

# Analysis

## (1) 0 Vorbemerkungen

### (1) 0.0 Abkürzungen, Vorbemerkungen, Beweismethoden

Abkürzungen, soweit sie sich nicht aus dem Zusammenhang erklären:

$\forall$  : für alle                     $\exists$ : es existiert                     $\exists_1$ : es existiert genau ein

Vor.: Voraussetzung                    Beh.: Behauptung                    Lös:Lösungen  
Bew : Beweis                    Bez: Bezeichnung                    baf: beliebig, aber fest  
Dx.x.x: Definitionx.x.x  
Sx.x.x:Satz x.x.x                    (xxxx): Seite xxxx

$\wedge$  logische UND Verknüpfung

$\vee$  logische ODER Verknüpfung (evt enthält der Text noch unkorrigierte Verwechslungen von  $\wedge$  und  $\vee$ , sollte aus dem Kontext ersichtlich sein)

$$\sum_{k=1}^n k=1+2+\dots+n, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k=a_0+a_1+\dots$$

#....#:eigene Überlegungen

//kursiv// : kursiver Inhalt zum Ersparen des Zurückblätterns! Falls doch: Seitennr in Klammern.

Fast alle Lemmas oder Hilfssätze habe ich als Sätze bezeichnet. Das wird evt nochmals überarbeitet und rückgängig gemacht.

Manche Aufgaben habe ich ohne Lösungen aufgenommen.

Mengen in Großbuchstaben K,R,M..

$b_x$  bedeutet meist, dass b von x abhängt

----- Hinweise auf Strukturen in den Gedankengängen

$<$ : 5 ist kleiner als 10     $>$ : 10 ist größer als 5

Bsp  $x \leq 5$ : x ist kleiner als 5 oder x ist gleich 5

Bsp  $x \geq 6$ : x ist größer als 5 oder x ist gleich 5

$6|24$ : 6 ist Teiler von 24, d.h. 24 geteilt durch 6 ist 4 Rest 0

$\neg B$  eine Aussage B ist nicht wahr,

Bsp A: Kuh ist ein Säugetier, B: Kuh gibt Milch

$\neg B$ : Kuh gibt keine Milch,  $\neg A$ : Kuh ist kein Säugetier

A  $\Rightarrow$  B :Aus A folgt B, oder A impliziert B, oder

Aussage    Aussage

A ist hinreichend für B, oder B ist notwendig für A  
(denn, wenn B nicht gilt, dann kann A auch nicht gelten)

A  $\Leftrightarrow$  B : A ist äquivalent zu B, A gilt genau dann, wenn B

Aussage    Aussage

gilt, A ist notwendig und hinreichend für B.

$A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$

Beweismethoden

Gegeben seien 2 Aussagen A und B. Es soll die Implikation  $A \Rightarrow B$ , d.h. ein Satz mit Vor. A und Beh. B bewiesen werden.

Schema: Satz Vor. A, Beh. B, Beweis.

a) Direkter Beweis

Man leitet aus A, mittels früher bewiesener wahrer Aussagen, B direkt aus A her.

Definitionen und Sätze für Schritte zu folgenden Bsp werden erst später behandelt. Die Schritte sind aber trotzdem aus „Schulwissen“ einleuchtend. Es kommt hier nur auf das Verstehen der Beweismethoden an.

b) Indirekter Beweis

Man leitet aus der Negation von B die Negation von A her:

$\neg B \Rightarrow \neg A$  ist logisch-äquivalent mit  $A \Rightarrow B$ .

c) Widerspruchsbeweis

Ausgehend von den Aussagen A und  $\neg B$  leitet man einen Widerspruch zu bereits bewiesenen (wahren!) Aussagen her.

Also kann  $\neg B$  nicht wahr sein, d.h. B ist wahr (tertium non datur)

B:  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$  wie bei a), b), c)

e) Man zeige über Zwischenaussagen  $A_1, \dots, A_n$  (die wahr sind!)

