0$

Bew: analog

A1.6.2 Berechne Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen (für ein $z=x+iy \in \mathbb{C}$, für welches der Nenner verschwindet)

$$z^2, \quad 1/z, \quad \frac{1+z}{1-z}$$

A1.6.3 Zeige: Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ kann es keine Teilmenge \mathbb{K}_+ geben, welche die Axiome (O1)-(O3) erfüllt, d.h. \mathbb{C} kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden.

A1.6.4 Zeige: Ist $z \in \mathbb{C}$, und $|z|=0$, so folgt $z=0$ (also $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$)

A1.6.5 Zeige für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

a) $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$

Lös: $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2,$

$$\begin{aligned} (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1y_2 - x_2y_1)^2 &= \\ x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 - (x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2) &= \\ x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1y_2x_2y_1 = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 &\geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \end{aligned}$$

$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$

b) Benutze a) um zu zeigen, daß $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Anleitung: Quadriere beide Seiten

Lös: $|z_1 + z_2|^2 = |x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2|^2 = |x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 =$
 $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2) + x_2^2 + y_2^2$
 $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + x_2^2 + y_2^2.$

Bleibt z.z. $x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}.$

Annahme $x_1x_2 + y_1y_2 > \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \geq 0 \Leftrightarrow (x_1x_2 + y_1y_2)^2 > (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$ Widerspruch zu a) \Rightarrow richtig

A1.6.6 Zeige für $z \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\operatorname{Re} iz = -\operatorname{Im} z$

b) $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}, \quad \overline{(cz^{-1})} = c(\bar{z})^{-1}$

A1.6.7

a) Zeige: Für reelle Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, & \text{falls } 4ac \leq b^2 \\ \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, & \text{falls } 4ac > b^2 \end{cases}$$

Anleitung: Zeige zunächst $az^2 + bz + c = a(z + b/2a)^2 + c - b^2/4a.$

Bew: $0 = az^2 + bz + c = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c \Leftrightarrow a(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a} - c \Leftrightarrow$

$$(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

1. Fall: $b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0 \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$
 $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. Fall: $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \pm i \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm i \sqrt{4ac - b^2}}{\pm 2a} \Rightarrow$
 $z = \frac{-b \pm i \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

b) Zeige: Für $z, \xi \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$) gilt:

$$z = \xi^2 \Leftrightarrow \xi = \pm \left(\sqrt{\frac{x+|z|}{2}} + i(\operatorname{sgn} y) \sqrt{\frac{-x+|z|}{2}} \right)$$

Lös: "=>"

$$\xi = s + it \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}, z = \xi^2 \Leftrightarrow z = x + iy = (s + it)^2 = s^2 - t^2 + 2ist - t^2 \Leftrightarrow x = s^2 - t^2 \text{ und } y = 2st$$

$$1. \text{ Fall: } y = 0 \Leftrightarrow x = s^2 - t^2 \text{ und } (s = 0 \text{ oder } t = 0) \Rightarrow x = s^2 \text{ oder } x = -t^2 \Leftrightarrow$$

$$\downarrow (x \geq 0 \text{ und } s = \pm \sqrt{x}) \text{ oder } (x \leq 0 \text{ und } t = \pm \sqrt{-x}) \Leftrightarrow$$

$$\downarrow (x \geq 0 \text{ und } \xi = \pm \sqrt{x}) \text{ oder } (x \leq 0 \text{ und } \xi = \pm i \sqrt{-x})$$

$$2. \text{ Fall: } y \neq 0 \Leftrightarrow x = s^2 - t^2 \text{ und } t = \left(\frac{2s}{y}\right)^{-1} \Rightarrow x = s^2 - \frac{y^2}{4s^2} \text{ und } t = \frac{y}{2s}$$

$$\Leftrightarrow 4s^4 - 4s^2x - y^2 = 0 \text{ und } t = \frac{y}{2s} \Leftrightarrow_{u=s^2} 4u^2 - 4uy - y^2 = 0 \text{ und } t = \frac{y}{2s} \Leftrightarrow$$

$$u = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 + 16y^2}}{2 \cdot 4} = \frac{4x \pm 4|z|}{2 \cdot 4}$$

