

S1.9.3 (1150) Cauchy-Schwarz Ungleichung

Vor: $n \in \mathbb{N}_0, a_k, b_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n$ dann

Beh: $|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^2) (\sum_{v=1}^n |b_v|^2)$ auch $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} \sqrt{\sum_{v=1}^n |b_v|^2}$

// **S1.6.2** $z, \in \mathbb{C}$ 1.) (802) $|z| = \sqrt{z \bar{z}} \quad |z| = |-z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, // // $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \bar{z}} \Leftrightarrow |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \bar{z}$

// (801) **Eigenschaften der komplexen Zahlen** //

// Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt: 3.) $\bar{\bar{z}} = z, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ mit $z_2 \neq 0, \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

Bew: Mit Lagrange Identität

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \left(\sum_{v=1}^n |b_v|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|^2 = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v |a_v \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_v|^2 \geq 0. \\ & \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \left(\sum_{v=1}^n |b_v|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|^2 \stackrel{\text{S1.6.2 1.)}}{=} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \left(\sum_{v=1}^n |b_v|^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) \left(\overline{\sum_{k=1}^n a_k b_k}\right) = \\ & \left(\sum_{v=1}^n a_v \bar{a}_v\right) \left(\sum_{\mu=1}^n b_\mu \bar{b}_\mu\right) - \left(\sum_{v=1}^n a_v b_v\right) \left(\sum_{\mu=1}^n \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu\right) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu) = \\ & \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu) + \sum_{v=1}^n \sum_{m=v+1, 1 \leq v \leq m \leq n} (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu) \stackrel{*}{=} \\ & * \left(\sum_{v=1}^n \sum_{m=v+1, 1 \leq v \leq m \leq n} (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu)\right) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=v}^n (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu) \\ & \text{da für } v=\mu=1, 2, \dots \text{ z.B. } a_1 \bar{a}_1 b_1 \bar{b}_1 - a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 = 0! \\ & \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu) + \underbrace{\sum_{m=1}^n \sum_{v=1}^m (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu)}_{\text{Vertausche } \mu \text{ mit } v} = \\ & \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v (a_v \bar{a}_v b_\mu \bar{b}_\mu - a_v b_v \bar{a}_\mu \bar{b}_\mu + a_\mu \bar{a}_\mu b_v \bar{b}_v - a_\mu b_\mu \bar{a}_v \bar{b}_v) = \\ & \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v (a_v \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_v) (\bar{a}_v b_\mu - \bar{a}_\mu b_v) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v |a_v \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_v|^2 \geq 0 \quad (\text{da } ||^2) \end{aligned}$$

Bem: Es gilt $|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \left(\sum_{v=1}^n |b_v|^2\right) \Leftrightarrow$

$$a_v \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_v = 0 \quad \forall \mu, v \text{ mit } 1 \leq \mu \leq v \leq n \Leftrightarrow$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: a_v = \lambda \bar{b}_v \quad \forall v=1, \dots, n \text{ oder } b_v = \lambda \bar{a}_v \quad \forall v=1, \dots, n$$

Bew: Aus Lagrangeidentität

$$\underbrace{|a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu|}_{\geq 0}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \left(\sum_{v=1}^n |b_v|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|^2 = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v |a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu|^2 \text{ Damit gilt:}$$

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) \left(\sum_{v=1}^n |b_v|^2\right) \Leftrightarrow \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^v \underbrace{|a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu|}_{\geq 0}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu| = 0 \quad \forall \nu, \mu: \nu \geq \mu \Leftrightarrow a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu = 0 \quad \forall \nu, \mu: \mu \leq \nu \quad \hat{U}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: a_\nu = \lambda \bar{b}_\nu \quad \forall \nu=1, \dots, n \text{ oder } \exists \lambda \in \mathbb{C}: b_\nu = \lambda \bar{a}_\nu \quad \forall \nu=1, \dots, n$$

*~~→~~ 1. Fall $b_1, \dots, b_n = 0$. Wähle $\lambda = 0 \Rightarrow b_\nu = \lambda \bar{a}_\nu \quad \forall \nu=1, \dots, n$