$A \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_n \Leftrightarrow B$

# Bem:  $(A \Rightarrow B \wedge \neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$

f) Beweis durch Induktion siehe P1.5

## 0.1 Mengen (3)

### D0.1.1 (3)

Zusammenfassung M, von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Bem: bestimmt  $\rightarrow$  für jedes Objekt muss entscheidbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht  
wohlunterschieden  $\rightarrow$  jedes Objekt kommt höchstens 1x in M vor

Obige Definition ist unbefriedigend, wird aber im folgenden benutzt, da eine genauere axiomatische Begründung der Mengenlehre den Rahmen sprengen würde.

Bez:  $x \in M \Leftrightarrow$  Objekt x ist Element von M

$x \notin M \Leftrightarrow$  Objekt x ist kein (nicht) Element von M.

Niemals gilt  $M \in M$

### D0.1.2 (4)

$M_1$  und  $M_2$  heißen gleich,  $M_1 = M_2 : \Leftrightarrow$

Beide Mengen bestehen aus den gleichen Objekten, oder  $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$   
( $\Leftrightarrow$  genau dann, wenn)

Bem: Eine Menge kann definiert sein durch

- 1.) eine Aufzählung ihrer Elemente, z.B.  $M = \{a, b, c, \dots, z\}$  oder
- 2.) durch Charakterisierung, bzw Beschreibung ihrer Elemente  $x$  durch eine Eigenschaft  $E(x)$ :  
 $M = \{x | E(x)\} = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft } E(x)\}$

Im folgenden betrachten wir nur Mengen, deren Elemente mathematische Objekte sind, die jeweils zu einer festen Grundmenge gehören.

#### D0.1.3 (4)

1.) Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge  $\emptyset$

2.) Eine Menge  $M_1$  ist Teilmenge einer Menge  $M_2$ :  $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in M_1 \text{ gilt } x \in M_2 \text{ oder } \forall x \in M_1: x \in M_2 \text{ oder } x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$$

$$\text{Bez: } M_1 \subset M_2 \text{ oder } M_2 \supset M_1$$

3.)  $M_1$  heißt echte Teilmenge von  $M_2$ :  $\Leftrightarrow M_1 \subset M_2$  und  $M_1 \neq M_2$

$$\text{Bez: } M \subsetneq M_2.$$

Bem: 1.) Für 2 Mengen  $M_1, M_2$  gilt  $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$  und  $M_2 \subset M_1$

2.) Für 2 beliebige Mengen  $M_1$  und  $M_2$  braucht nicht  
 $M_1 \subset M_2$  oder  $M_2 \subset M_1$  zu gelten.

Folgerungen: Für Mengen  $M_1, M_2, M_3$  gilt

1.)  $M_1 \subset M_2$  und  $M_2 \subset M_3$  kurz  $M_1 \subset M_2 \subset M_3$  Transitivität  $\Rightarrow M_1 \subset M_3$

2.)  $M_1 \subset M_1 \Rightarrow$  Reflexivität

3.)  $\emptyset \subset M_1$

#### (4) D0.1.4 (4)

Seien  $M_1, M_2$  Mengen, dann heißt

1.)  $M_1 \cup M_2 := \{x | x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$  die Vereinigung von  $M_1$  und  $M_2$

Allgemeiner: Sind  $A_j$ , für  $j \in J$ , beliebig viele Mengen, so ist deren Vereinigung  $\bigcup_{j \in J} A_j = \{x : \exists j \in J, \text{ mit } x \in A_j\}$

( $J$  Indexmenge entsprechend der Zahl der Mengen)

2.)  $M_1 \cap M_2 := \{x | x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$  der Durchschnitt von  $M_1$  und  $M_2$

Allgemeiner: Sind  $A_j$ , für  $j \in J$ , beliebig viele Mengen, so ist deren Durchschnitt  $\bigcap_{j \in J} A_j = \{x : x \in A_j \ \forall j \in J\}$

3.)  $M_1 \setminus M_2 := \{x | x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$  die Differenz von  $M_1$  und  $M_2$  oder das Komplement von  $M_2$  relativ zu  $M_1$