(- kann nicht benutzt werden, da $|z| \geq |x| \geq x$ und $s = \sqrt{u} \in \mathbb{R}$) \Leftrightarrow

$$s^2 = u = \frac{x+|z|}{2} \text{ und } t = \frac{y}{2s} \Leftrightarrow s = \pm \sqrt{\frac{x+|z|}{2}} \text{ und } t = \frac{y}{2(\pm \sqrt{\frac{x+|z|}{2}})} \Leftrightarrow$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{x+|z|}{2}} \text{ und } t = \pm \frac{y \sqrt{(-x+|z|)/2}}{\pm \sqrt{-x^2+|z|^2}} = \pm \frac{y \sqrt{(-x+|z|)/2}}{\pm \sqrt{y^2}} =$$

$$\pm (\operatorname{sign} y) \sqrt{(-x+|z|)/2} \Leftrightarrow \xi = \pm \sqrt{\frac{x+|z|}{2}} \pm i (\operatorname{sign} y) \sqrt{\frac{-x+|z|}{2}}$$

"<=" ausquadrieren, nachrechnen

c) Berechne alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 = 1$. Anleitung: $z^3 - 1 = (z - 1)(\dots)$

$$\text{Lös: } z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ oder } z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ oder } z = 1 \text{ oder } z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

A1.6.8 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar und berechne deren Beträge:

a) i^n ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\text{Lös: Beh: } i^n = \begin{cases} 1, \text{ falls } n = 4k \\ i, \text{ falls } n = 4k + 1 \\ -1, \text{ falls } n = 4k + 2 \\ -i, \text{ falls } n = 4k + 3 \end{cases} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, \text{ und } \begin{pmatrix} 1 = 1 + 0i \\ i = 0 + 1i \\ -1 = -1 + 0i \\ -i = 0 + (-1)i \end{pmatrix}$$

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1, \text{ da } i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \quad i^{4k+1} = i \cdot i^{4k} = i \cdot 1 = i,$$

$$i^{4k+2} = i^2 \cdot i^{4k} = (-1) \cdot 1 = -1, \quad i^{4k+3} = i^3 \cdot i^{4k} = i^3 \cdot 1 = (-1)i = -i$$

Betrag: $|i^n| = 1$, da $|1| = 1$, $|i| = 1$, $|-1| = 1$ oder man benutzt

$|z^n| = |z|^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, (Bew: $n \geq 0$: Induktion nach n ,

$$n < 0: |1/z^{-n}| = |(1/z)^{-n}| = |1/z|^{-n} = |z|^n)$$

b) $(1+i)^4$

$$\text{Lös: } [(1+i)^2]^2 = [(1+2i+i^2)]^2 = (2i)^2 = 2^2 i^2 = -4 = -4 + 0i,$$

$$|(1+i)^4| = |-4| = 4$$

$$c) \frac{1}{(3-i)^2}$$

$$\text{Lös:} = \frac{1}{9-6i+i^2} = \frac{1}{8-6i} \frac{8+6i}{8+6i} = \frac{8+6i}{8^2-(6i)^2} = \frac{8+6i}{100} = 2/25 + \frac{3}{50} i$$

$$\left| \frac{1}{(3-i)^2} \right| = \left| \frac{1}{8-6i} \right| = \frac{1}{|8-6i|} = 1/10$$

$$d) \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$$

$$\text{Lös:} = \frac{(1+i)^5(1+i)^3}{(1-i)^3(1+i)^3} = \frac{(1+i)^8}{2^3} = 1/8 [(1+i)^4]^2 = 1/8 (-4)^2 = 2 = 2+0i$$

$$\left| \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} \right| = |2| = 2$$

A1.6.9 Zeige:

a) Für beliebige Zahlen $z, w \in \mathbf{C}$ gilt: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$

$$\text{Bew: } |z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow$$

$$|z+w|^2 + \underbrace{|z-w|^2}_{=|z+(-w)|^2} = (|z|^2 + 2\text{Re}(z \frac{-w}{w}) + |w|^2) + (|z|^2 + 2 \underbrace{\text{Re}(z \frac{-w}{w})}_{=-\text{Re}(z\overline{w})} + \underbrace{|-w|^2}_{=|w|^2}) = 2|z|^2 + 2|w|^2 =$$

$$2(|z|^2 + |w|^2) \quad \forall z, w \in \mathbf{C}$$

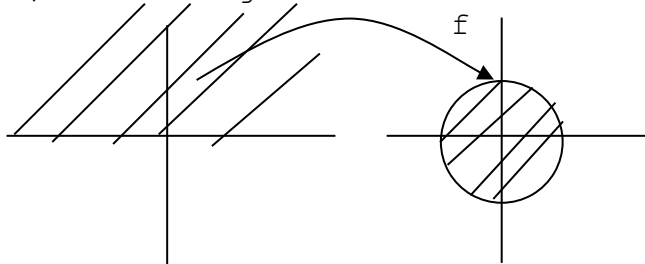
Andere Formulierung:

$$\text{Bew: } (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) + (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - w\overline{z} - z\overline{w} + w\overline{w} = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

A1.6.10

Gegeben sei die Funktion $f: \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$

Beweise, dass f bijektiv ist und bestimme die Umkehrfunktion.