2. Fall $b_{v_0} \neq 0$ für ein v_0 : Wähle $\lambda = a_{v_0} / \bar{b}_{v_0} \Rightarrow$

$$a_\nu = \lambda \bar{b}_\nu \quad \forall \nu=1, \dots, n \text{ denn}$$

$$(\cdot) a_{v_0} \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_{v_0} = 0 \Rightarrow a_\mu = \frac{a_{v_0} \bar{b}_\mu}{\bar{b}_{v_0}} = \lambda \bar{b}_\mu, \quad \mu=1, \dots, v_0$$

$$(\cdot\cdot) a_\nu \bar{b}_{v_0} - a_{v_0} \bar{b}_\nu = 0 \Rightarrow a_\nu = \frac{a_{v_0} \bar{b}_\nu}{\bar{b}_{v_0}} = \lambda \bar{b}_\nu, \quad \forall \nu=v_0, \dots, n$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{falls } b_1 = \dots = b_n = 0 \\ a_{v_0} / \bar{b}_{v_0}, & \text{falls } b_{v_0} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda: \begin{cases} b_\nu = \lambda \bar{a}_\nu \quad \forall \nu \\ a_\nu = \lambda \bar{b}_\nu \quad \forall \nu \end{cases}$$

~~→~~ 1. Fall $\exists \lambda \in \mathbb{C}: a_\nu = \lambda \bar{b}_\nu \quad \forall \nu=1, \dots, n \Rightarrow$

$$a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu = \lambda b_\nu \bar{b}_\mu - \lambda \bar{b}_\mu b_\nu = 0$$

2. Fall $\exists \lambda \in \mathbb{C}: b_\nu = \lambda \bar{a}_\nu \quad \forall \nu=1, \dots, n \Rightarrow$

$$a_\nu \bar{b}_\mu - a_\mu \bar{b}_\nu = \dots = 0 \quad \forall \mu \leq \nu$$

$$\Leftrightarrow \text{bedeutet } \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \text{ linear abhängig in } \mathbb{C}^n.$$

(..) Arithmetisches-geometrisches Mittel Ungleichung:

Für $a, b \geq 0$ gilt: $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$

S1.9.3' (1151) Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k|\right) \text{ statt } \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \text{ in S1.9.3)}$$

$$\text{Vor: } n \in \mathbb{N}_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n \quad \text{Beh: } \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k)^2}}_A \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n (b_k)^2}}_B$$

// S1.8.2 (1000) $x_1, \dots, x_n \geq 0$: $G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$ und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle x_j gleich sind. //

Bew: $A=0 \Rightarrow a_k=0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, $B=0 \Rightarrow b_k=0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow A, B > 0$

$$\alpha_k := |a_k|/A, \quad \beta_k := |b_k|/B \Rightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \equiv \sum_{k=1}^n \sqrt{\alpha_k^2 \beta_k^2} \stackrel{\text{S1.8.2}}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \leq 1$$

S1.9.4 (1152) Cauchy Produkt

Es seien Polynome $P(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$ mit $a_n \neq 0$ und $Q(z) = \sum_{v=0}^m b_v z^v$ mit $b_m \neq 0$

gegeben. Dann ist $(P*Q)(z)$ ein Polynom vom $\text{grad}(P*Q) = n+m$ mit $(P*Q)(z) = \sum_{v=0}^{n+m} c_v z^v$

mit Koeffizienten $c_k = \sum_{v=0}^k a_v b_{k-v} = \sum_{v=0}^k b_v a_{k-v}$, $1 \leq k \leq n+m$, wobei wir $a_v = b_v = 0$ setzen, wo die Koeffizienten nicht definiert waren.

$$\begin{aligned} \text{Bew: } P(z) * Q(z) &= \sum_{v,\mu=0}^{n,m} a_v b_\mu z^{v+\mu} = \sum_{k=0}^{n+m} z^k \sum_{v+\mu=k} a_v b_\mu = \sum_{k=0}^{n+m} z^k \sum_{v=0}^k a_v b_{k-v} \\ &= \left(\sum_{v,\mu=0}^{n,m} = \sum_v^n \sum_{\mu=0}^m \right) \end{aligned}$$

A1.9.9 (Minkowski-Ungleichung) Zeige, dass für $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}$$

Bew: Es gilt $\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| |a_k| + \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| |b_k| \stackrel{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq}$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2} \Rightarrow \\ &\frac{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2}} = \frac{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2 \sqrt{|a_k + b_k|^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2}} = \\ &\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2} \quad \text{Beh, wenn} \\ &\sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^2} > 0 \quad (\text{Bei } = 0 \text{ Beh offensichtlich}) \end{aligned}$$