4.)  $M_1$  und  $M_2$  disjunkt:  $\Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = \emptyset$

#### D0.1.5 (5)

Ist  $M_1 \subset M_2$ , so heißt  $M_1^C := M_2 \setminus M_1$  das Komplement von  $M_1$  in  $M_2$  oder von  $M_1$  bzgl  $M_2$  (Ober-, Grundmenge  $M_2$  muß bekannt sein)

#### D0.1.6 (5)

Ist  $M$  eine Menge, so heißt  $P(M) := \{A | A \subset M\}$  die Potenzmenge von  $M$   
(= eine Menge von Mengen oder Menge aller Teilmengen von  $M$ , d.h. Elemente von  $P(M)$  sind Teilmengen von  $M$ )

Bsp: 1.)  $M = \{5, 6, 7\}$

$$P_{(M)} = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\} \text{ Anzahl } 8 = 2^3$$

2.)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $P_{(A)} = \{A_j : 1 \leq j \leq 8\}$  mit  $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1\}, A_3 = \{2\},$

$$A_4 = \{3\}, A_5 = \{1, 2\}, A_6 = \{1, 3\}, A_7 = \{2, 3\}, A_8 = \{1, 2, 3\}$$

$$3.) M = \emptyset, P(\emptyset) = \{\emptyset\}, P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \underbrace{P(\emptyset)}\}$$

$$P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \underbrace{P(\emptyset)}_{P(P(\emptyset))}, \underbrace{P(P(\emptyset))}_{P(P(\emptyset))}, \underbrace{P(P(\emptyset))}_{P(P(\emptyset))}\}$$

### D0.1.7(6)

Sind  $M_1$  und  $M_2$  Mengen, so heißt die Menge  $M_1 * M_2 := \{(x, y) \mid x \in M_1 \text{ und } y \in M_2\}$  das kartesische Produkt von  $M_1$  mit  $M_2$  (=Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  aus  $x \in M_1, y \in M_2$ )

Beachte: Bei den Paaren kommt es auf die Reihenfolge an.  $(a, b) \neq (b, a)$ , außer  $a = b$

$$\text{Allgemein: } \prod_{i=1}^n A_i = A_1 * A_2 * \dots * A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{Falls ein } A_i = \emptyset \Rightarrow \prod_{i=1}^n A_i = \emptyset$$

Sind alle  $A_i$  gleich, ist das n-fache kartesische Produkt  $A^n := \prod_{i=1}^n A$

Bem: 1.)  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M_1 \times M_2$ . Dann gilt  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) : \Leftrightarrow x_1 = x_2$  und  $y_1 = y_2$

2.)  $(x, y) \neq (y, x)$  für  $x, y \in M_1 \times M_2, x \neq y$

### Rechenregeln, Folgerungen zu Mengen (9)

1.) Für jeweils beliebige Mengen  $M_1, M_2, M_3$  gelten die

a) Kommutativgesetze

$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1 \qquad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

b) Assoziativgesetze

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3), \quad (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$$

c) Distributivgesetze

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3), \quad M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

2.) Für beliebige Mengen  $M_1, M_2$  gilt

$$a) M_1 \cup M_2 = M_2 \Rightarrow M_1 \subset M_2$$

$$b) M_1 \cup \emptyset = M_1, \quad M_1 \cap \emptyset = \emptyset$$

$$c) M_1 \subset M_2 \Rightarrow (M_1^c)^c = M_1$$

$$d) (M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c \qquad (M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c \quad \text{Morgansche Regeln}$$

Allgemeiner:

Sind  $A_j$ , für  $j \in J$ , eine beliebige Anzahl von Teilmengen einer festen Grundmenge  $X$ , so gelten:

$$X / (\cup_{j \in J} A_j) = \cap_{j \in J} (X \setminus A_j), \quad X \setminus (\cap_{j \in J} A_j) = \cup_{j \in J} A_j (X \setminus A_j)$$

Das Komplement einer Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplemente.

$$e) M_1 \subset M_2 (\subset M_3) \Leftrightarrow M_2^c \subset M_1^c$$

Bem: Dualitätsprinzip. Bei Komplementbildung finden folgende Vertauschungen statt:

**D0.1.8(10)** Sei  $S \neq \emptyset$  ein System von Mengen (= Menge von Mengen), dann heißt

$$1.) \text{ die Menge } \cup_{M \in S} M := \{x \mid \exists M \in S: x \in M\}$$

die Vereinigung aller Mengen aus  $S$

2.) die Menge  $\bigcap_{M \in S} M := \{x \mid \forall M \in S: x \in M\}$

der Durchschnitt aller Mengen aus S

3.) das System S (paarweise) disjunkt:  $\Leftrightarrow$

$$\forall M_1, M_2 \in S, M_1 \neq M_2 : M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

Bem: Die Morgan'schen Regeln gelten für beliebige  $\cup \cap$ , d.h., falls für ein System von Mengen  $S \neq \emptyset$  und eine Menge  $\overline{M}$  gilt:  $M \subset \overline{M}$ :

$$\forall M \in S \quad (.) \quad \left( \bigcup_{M \in S} M \right)^C = \bigcap_{M \in S} M^C, \quad (..) \quad \left( \bigcap_{M \in S} M \right)^C = \bigcup_{M \in S} M^C$$

$$\text{RR 2c) } M_1 \subset M_2 \Rightarrow (M_1^C)^C = M_1$$

$$\text{Bem: } S = \emptyset : \bigcap_{M \in S} M := \emptyset$$

## 0.2 (100) Relationen, Funktionen

**D0.2.1** (100) Seien  $X, Y$  Mengen  $\neq \emptyset$ . Jede Teilmenge  $R \subset X \times Y$  heißt eine Relation der Menge  $X$  zur Menge  $Y$

Bez:  $x \sim y$  oder  $xRy: \Leftrightarrow (x, y) \in R$   $x$  steht in Relation zu  $y$  bzw  
 $xRy: \Leftrightarrow (x, y) \notin R$  (manchmal nur  $x \sim y$ )  
 Falls  $X=Y$  heißt  $R \subset X \times X = X^2$  Relation in oder auf  $X$

**D0.2.2** (100)

Schreibweise:  $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \sim y$ , auch wenn  $R \subset X \times X$

- 1.) Eine Relation  $R$  auf  $X$  (d.h.  $R \subset X \times X$ ) heißt,
  - reflexiv:  $\Leftrightarrow \forall x \in X$  gilt  $xRx$  (d.h.  $(x, x) \in R$ ) **D0.2.3 (105)**
  - symmetrisch:  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$  mit  $xRy \Rightarrow yRx$   
(d.h.  $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ )
  - antisymmetrisch:  $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$  mit  $xRy$  und  $yRx \Rightarrow x=y$   
(d.h.  $(x, y) \in R$  und  $(y, x) \in R \Rightarrow x=y$ )
  - transitiv:  $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X$  mit  $xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$   
(d.h.  $(x, y) \in R$  und  $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ )
- 2.) Eine Relation  $R$  auf  $X$  heißt Äquivalenzrelation (ÄR):  $\Leftrightarrow$   
 $R$  ist reflexiv, symmetrisch und transitiv
- 3.) Ist  $R$  eine ÄR auf  $X$ , so heißt für jedes  $x \in X$  die Menge  
 $x|_R := \{x' \in X \mid x \sim x'\} = \{x \in X \mid (x, x') \in R\}$  eine Äquivalenzklasse (ÄK) von  $x$   
 bzgl  $R$ . Jedes  $x' \in x|_R$  heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

**S0.2.1** (103)

Vor: Sei  $X$  beliebige Menge  $\neq \emptyset$ , dann gilt

- 1.) Ist  $R$  eine ÄR in/auf  $X$ , so ist die Menge aller ÄK von  $R$   
 eine Partition von  $X$  (d.h.  $X$  ist die Vereinigung von  
 paarweise disjunkten ÄK  $\neq \emptyset$ , oder  $X$  ist in disjunkte ÄK  $\neq \emptyset$   
 zerlegt:  $X = \bigcup_{x \in X} (x|_R)$ ).