Lös: $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, $E := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f: H \rightarrow E$, $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$

Nebenrechnung $w = \frac{z-i}{z+i} = \frac{z+i-2i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i} \Leftrightarrow \frac{2i}{z+i} = 1-w \Leftrightarrow$

$$\frac{z+i}{2i} = \frac{1}{1-w} \Leftrightarrow z = \frac{2i}{1-w} - i = \frac{2i-i(1-w)}{1-w} = \frac{i+iw}{1-w}$$

Definiere $g: E \rightarrow H$, $g(w) = \frac{i+iw}{1-w} = i \frac{1+w}{1-w}$.

Dann gilt:

(.) $f(H) \subseteq E$:

Es sei $z = (x+iy) \in H$, d.h. $x \in \mathbb{R}$, $y > 0 \Rightarrow$

$$|f(z)|^2 = \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2y}{x^2 + y^2 + 1 + 2y} \underset{y>0}{<} 1$$

d.h. $f(z) \in E$

(..) $g(E) \subset H$:

Es sei $|w| < 1$. Z.z. $\text{Im}(g(w)) > 0$. Es gilt:

$$\text{Im}(g(w)) = \text{Im}\left(i \frac{1+w}{1-w}\right) = \text{Im}\left(i \frac{1+w}{1-w} \frac{1-\bar{w}}{1-\bar{w}}\right) \underset{*}{=} \text{Im}\left(i \frac{1-w\bar{w}+w-\bar{w}}{|1-w|^2}\right)$$

$$= \text{Im}\left(i \frac{1-|w|^2+2i\text{Im}(w)}{|1-w|^2}\right) = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} \underset{|w|<1}{>} 0$$

* $w = u+iv$; $(1-w)(1-\bar{w}) = (1-u-iv)(1-u+iv) = (1-u)^2 + v^2 = |1-u-iv|^2 = |1-w|^2$

(...) f surjektiv, da $\forall w \in E$:

$$f(g(w)) = \frac{i \frac{1+w}{1-w} - i}{i \frac{1+w}{1-w} + i} = \frac{\frac{1+w}{1-w} - 1}{\frac{1+w}{1-w} + 1} = \frac{1+w-1-w}{1-w} = w$$

(....) f ist injektiv, da aus $f(z_1) = f(z_2)$ für $z_1, z_2 \in H$ folgt $g(f(z_1)) = g(f(z_2)) \Rightarrow z_1 = z_2$. Also ist f bijektiv mit Umkehrfunktion g

b) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existieren eine reelle Zahl $r \geq 0$ und eine komplexe Zahl w mit $|w|=1$, sodass $z=rw$ ist. Sind r und w eindeutig bestimmt?

Lös: Definition $r:=|z|$ und $w:=\begin{cases} z/r & \text{falls } r \neq 0 \\ 1 & \text{falls } r=0 \end{cases} \Rightarrow r \geq 0 \text{ und } |w|=1$,

denn $|w|=|z/r|=|z|/|r|=r/r=1$ für $r \neq 0$, sowie $z=rw$ (Existenz z)
Eindeutigkeit:

1. Fall $z \neq 0$: Sei $r_1 w_1 = z = r_2 w_2 \Rightarrow r_1 = |r_1| = |z/w_1| = |z|/|w_1| = |z|$,
analog $r_2 = |z| \Rightarrow r_1 = r_2 \neq 0 \Rightarrow r_1 w_1 = r_1 w_2 \stackrel{r_1 \neq 0}{\Rightarrow} w_1 = w_2$.

Also r und w sind hier eindeutig.

2. Fall $z=0$: r ist eindeutig, Beweis wie im 1. Fall.

w ist nicht eindeutig, z.B. $\underbrace{0}_{r} \cdot \underbrace{1}_{w_1} = \underbrace{0}_{r} \cdot \underbrace{(-1)}_{w_2}$

A1.6.11 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar und berechne deren Beträge:

a) $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14}+i^{15}}{1+i}$

b) $\left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2$

c) $(1+i)^{1999}$.