(1152) Interpolation mit Polynomen

In diesem Abschnitt seien $n+1$ verschiedene Zahlen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ (die Stützstellen) und ebenso viele (nicht unbedingt verschiedene) Werte $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{K}$ fest gegeben. Unter dem Problem der Polynominterpolation versteht man die Aufgabe, ein Polynom möglichst kleinen Grades zu finden, welches an den Stellen x_k die gegebenen Werte p_k annimmt. $P(x_k) = Q(x_k)$, $0 \leq k \leq n$, Eindeutigkeit klar.

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad P(x_k) = p_k, \quad k=0, \dots, n \quad \underbrace{L_m(x_m)}_{=1}$$

$$L_k(x) = \prod_{v=0, v \neq k}^n \frac{x - x_v}{x_k - x_v} \quad (\text{Pol nten Grades})$$

$L_k(x_k) = 1$, $L_k(x_\mu) = 0$, $\mu \neq k$, 1 Faktor 0 für $\mu = k$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n p_k L_k(x) \Rightarrow P(x_\mu) = \sum_{k=0}^n p_k L_k(x_\mu) = p_\mu \underbrace{L_m(x_m)}_{=1}$$

S1.9.5 (1153) Hauptsatz der Polynominterpolation

Zu $n+1$ verschiedenen Stützstellen x_0, \dots, x_n und beliebigen Werten p_0, \dots, p_n gibt es genau ein $P \in \mathbf{K}_n[x]$ mit $P(x_k) = p_k$, für $0 \leq k \leq n$.

Bew: Setze $L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$, $0 \leq k \leq n$. Dann ist offenbar $L_k \in \mathbf{K}_n[x]$

und $L_k(x_v) = \delta_{kv} = \begin{cases} 1 & (k=v) \\ 0 & (k \neq v) \end{cases}$ Daraus folgt, daß $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k L_k(x)$

ein Polynom mit den gewünschten Eigenschaften ist. Die Eindeutigkeit folgt mit Identitätssatz S1.9.2.

D1.9.2 (1153) Die Formel $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k L_k(x)$ heißt Lagrange Darstellung

des Interpolationspolynoms. Sie ist für die konkrete Berechnung weniger geeignet als die im Folgenden behandelte Newtonsche Darstellung.

D1.9.3 (1153) Interpolationspolynom Newtonsche Darstellung

Lösung

$$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1}),$$

$$y_k = N(x_k) \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n \quad \Leftrightarrow \quad x_k - x_k = 0$$

$$y_0 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

⋮

$$y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})$$

A1.9.10 Seien x_k und p_k wie oben, und sei P das zugehörige Interpolationspolynom. Zeige: Es gibt eindeutig bestimmte

$$\text{Zahlen } b_k \in \mathbf{K} \text{ so, daß für alle } x \in \mathbf{K} \text{ gilt } P(x) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j),$$

wobei die übliche Konvention zu beachten ist, daß ein leeres Produkt den Wert 1 haben soll. Diskutiere insbesondere, wieweit sich die b_k (nicht) ändern, wenn man eine weitere Stützstelle hinzunimmt. Diese Darstellung heißt Newtonsche Darstellung des Interpolationspolynoms.

Lösung:

$$p_0 = P(x_0) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{j=0}^{k-1} (x_0 - x_j) = b_0 \prod_{j=0}^{0-1} (x_0 - x_0) = b_0$$

$$p_1 = P(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) \Rightarrow \frac{p_1 - p_0}{x_1 - x_0} = b_1$$

$$p_\mu = \sum_{k=0}^{\mu} b_k \prod_{j=1}^{\mu-1} (x_\mu - x_k) = b_\mu \prod_{j=1}^{\mu-1} (x_\mu - x_j) + \dots$$