Andere Formulierung:

Ist  $R$  eine ÄR auf  $X$ , dann bildet die Menge aller ÄK eine Partition auf  $X$ , d.h.  $X$  ist in paarweise disjunkte ÄK  $\neq \emptyset$  zerlegt, sodass 2 Elemente aus  $X$  genau dann äquivalent sind, wenn sie in derselben Teilmenge liegen.

Andere Formulierung:

Vor:  $\sim$  eine ÄR auf  $X$ ,  $x, y \in X$

Ausage:  $x|_R = y|_R$  oder  $x|_R \cap y|_R = \emptyset \Leftrightarrow$   
 $X$  ist die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklasse

- 2.) Ist  $\bigcup_{M \in S} M$  eine Partition von  $X$  mit  $M \neq \emptyset$  und definiert man  $\bigcup_{M \in S}$   
 eine Relation (zunächst keine ÄR) auf  $X$  folgendermaßen:  
 $xRy \Leftrightarrow \exists M \in S$  mit  $x, y \in M$ , so ist  $R$  eine ÄR auf  $X$  und  $S \subset (\mathcal{P}(X))$  ist  
 genau die Menge aller ÄK bzgl  $R$

Andere Formulierung:

Umkehrung von 1.): Durch jede Partition von  $X$  wird eine ÄK  
 definiert, wobei  $x \sim y$ , wenn  $x$  und  $y$  in derselben Teilmenge der  
 Partition liegen.

dann ist insbesondere  $y \in A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow x, z \in A_1 \Rightarrow x \sim z$

**D0.2.3**(106)

1.) Seien  $X, Y$  Mengen  $\neq \emptyset$ . Eine (eindeutige) Abbildung oder Funktion  $f$  von  $X$  in  $Y$  oder von  $X$  nach  $Y$  ist eine Relation von  $X$  zu  $Y$  ( $f \subset X \times Y$ ) mit der Eigenschaft:

$$\forall x \in X: \exists \text{ genau ein } (\exists_1) y \in Y \text{ mit } (x, y) \in f$$

Bez:  $f: X \rightarrow Y, y = f(x), x \mapsto y = f(x)$  = das Bild von  $x$  unter der Abb  $f$ :

$$X^Y := \{f \mid f: X \rightarrow Y\} = \text{Menge aller Abb. } f: X \rightarrow Y$$

$R$

Wir schreiben für das  $y$  mit  $x \sim y: y = f(x)$  und  $f: X \rightarrow Y$  mit  $x \mapsto y = f(x)$  für die Abbildung, kurz  $f$  oder  $f()$ .

2.) Zwei Funktionen  $f_i: X_i \rightarrow Y_i$   $i=1, 2$  heißen gleich:  $\Leftrightarrow$

$$X_1 = X_2 \text{ und } Y_1 = Y_2 \text{ und } f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in X_1$$

$$\text{Bez: } f_1 = f_2 \text{ oder } f_1 = f_2 \text{ auf } X_1 (= X_2)$$

$$\text{Bem: Gilt } f_1 = f_2 \text{ so ist } G(f_1) = G(f_2) \text{ (G...Graph).}$$

3.) Bei geg Funktion  $f: X \rightarrow Y$  heißt

a)  $X$  der Definitionsbereich von  $f$

b)  $Y$  der Wertebereich oder Wertevorrat oder Bildbereich von  $f$

$$\text{c) } G(f) := \{x, f(x) \mid x \in X\} = f \subset X \times Y \text{ der Graph von } f \text{ oder}$$