A1.6.12

Bestimme zu folgenden komplexen Zahlen jeweils Real- und Imaginärteil sowie deren Betrag:

(.) $\frac{i-1}{i+1}$

Lös: $\frac{i-1}{i+1} = \frac{i-1}{i+1} \cdot \frac{-i+1}{-i+1} = \frac{-(1-i)^2}{1^2+1^2} = \frac{-(1-2i+i^2)}{2} = i \Rightarrow$

$\operatorname{Re}\left(\frac{i-1}{i+1}\right) = 0, \operatorname{Im}\left(\frac{i-1}{i+1}\right) = 1, \left|\frac{i-1}{i+1}\right| = 1$

(..) $\frac{3-4i}{1-3i}$

Lös: $\frac{(3-4i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{3-12+13i}{1^2-3^2} = -\frac{9}{10} + \frac{13}{10}i$

$\operatorname{Re}\left(\frac{3-4i}{1-3i}\right) = -\frac{9}{10}, \operatorname{Im}\left(\frac{3-4i}{1-3i}\right) = \frac{13}{10}, \left|\frac{3-4i}{1-3i}\right| = \sqrt{\frac{3^2+4^2}{1^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

(...) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Lös: $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow |z| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2}} = 1, |z^n| = |z|^n = 1,$

$z^2 = \frac{(1+i)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1+2i-1}{2} = i, z^3 = iz = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, z^4 = i^2 = -1 \Rightarrow$

$z^{n+4} = -z^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, z^{8k} = (z^8)^k = 1 \Rightarrow z^{8k+v} = z^v.$

$\operatorname{Re}(z^{8k}) = 1, \operatorname{Im}(z^{8k}) = 0, \operatorname{Re}(z^{8k+1}) = \operatorname{Im}(z^{8k+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$

$\operatorname{Re}(z^{8k+2}) = 0, \operatorname{Im}(z^{8k+2}) = 1, \operatorname{Re}(z^{8k+3}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{Im}(z^{8k+3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und

Für $v=4, 5, 6, 7: \operatorname{Re}(z^{8k+v}) = -\operatorname{Re}(z^{8k+v-4}), \operatorname{Im}(z^{8k+v}) = -\operatorname{Im}(z^{8k+v-4})$ für $k \in \mathbb{Z}$

A1.6.13 Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 + (2-i)z^2 = 2i$

Lös: $z^4 + (2-i)z^2 = 0 \Rightarrow z^4 + 2z^2 - iz^2 - 2i = 0 \Rightarrow z^2(z^2+2) - i(z^2+2) = 0 \Rightarrow$
 $(z^2+2)(z^2-i) = 0 \Leftrightarrow z^2+2=0$ oder $z^2-i=0 \Leftrightarrow z^2=-2$ oder $z^2=i \Leftrightarrow$
 $z_{1/2} = \pm \sqrt{2} \sqrt{-1}, z_{1/2} = \pm \sqrt{2} i$ weil $i^2 = -1$ auch $(-i)^2 = -1$ oder

$z_{3/4} = \pm \sqrt{i}, z_{3/4} = \pm \sqrt{1} \frac{1+i}{\sqrt{2}}, z_{3/4} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

A1.6.14 Äquivalenzrelationen?

Ggf Partition, Äquivalenzklassen, Äquivalenzklasse zu $x=z=2$

a) $z \sim w$ genau dann, wenn $|z|=|w|$

Lös: \sim reflexiv, da $|z|=|z|$

\sim symmetrisch, da $|z|=|w| \Rightarrow |w|=|z|$

\sim transitiv, da $|z|=|w|$ & $|w|=|v| \Rightarrow |z|=|v|$

Äquivalenzrelation (da \sim Äquivalenzrelation)

Äquivalenzklasse zu 2: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=2\}$

Partition: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in \mathbb{R}\}$

b) $z \sim w$ genau dann, wenn gilt: $\exists \phi \in [0, 2\pi)$ mit $z = w * e^{j\phi}$

Lös: \sim reflexiv, da $z \stackrel{=}{=} z$
für $\phi=0$

\sim symmetrisch da $z = w * e^{j\phi} \Rightarrow w = w * e^{j\phi} * e^{-j\phi} = z * e^{-j\phi} = z * e^{j(2\pi-\phi)} = z * e^{-j\phi'}$.

\sim transitiv, da $z = w * e^{j\phi}$ & $w = v * e^{j\psi} \Rightarrow z = v * e^{j\psi} * e^{j\phi} = v * e^{j(\psi+\phi)}$

Äquivalenzrelation Äquivalenzklasse zu 2: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=2\}$

Partition: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in \mathbb{R}\}$