A1.9.11 Berechne das Interpolationspolynom zu den Daten

$$x_0=0, x_1=-1, x_2=2, \text{ sowie } p_0=1, p_1=2, p_2=1.$$

Lös: $P(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$

$$p_0 = P(x_0) = P(0) = 1 = b_0 + b_1 \underbrace{(0-0)}_0 + b_2 \cdot 0 \Rightarrow b_0 = 1$$

$$p_1 = P(x_1) = P(-1) = 2 = \underbrace{1}_{b_0} + b_1 \underbrace{(-1-0)}_x + b_2 \underbrace{(-1-0)}_x \underbrace{(-1-(-1))}_{x_0} \Rightarrow 2 = 1 - b_1 \Rightarrow b_1 = -1$$

$$p_2 = 1 = P(2) = 1 - (2-0)b_2(2-0)(2-(-1)) \Rightarrow 1 = -1 + 6b_2, b_2 = 1/3$$

A1.9.12 Finde das Interpolationspolynom vom Grade ≤ 3 zu den Stützstellen $x_0=0, x_1=1, x_2=-1, x_3=2$ und den Werten $P_0=P_1=0, P_2=P_3=1$

Lös: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

$$a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \qquad 2a_2 = 1, \quad a_2 = 1/2, \quad a_1 + 1/2 + a_3 = 0$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 = 1 \qquad 2a_1 + 2 + 8a_3 = 1$$

$$2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 1 \qquad 2a_1 + 1 + 2a_3 = 0$$

$$a_1 = -1/2 + 1/6 = -1/3 \qquad 1 + 6a_3 = 1, \quad a_3 = 0$$

Andere Formulierung

$$P(x) = \sum_{k=0}^3 p_k L_k(x)$$

$$L_2(x) = \prod_{j=2}^3 \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$

$$L_3(x) = \prod_{j=3}^3 \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \frac{x^3-x}{6}$$

$$P(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{x^3 - x}{6} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

A1.9.13 Bestimme die Nullstellen der Polynome $P(x)$ als Elemente von $\mathbf{R}[x]$ bzw $\mathbf{C}[x]$:

a) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

Lös: Nullstellen bei 0 und 1... = $x(x-1)(x^2-x-6) = x(x-1)(x-3)(x+2)$

4 reelle Nullstellen. Gleiche Nullstellen in $\mathbf{C}[x]$.

b) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6$

Lös: ...Nullstellen -1, 2. ... = $(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) =$

$(x+1)(x-2)(x-1)^2 + 2$... 2 reelle Nullstellen, in \mathbf{C} 2 weitere

komplexe Nullstellen. $x_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{12-4}}{2} = 1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}$

S1.9.6(1155) Wurzelfunktion

$\forall n \in \mathbb{N}$ bildet die Abb $x \mapsto x^n$ das Intervall $[0, \infty)$ bijektiv auf sich selbst ab $\Leftrightarrow \exists \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

// **S1.3.1** 5.) (501)5) $x > 0 \wedge A_x = \{a > 0 : a^2 \leq x\}$. //

// Falls $\zeta = \sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2 = x$. //

// **S1.3.2** (513) Vor: Sei $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$. Beh: \exists genau ein $y: \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^2 = x$ //

Bew: Injektiv aus Monotonie. Surjektiv? Nimmt Fkt jeden Wert an?

Für $n=1$ ist nichts zu zeigen, deshalb sei jetzt $n \geq 2$ angenommen.

Injektiv: Da wir schon gezeigt haben, daß die Abb streng monoton wachsend ist, folgt sofort die Injektivität.

Surjektiv: Um die Surjektivität zu zeigen, sei ein $y_0 \in [0, \infty)$ gegeben. Wegen $0^n = 0$ können wir annehmen, daß $y_0 > 0$ ist. Die Menge $M = \{x : x^n \leq y_0\}$ ist sicher nicht leer und nach oben beschränkt (entweder durch 1 oder y_0). Aus dem Vollständigkeitsaxiom schließen wir, daß M ein Supremum x_0 besitzt, und wir wollen $x_0^n = y_0$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ (klein) gegeben.

Methode: x_0^n kann nicht kleiner und nicht größer als y_0 sein.