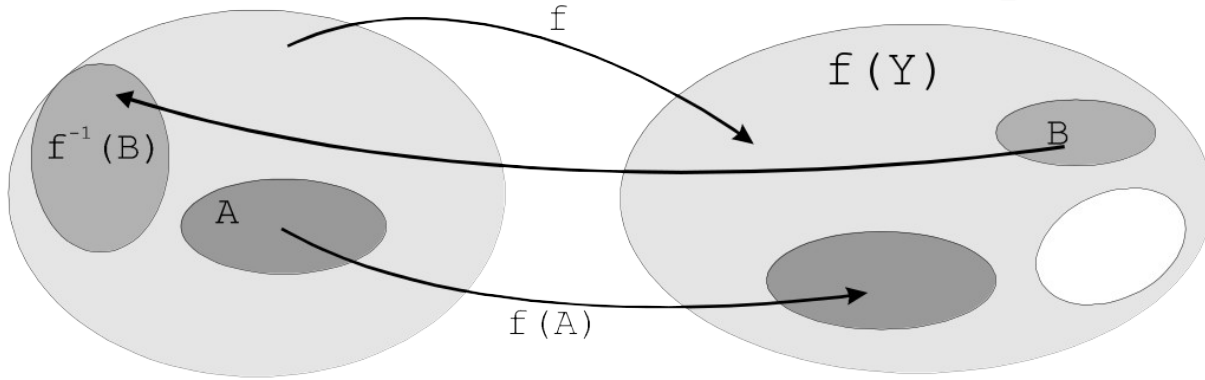
$$R = \text{graph } f = \{x, f(x) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

$$\text{d) } f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \text{ das Bild der Teilmenge } A \subset X \text{ unter } f.$$

$$(\text{=} \{y \in Y \mid \exists x \in A: y = f(x)\}), \quad (x, y) \in f.$$

$$f(X) : \text{Wertemenge von } f = \text{Im}(f), \quad f \subset Y$$

e)  $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ , d.h. das Urbild der Teilmenge  $B \subset Y$

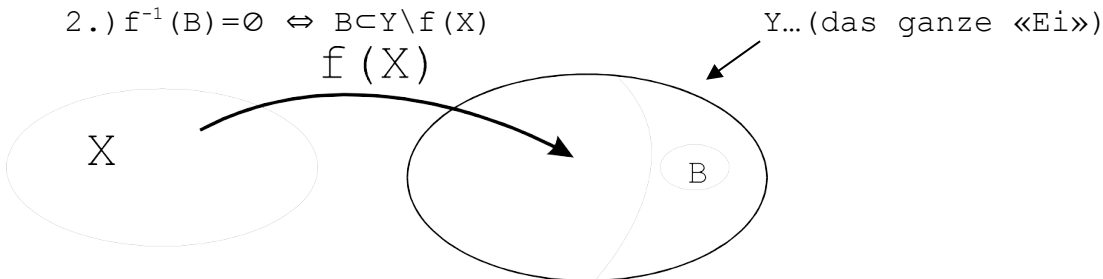


Für  $A \subset X$  bzw.  $B \subset Y$  bilden wir die Menge aller Urbilder bzw. Bilder von Elementen aus  $A$  bzw.  $B$ , d.h.  $f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ ,  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$   
 Falls  $B$  nur ein Element hat, etwa  $b$ , schreiben wir auch  $f^{-1}(b)$  anstatt  $f^{-1}(B)$ . Beachte aber, daß  $f^{-1}(b)$  mehrere, evtl sogar unendlich viele Elemente haben kann (\* weil für mehrere  $x \in X$   $f(x) = y \in B$  sein kann)

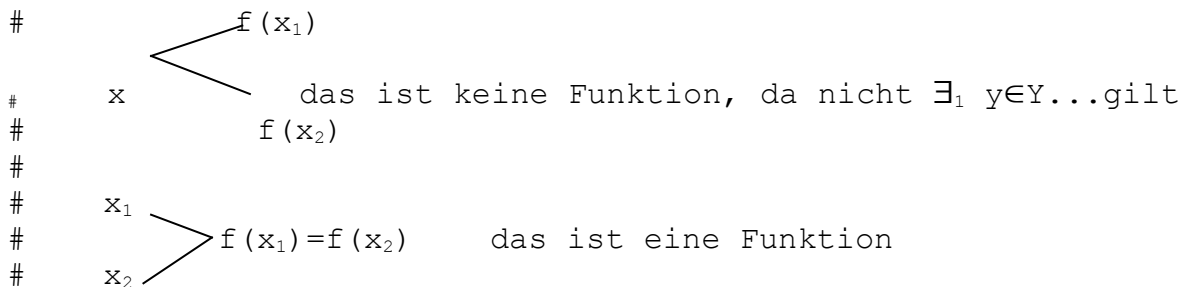
Bem: Für  $f: X \rightarrow Y$  gilt

1.)  $f(A) = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$

2.)  $f^{-1}(B) = \emptyset \Leftrightarrow B \subset Y \setminus f(X)$



3.)  $x_1 = x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f(108)

a)  $(.) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \forall A, B \subset X \quad (..) f(\bigcup_{M \in S} M) = \bigcup_{M \in S} f(M) \quad \forall M \subset X$

b)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X,$   
 $f(\bigcap_{M \in S} M) \subset f(M), \quad M \subset X$

sonstiges:  $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$  und  $f = \text{const}, X \neq \emptyset \Rightarrow f(A \cap B) = \emptyset, f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$

c)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \forall A, B \subset Y,$

$(.) f^{-1}(\bigcup_{M \in S} M) = \bigcup_{M \in S} f^{-1}(M), \quad (..) f^{-1}(\bigcap_{M \in S} M) = \bigcap_{M \in S} f^{-1}(M), \quad M \subset Y$



Andere Formulierung:

Es sei eine Funktion  $f:A \rightarrow B$  gegeben. Die Mengen  $A_1, A_2$  seien Teilmengen

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

**D0.2.4**(200) Eine Abbildung (Funktion)  $f: X \rightarrow Y$  heißt

- 1.) injektiv (eindeutig) oder Injektion:  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , d.h. jedes  $y \in Y$  hat max 1 Urbild  $x \in X$  mit  $y = f(x)$ , d.h. aus  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- 2.) surjektiv (Surjektion) (Abb von  $X$  auf  $Y$ ):  $\Leftrightarrow Y = f(X)$ , (d.h. für  $\forall y \in Y \exists$  mindestens ein  $x \in X: y = f(x)$ ), d.h. Wertebereich nicht zu groß gewählt
- 3.) bijektiv oder Bijektion:  $\Leftrightarrow f$  ist injektiv und surjektiv  
Zu jedem  $y \in Y$  gibt es genau ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ .  
In diesem Fall heißt die Funktion/Abb.  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  definiert durch  $f^{-1}(y) := x$  für  $y = f(x)$  die Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu  $f$ ,  $y \in Y, x \in X$ , wobei  $x$  dasjenige Element aus  $X$  sei, für das  $y = f(x)$  gilt.  
Eine Bijektion  $f: X \rightarrow X$  heißt Permutation von  $X$

Bem: 1.) Falls  $f$  nicht bijektiv, so existiert keine Umkehrfunktion auf  $Y$

2.) Achtung:  $f^{-1}(B)$  Urbild ist verschieden von  $f^{-1}(x)$  der Umkehrfunktion

**I0.2.1**(201) Vor:  $X$  endliche Menge.  $f: X \rightarrow X$  eine Abbildung

Aussage: a)  $f$  injektiv b)  $f$  surjektiv c)  $f$  bijektiv sind äquivalent.

Bew:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a)  $\Rightarrow$  b):  $f$  injektiv  $\Rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \subset X$  hat  $n$  Elemente  $\Rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} = X \Rightarrow f$  surjektiv

b)  $\Rightarrow$  c):  $f$  surjektiv  $\Rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$  hat  $n$  Elemente  $\stackrel{a)b)}{\Rightarrow}$  die  $n$  Elemente müssen verschieden sein  $\Rightarrow f$  injektiv  $\stackrel{a)}{\Rightarrow}$   $f$  bijektiv

c)  $\Rightarrow$  a): c):  $f$  bij.  $\Rightarrow f$  inj

**S0.2.2**(201)

Es sei eine bijektive Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit Umkehrfunktion

$f^{-1}: Y \rightarrow X$  gegeben, dann gilt:

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$  und  $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y$

Bew: Sei  $x \in X$  baf. Setze  $y = f(x)$ , d.h. nach Def ist  $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