1. x_0^n kann nicht kleiner als y_0 sein:

Es muß $(x_0 + \varepsilon)^n > y_0$ sein, denn sonst wäre x_0 keine obere Schranke für M . Aber wir haben für $\varepsilon \leq 1$:

$$(x_0 + \varepsilon)^n = x_0^n + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} x_0^{n-m} \varepsilon^m \leq x_0^n + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} x_0^{n-m} \varepsilon = x_0^n + \varepsilon \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} x_0^{n-m} =$$

$$x_0^n + \varepsilon \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x_0^{n-m} - x_0^n \right) =$$

$$x_0^n + \varepsilon [(x_0 + 1)^n - x_0^n].$$

Wäre jetzt $x_0^n < y_0$, so könnten wir ε so klein wählen, daß auch $(x_0 + \varepsilon)^n < y_0$ wäre, was nicht sein kann $\Rightarrow (x_0 + \varepsilon)^n \geq y_0$

2. x_0^n kann nicht größer als y_0 sein:

Andererseits ist nach

S1.5.6 (713) $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx, = \Leftrightarrow x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$

$$(x_0 - \varepsilon)^n = x_0^n (1 - n\varepsilon/x_0)^n \underset{S1.5.6}{\geq} x_0^n (1 - n\varepsilon/x_0) = x_0^n - n\varepsilon x_0^{n-1}.$$

Daraus sehen wir, daß bei Annahme von $x_0^n > y_0$ ein $\varepsilon > 0$ existieren würde, für welches $(x_0 - \varepsilon)^n > y_0$ wäre, was der Tatsache widerspricht, daß x_0 kleinste obere Schranke für M ist. Deshalb ist in der Tat $x_0^n = y_0$.

Andere Formulierung:

$x^p=a$ $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ hat genau eine Lösung $x=a^{1/p}=\sqrt[p]{a} \geq 0$.

//D1.2.1 (400) $(K, +, *)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K . $R:=<, \text{Anordnungsaxiome}://$

// (O3) $a < b$ und $0 < c \Rightarrow a * c < b * c$ //

//S1.5.6 (715) $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx, = \Leftrightarrow x=0$ oder $n=0$ oder $n=1//$

//S1.7.4 (906) 6.) $\forall a, b, z \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}_0: (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^{n-k} a^k //$

#Bew: $a < b \wedge a > 0 \Leftrightarrow a * a < b * a < b * b \Leftrightarrow a^n < b^n$

$n=1: x^1=a=a^{1/1}=\sqrt[1]{a}=a$
 # $n>1: M:=\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0, y^p \leq a\}, M \neq \emptyset$, da $0 \in M$ und beschränkt wie folgt.
 # $y^p < a < 1+pa < (1+\frac{a}{n})^p \Rightarrow y < 1+a \Rightarrow M$ beschränkt $\Rightarrow \exists \xi := \sup M$.

Ann $\xi^p < a: (\xi+1/n)^p \stackrel{S1.7.4}{=} \xi^p + \binom{p}{1} \xi^{p-1} \frac{1}{n} + \binom{p}{2} \xi^{p-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{p}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^p < a$

$\xi^p + \frac{\alpha}{n} < a \forall \alpha := \binom{p}{1} \xi^{p-1} + \binom{p}{2} \xi^{p-2} + \dots + \binom{p}{p} \xi^{p-1} > 0.$

$\xi^p + \frac{\alpha}{n} < a \forall n \geq n_0, \frac{1}{n_0} < \frac{a-\xi^p}{\alpha}$.

$\xi+1/n > \xi \vee (\xi+1/n)^p < a \Rightarrow$ Widerspruch zu $\xi := \sup M$

$\xi^p > a: (\xi - \frac{1}{n})^p = \xi^p (1 - \frac{1}{n\xi})^p > \xi^p (1 - \frac{p}{n\xi}),$ falls $-\frac{1}{n\xi} > -1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi$.

$\xi^p (1 - \frac{p}{n\xi}) > a \forall n \geq n_0, \frac{1}{n_0} < \frac{\xi(\xi^p - a)}{p\xi^p} := \eta$

(aus $1 - \frac{p}{n\xi} > \frac{a}{\xi^p} \Rightarrow -\frac{p}{n\xi} > \frac{a-\xi^p}{\xi^p} \Rightarrow \frac{p}{n\xi} < \frac{\xi^p - a}{\xi^p} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\xi(\xi^p - a)}{p\xi^p}$)

Für $\frac{1}{n} < \xi \wedge \frac{1}{n} < \eta$ ist $0 < \xi - \frac{1}{n} < \xi \vee (\xi - \frac{1}{n})^p > a$

$0 < \xi - \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow \exists y_0 \in M: y_0 > \xi - \frac{1}{n} \Rightarrow y_0^p > (\xi - \frac{1}{n})^p > a \Rightarrow y_0 \notin M \Rightarrow$
 Widerspruch zu $y_0 \in M \Rightarrow$

$\xi^p = a \Rightarrow x^p = a$ $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ hat genau eine Lösung $x=a^{1/p}=\sqrt[p]{a} \geq 0$

#Bem: 1.) Aus Umkehrfunktion: $(a^{1/p})^p = (\sqrt[p]{a})^p = a^{1 \cdot p} = a^1 = a$

2.) $a, b > 0, r = \frac{p}{q}, s = \frac{l}{m} \in \mathbb{Q}$:

a.) $a^r a^s = a^{r+s}$ b) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ c) $(a^r)^s = a^{rs}$ d) $a^r b^r = (ab)^r$ e) $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Bew: d) $x = a^{\frac{p}{q}}, y = b^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow x^q = a^p, y^q = b^p \Rightarrow x^q * y^q = (xy)^q = (ab)^p \Leftrightarrow$

$a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}} = a^r b^r = xy = (ab)^{\frac{p}{q}} = (ab)^r.$

a) $x = a^{r+s} = a^{\frac{p}{q} + \frac{l}{m}} = a^{\frac{pm+ql}{qm}} \Leftrightarrow x^{qm} = a^{pm+ql} = a^{pm} a^{ql} \Leftrightarrow x = ((a^{pm}) (a^{ql}))^{\frac{1}{qm}} =$

$((a^{pm})^{\frac{1}{qm}} (a^{ql})^{\frac{1}{qm}}) = a^{\frac{pm}{qm}} a^{\frac{ql}{qm}} = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{l}{m}} = a^{r+s}$

#S1.9.7 (1158) $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, r \in \mathbb{Q}$. (.) $r > 0, a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$ (..) $r < 0, a < b \Leftrightarrow a^r > b^r$

// (RR<) (400) 7.) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ //

#Bew: (.) $p, q \in \mathbb{N}, a < b \stackrel{\text{S1.9.7}}{\Leftrightarrow} a^{1/q} < b^{1/q} \stackrel{\text{S1.9.7}}{\Leftrightarrow} a^{p/q} < b^{p/q}$.

(..) $r < 0, -r > 0: a < b \stackrel{\text{S1.9.7}}{\Leftrightarrow} a^{-r} < b^{-r} \stackrel{\text{RR< 7.)}}{\Leftrightarrow} a^r > b^r$ ("Grobform")

#S1.9.8 (1158) $a \in \mathbb{R}, a > 0, r, s \in \mathbb{Q}, r < s: a^r < a^s \Leftrightarrow a > 1, a^r > a^s \Leftrightarrow a < 1$.

#Bew: $s - r > 0, 1^{s-r} = 1. a > 1 \stackrel{\text{S1.9.7}}{\Leftrightarrow} a^{s-r} > 1 \quad \& \quad a < 1 \stackrel{\text{S1.9.7}}{\Leftrightarrow} a^{s-r} < 1 \Rightarrow$

$a > 1 \Leftrightarrow \frac{a^s}{a^r} > 1 \Leftrightarrow a^s > a^r \quad \& \quad a < 1 \Leftrightarrow \frac{a^s}{a^r} < 1 \Leftrightarrow a^s < a^r$

D1.9.4 (1158)

(.) Sei eine natürliche Zahl $n \geq 2$ gegeben. Nach Vorstehendem schließen wir, dass die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^n$ auf $[0, \infty)$ definiert ist. Wir nennen sie die nte Wurzelfunktion und schreiben auch $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ für die nte Wurzel einer Zahl $x \geq 0$. Diese Definition stimmt für $n=2$ mit der früheren Quadratwurzel überein.

(..) $a > 0, r = p/q, p, q \in \mathbb{N}, a^r := \sqrt[q]{a^p}, a^{-r} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Bem: 1.) Def (..) eindeutig, d.h. a^r ändert seinen Wert nicht, wenn $r = p/q$ durch Erweitern oder Kürzen zu anderen natürlichen Zahlen übergeht

A1.10.9 Zeige, dass die Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden Funktion ebenfalls streng monoton wachsend ist,

A1.10.10 Finde heraus, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Abb $x \mapsto x^n$ auf ganz \mathbb{R} bijektiv ist, sodass sich die nte Wurzelfunktion auch für negative x definieren lässt.