Sei  $y \in Y$  baf.  $\stackrel{f \text{ bij}}{\Rightarrow} \exists x \in X$  mit  $f(x) = y$ , d.h.  $x = f^{-1}(y)$ ,  $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$

**D0.2.5**(202) Seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  vorgegeben, dann heißt die Abb.  $g \circ f: X \rightarrow Z$  definiert durch  $x \mapsto g(f(x)) \quad \forall x \in X$  die zusammengesetzte oder verkettete Funktion aus  $f$  und  $g$  (Komposition von  $f$  mit  $g$ )

Bem: 1.) Die Komposition ist assoziativ, aber nicht kommutativ:

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$   
 $g \circ f \neq f \circ g$  (siehe auch A0.2.15 S 205)

Bew: Sei  $h: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $f: Z \rightarrow W$ ,  $x \in X$ .

$f \circ (g \circ h)(x) \stackrel{D0.2.5}{=} f(g(h(x))) \stackrel{D0.2.5}{=} f(g(h(x))) \stackrel{D0.2.5}{=} f(g(h(x))) \stackrel{D0.2.5}{=} (f \circ g)(h(x))$

2.) Sind  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  bijektive Abb, dann ist auch  $g \circ f: X \rightarrow Z$  bijektiv und die Umkehrfunktion  $(g \circ f)^{-1}: Z \rightarrow X$  ist gegeben durch  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

**D0.2.6**(203) Seien  $X, Y$  beliebige Mengen  $\neq \emptyset$  und  $A \subset X$  und Funktionen gegeben  $f: X \rightarrow Y$   $g: A \rightarrow Y$ , dann heißt

- 1.)  $\text{id}_x: X \rightarrow X$  mit  $x \mapsto x \quad \forall x \in X$  die Identität auf  $X$  oder identische Abb. auf  $X$
- 2.)  $g$  die Restriktion (oder Einschränkung) von  $f$  auf  $A: \Leftrightarrow g(x) = f(x) \quad \forall x \in A. \quad \text{Bez: } g = f|_A$
- 3.)  $f$  eine Fortsetzung von  $g$  von  $A$  auf  $X: \Leftrightarrow g = f|_A$  von  $A$  auf  $X$
- 4.) Wenn eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  bijektiv, dann gilt  $f^{-1} \circ f = \text{id}_x$  und  $f \circ f^{-1} = \text{id}_y$

Bem: 1.)  $\text{id}_x$  ist bijektiv und  $\text{id}_x^{-1} = \text{id}_x$

2.)  $f: X \rightarrow Y$  ist injektiv  $\Leftrightarrow f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) \quad \forall A, B \subset X$

3.)  $f: X \rightarrow Y$  bijektiv  $g: Y \rightarrow Z$  bijektiv  $\Rightarrow$

$g \circ f: X \rightarrow Z$  bijektiv und  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Bew:  $f(X) = Y, g(Y) = Z \Rightarrow (g \circ f)(X) = Z$  surjektiv

Wähle  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g\left(\underset{Y_1}{f(x_1)}\right) = g\left(\underset{Y_2}{f(x_2)}\right) \Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g \circ f$  bijektiv

$y = f(x), z = g(y) = (g \circ f)(x) \Rightarrow$

$x = f^{-1}(y), y = g^{-1}(z) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \quad \forall z \in Z$

$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

#### S0.2.4 (206)

a) Sei  $f: X \rightarrow Y$  umkehrbar (invertierbar), dann ist die inverse Abbildung  $g$  eindeutig bestimmt.

b)  $f: X \rightarrow Y$  ist invers (umkehrbar)  $\Leftrightarrow f$  ist bijektiv

c)  $f$  ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_x$  und  $f \circ g = \text{id}_y$  gibt. Dieses  $g$  ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Beh.(.)  $f$  bijektiv  $\Leftrightarrow \exists g: Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_x \quad f \circ g = \text{id}_y$

(..) dieses  $g$  ist eindeutig

( $g = f^{-1}$  siehe später, heißt inverse Funktion)